Musterlösung zur Aufgabe A1.1

a) Im markierten Bereich (20 Millisekunden) sind ca 10 Schwingungen zu erkennen. Daraus folgt für die Signalfrequenz näherungsweise f = 10/(20ms) = 500 Hz ⇒ Lösungsvorschlag 2.

b) Das Signal $v_1(t)$ ist gegenüber dem Orginalsignal $q(t)$ unverzerrt. Es gilt:

$$v_1(t) = \alpha \cdot q(t - \tau).$$

Ein Dämpfungsfaktor α und eine Laufzeit τ führen nicht zu Verzerrungen, sondern das Signal ist leiser (falls $\alpha < 1$) und es kommt später als das Original ⇒ Lösungsvorschlag 1.

c) Man erkennt sowohl im dargestellten Signalverlauf als auch im Audiosignal das additive Rauschen ⇒ Lösungsvorschläge 1 und 3. Der Signalrauschabstand beträgt dabei ca. 30 dB; dies ist aber aus dieser Darstellung nicht erkennbar.

d) Das Signal $v_1(t)$ ist formgleich mit dem Originalsignal $q(t)$ und unterscheidet sich von diesem lediglich durch den Amplitudenfaktor $\alpha = 0.3$ (entspricht etwa –10 dB) und die Laufzeit τ =10 ms.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.1

a) Die ersten beiden Aussagen sind richtig: Das akustische Sprachsignal $q(t)$ muss zunächst in ein elektrisches Signal gewandelt und anschließend für die Übertragung aufbereitet werden. Bei ISDN ist das Sendesignal $s(t)$ digital.

b) Das Empfangssignal $r(t)$ ist aufgrund des unvermeidbaren thermischen Rauschens stets analog. Die Nachrichtensinke ist der Anrufbeantworter. Bei einem idealen Übertragungssystem müsste $v(t) = q(t)$ gelten. Aufgrund des additiven Rauschterms $n(t)$, der Dämpfung α und der Laufzeit τ gilt jedoch hier:

$$v(t) = \alpha \cdot q(t - \tau) + n(t).$$

Richtig sind also die Lösungsvorschläge 3 und 4.

Musterlösung zur Aufgabe A1.2

a) Alle Signale können in analytischer Form vollständig beschrieben werden; sie sind deshalb auch deterministisch. Alle Signale sind außerdem für alle Zeiten t eindeutig definiert, nicht nur zu gewissen Zeitpunkten. Deshalb handelt es sich stets um zeitkontinuierliche Signale.

Die Signalamplituden von $x_2(t)$ und $x_3(t)$ können alle beliebigen Werte zwischen 0 und 1 V annehmen; sie sind deshalb wertkontinuierlich. Dagegen sind beim Signal $x_1(t)$ nur die zwei Signalwerte 0 V und 1 V möglich, und es liegt ein wertdiskretes Signal vor. Zutreffend sind also die Lösungsvorschläge 1 und 3.

b) Ein Signal bezeichnet man als *kausal*, wenn es für Zeiten $t < 0$ nicht existiert bzw. identisch 0 ist. Dies gilt für die beiden ersten Signale $x_1(t)$ und $x_2(t)$. Dagegen gehört $x_3(t)$ zur Klasse der *akausalen* Signale.

c) Nach der allgemeinen Definition gilt:

$$E_2 = \lim_{T_\mathrm{M} \to \infty} \int_{-T_\mathrm{M}/2}^{T_\mathrm{M}/2} x_2^2(t)\ \mathrm{d}t.$$

Im vorliegenden Fall ist die untere Integrationsgrenze 0 und es kann auf die Grenzwertbildung verzichtet werden. Man erhält:

$$E_2 = \int_0^\infty (1\mathrm{V})^2 \cdot \mathrm{e}^{-2t/(1\mathrm{ms})}\ \mathrm{d}t \underline{= 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{V}^2\mathrm{s}}.$$

Bei endlicher Energie ist die zugehörige Leistung stets verschwindend klein. Daraus folgt $P_2 \underline{= 0}$.

d) Wie bereits in der Teilaufgabe (c) berechnet wurde, besitzt das Signal $x_2(t)$ eine endliche Energie: $E_2 = 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{V}^2\mathrm{s}$. Die Energie des Signals $x_3(t)$ ist doppelt so groß, da nun der Zeitbereich $t < 0$ den gleichen Beitrag liefert wie der Zeitbereich $t > 0$ $\Rightarrow E_3 = 10^{-3}\ \mathrm{V}^2\mathrm{s}$ $\Rightarrow$ Richtig sind die Lösungsvorschläge 2 und 3.

Beim Signal $x_1(t)$ divergiert das Energieintegral: $E_1 \to \infty$. Dieses Signal weist eine *endliche* Leistung auf ($P_1 = 0.5\ \mathrm{V}^2$) und ist dementsprechend *leistungsbegrenzt*. Das Ergebnis $P_1 = 0.5\ \mathrm{V}^2$ berücksichtigt, dass das Signal in der Hälfte der Zeit ($t < 0$) identisch 0 ist.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.2

a) Das Quellensignal $q(t)$ ist analog, also *wert- und zeitkontinuierlich*. Im Allgemeinen macht es keinen Sinn, ein deterministisches Signal zu übertragen. Für die mathematische Beschreibung eignet sich allerdings ein deterministisches Quellensignal – wie zum Beispiel ein periodisches Signal – besser als ein Zufallssignal. Deterministische Signale werden auch für den Testbetrieb herangezogen, um erkannte Fehlfunktionen rekonstruieren zu können. Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1, 2 und 4.

b) Das Signal $q_A(t)$ nach der Abtastung ist weiterhin *wertkontinuierlich*, aber nun *zeitdiskret*. Die Abtastfrequenz f_A ist dabei durch das so genannte *Abtasttheorem* vorgegeben. Je größer die maximale Frequenz $f_{N,max}$ des Nachrichtensignals ist, desto größer muss f_A gewählt werden ($f_A \geq 2 \cdot f_{N,\, max}$). Richtig sind also die Lösungsvorschläge 2 und 3.

c) Das quantisierte Signal $q_Q(t)$ ist zeit- und wertdiskret, wobei die Stufenzahl $M = 2^8 = 256$ beträgt. Ein Binärsignal ist dagegen ein wertdiskretes Signal mit der Stufenzahl $M = 2$. Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1 und 3.

d) Das codierte Signal $q_C(t)$ ist ein Binärsignal (Stufenzahl $M = 2$) mit der Bitdauer $T_B = T_A/8$. Richtig sind hier die Lösungsvorschläge 1, 3 und 5.

Musterlösung zur Aufgabe A1.3

a) Entsprechend den Angaben gilt mit dem Satz von Euler:

$$2 \cdot z_1 + z_2 = 2 \cdot \cos(45°) - 2\text{j} \cdot \sin(45°) - 2 \cdot \cos(45°) + 2\text{j} \cdot \sin(45°) = 0.$$

Der zweite Vorschlag ist ebenfalls richtig, da

$$z_1^\star \cdot z_2 = 1 \cdot \text{e}^{\text{j}45°} \cdot 2 \cdot \text{e}^{\text{j}135°} = 2 \cdot \text{e}^{\text{j}180°} = -2.$$

Dagegen ist der dritte Vorschlag falsch. Die Division von z_1 und z_2 liefert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\text{e}^{-\text{j}45°}}{2 \cdot \text{e}^{\text{j}135°}} = 0.5 \cdot \text{e}^{-\text{j}180°} = -0.5.$$

Die Multiplikation mit $z_3 = -\text{j}$ führt zum Ergebnis j/2, also zu einer rein imaginären Größe. Richtig sind also die <u>Lösungsvorschläge 1 und 2</u>.

b) Das Quadrat von z_2 hat den Betrag $|z_2|^2$ und die Phase $2 \cdot \phi_2$:

$$z_2^2 = 2^2 \cdot \text{e}^{\text{j}270°} = 4 \cdot \text{e}^{-\text{j}90°} = -4 \cdot \text{j}.$$

Entsprechend gilt für das Quadrat von z_3:

$$z_3^2 = (-\text{j})^2 = -1.$$

Somit ist $x_4 = \underline{-1}$ und $y_4 = \underline{-4}$.

c) Durch Anwendung der Divisionsregel erhält man:

$$z_5 = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2 \cdot \text{e}^{\text{j}135°}} = 0.5 \cdot \text{e}^{-\text{j}135°} = 0.5 \cdot (\cos(-135°) + \text{j} \cdot \sin(-135°))$$

$$\Rightarrow x_5 = y_5 = -\frac{\sqrt{2}}{4} \underline{= -0.354}.$$

d) Die angegebene Beziehung für z_6 kann auch wie folgt umgeformt werden:

$$z_6^2 = z_3 = \text{e}^{-\text{j}90°}.$$

Man erkennt, dass es zwei Möglichkeiten für z_6 gibt, die diese Gleichung erfüllen:

$$z_6\,(1.\text{ Lösung}) = \frac{z_2}{2} = 1 \cdot \text{e}^{\text{j}135°} \Rightarrow \phi_6 \underline{= 135°},$$

$$z_6\,(2.\text{ Lösung}) = z_1 = 1 \cdot \text{e}^{-\text{j}45°} \Rightarrow \phi_6 \underline{= -45°}.$$

e) Die komplexe Größe z_2 lautet in Realteil–/Imaginärteildarstellung:

$$z_2 = x_2 + \text{j} \cdot y_2 = -\sqrt{2} + \text{j} \cdot \sqrt{2}.$$

Damit ergibt sich für die komplexe Exponentialfunktion:

$$z_7 = \text{e}^{-\sqrt{2}+\text{j}\cdot\sqrt{2}} = \text{e}^{-\sqrt{2}} \cdot \left(\cos(\sqrt{2}) + \text{j} \cdot \sin(\sqrt{2})\right).$$

Mit

$$\text{e}^{-\sqrt{2}} = 0.243, \quad \cos(\sqrt{2}) = 0.156, \quad \sin(\sqrt{2}) = 0.988$$

erhält man somit:

$$z_7 = 0.243 \cdot (0.156 + \mathrm{j} \cdot 0.988) \ \underline{= 0.038 + \mathrm{j} \cdot 0.24}.$$

f) Ausgehend vom Ergebnis e) erhält man für z_8:

$$\begin{aligned} z_8 &= \mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \cdot \Big(\cos(\sqrt{2}) + \mathrm{j} \cdot \sin(\sqrt{2}) + \cos(\sqrt{2}) - \mathrm{j} \cdot \sin(\sqrt{2})\Big) \\ &= 2 \cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \cdot \cos(\sqrt{2}) = 2 \cdot x_7 \quad \Rightarrow \quad x_8 \ \underline{= 0.076}, \ y_8 \ \underline{= 0}. \end{aligned}$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.3

a) Der Betrag kann nach dem Satz von **Pythagoras** berechnet werden:

$$|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} \underline{= 5}.$$

Für den Phasenwinkel gilt entsprechend der Seite 3 von Kapitel 1.3:

$$\phi_1 = \arctan\frac{y_1}{x_1} = \arctan\frac{3}{4} \underline{= 36.9^\circ}.$$

b) Die Multiplikation von z_1 mit deren Konjugiert-Komplexen $z_1{}^*$ ergibt die rein reelle Größe z_4, wie die beiden nachfolgenden Gleichungen zeigen:

$$z_4 = (x_1 + \mathrm{j}\cdot y_1)(x_1 - \mathrm{j}\cdot y_1) = x_1^2 + y_1^2 = |z_1|^2 = 25,$$

$$z_4 = |z_1|\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\phi_1}\cdot |z_1|\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot\phi_1} = |z_1|^2 = 25$$

$$\Rightarrow \quad x_4 \underline{= 25}, \quad y_4 \underline{= 0}.$$

c) Aufgeteilt nach Real- und Imaginärteil kann geschrieben werden:

$$x_5 = x_1 + 2\cdot x_2 - \frac{x_3}{2} = 4 + 2\cdot(-2) - 0 \underline{= 0},$$

$$y_5 = y_1 + 2\cdot y_2 - \frac{y_3}{2} = 3 + 2\cdot 0 - \frac{6}{2} \underline{= 0}.$$

d) Schreibt man z_2 nach Betrag und Phase ($|z_2| = 2$, $\phi_2 = 180°$), so erhält man für das Produkt:

$$|z_6| = |z_1|\cdot|z_2| = 5\cdot 2 \underline{= 10},$$

$$\phi_6 = \phi_1 + \phi_2 = 36.9^\circ + 180^\circ = 216.9^\circ \underline{= -143.1^\circ}.$$

e) Die Phase ist 90° (siehe Grafik auf der Angabenseite), wie man formal nachweisen kann:

$$\phi_6 = \arctan\left(\frac{6}{0}\right) = \arctan(\infty) \quad \Rightarrow \quad \phi_6 \underline{= 90^\circ}.$$

f) Zunächst die umständlichere Lösung:

$$z_7 = \frac{z_3}{z_1} = \frac{6\mathrm{j}}{4+3\mathrm{j}} = \frac{6\mathrm{j}\cdot(4-3\mathrm{j})}{(4+3\mathrm{j})\cdot(4-3\mathrm{j})} = \frac{18+24\mathrm{j}}{25} = 1.2\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}53.1^\circ}.$$

Ein anderer Lösungsweg lautet:

$$|z_7| = \frac{|z_3|}{|z_1|} = \frac{6}{5} \underline{= 1.2}, \quad \phi_7 = \phi_3 - \phi_1 = 90^\circ - 36.9^\circ \underline{= 53.1^\circ}.$$