# Überblick zu Kapitel 1

Dieses erste Kapitel dient als *Einführung in die gesamte Thematik*, die mit den neun Büchern der Reihe *LNTwww* behandelt wird. Im Einzelnen beschreibt dieses Kapitel:

- die *Aufgaben* und den prinzipiellen *Aufbau* eines Nachrichtenübertragungssystems,
- die wichtigsten *Funktionseinheiten* (Quelle, Sender, Kanal, Empfänger und Sinke) eines solchen Systems, und schließlich
- eine *Klassifizierung* der in einem Nachrichtensystem auftretenden Signale nach mehreren Beurteilungskriterien: deterministisch oder stochastisch, energie– oder leistungsbegrenzt, zeitkontinuierlich oder zeitdiskret, wertkontinuierlich oder wertdiskret, analog oder digital.

Am Kapitelende folgt eine kurze Zusammenfassung über das Rechnen mit komplexen Zahlen.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 20 Seiten dargelegt. Außerdem beinhaltet dieses erste Kapitel noch 21 Grafiken, drei Aufgaben und drei Zusatzaufgaben mit insgesamt 26 Teilaufgaben, sowie drei Lernvideos (LV), nämlich:

- **Eigenschaften des Übertragungskanals** (LV zu Kapitel 1.1, Dauer 5:50)
- **Analoge und digitale Signale** (LV zu Kap. 1.2, Dauer Teil 1: 3:46; Teil 2: 3:28)
- **Rechnen mit komplexen Zahlen** (LV zu Kapitel 1.3, Dauer 11:52)

**Geeignete Literatur: [Fet90] – [Fre94] – [Han15] – [Kam04] – [Kra16] – [Mil00] – [Schrü90] – [Schü88] – [Unb97]**

# Nachricht – Information – Signal

Man unterscheidet grundsätzlich zwischen den Begriffen **Nachricht** und **Information**, die heutzutage allerdings oft synonym verwendet werden.

**Beispiel**: Eine Email von Herrn Maier an Frau Müller ist stets eine *Nachricht*. Für Frau Müller bedeutet der Erhalt dieser Email allerdings nur dann einen Informationsgewinn, wenn sie dadurch etwas Neues erfährt. Die durch eine Nachricht übermittelte *Information* hängt also in starkem Maße vom Kenntnisstand des Empfängers ab. In der Praxis ist die in einer Nachricht enthaltene Information eher gering, insbesondere im Anwendungsbereich *Telefonie*.

Für die Übertragung und die Speicherung einer Nachricht ist stets ein *energetischer* bzw. *materieller* Träger erforderlich, der **Signal** genannt wird. Physikalisch erfolgt die Darstellung einer Nachricht also durch Signale, die von ganz unterschiedlicher Natur sein können. Mögliche Erscheinungsformen sind:

- elektrische Signale (z. B. Strom- und Spannungsverlauf),
- elektromagnetische Wellen (z. B. bei der Funkübertragung),
- Verlauf von Druck, Temperatur oder anderer physikalischer Größen,
- akustische Signale (z. B. Ausgangssignal eines Lautsprechers),
- optische Signale (z. B. Ausgangssignal eines Lasers).

Die zur **Nachrichtenübertragung** verwendeten Signale sind in der Regel Zeitfunktionen. Das bedeutet, dass (zumindest) einer der Signalparameter abhängig vom Zeitparameter $t$ ist. Solche Signalparameter sind beispielsweise bei einem Signalton die Amplitude („Lautstärke“) und die Frequenz („Tonhöhe“).

In einem **Nachrichtenspeicher** werden die Zeitfunktionen oft auch auf räumliche Funktionen geeigneter physikalischer Größen wie Magnetisierung (Magnetband) oder Schwärzungsgrad (Film) abgebildet.

Die Menge aller Nachrichtensignale lassen sich nach verschiedenen Kriterien klassifizieren, die im **Kapitel 1.2** benannt werden.

# Blockschaltbild eines Nachrichtenübertragungssystems

Im nachfolgenden Bild ist ein *Nachrichtenübertragungssystem* schematisch dargestellt.


Die einzelnen Systemkomponenten haben folgende Aufgaben:

- Die **Nachrichtenquelle** liefert das Quellensignal $q(t)$, das über den Nachrichtenkanal zur räumlich entfernten Sinke übertragen werden soll. Die Nachrichtenquelle kann zum Beispiel ein Computer, ein Radiosender oder ein Fernsprechteilnehmer sein.
- Meist ist das Quellensignal $q(t)$ selbst für die Übertragung ungeeignet und muss erst in geeigneter Weise in das Signal $s(t)$ umgewandelt werden. Dieser Vorgang wird *Modulation* genannt und vom **Sender** bewerkstelligt. Deshalb bezeichnen wir $s(t)$ als das Sendesignal.
- Bei der Übertragung über den **Kanal** wird dieses Signal $s(t)$ in seiner Form verändert; gleichzeitig addieren sich mehr oder weniger starke Stör- und Rauschsignale. Das Signal am Kanalausgang / Empfängereingang bezeichnen wir als das Empfangssignal $r(t)$.
- Der **Empfänger** muss die beim Sender vorgenommene Wandlung wieder rückgängig machen. Wurde beispielsweise das niederfrequente Quellensignal $q(t)$ in das höherfrequente Sendesignal $s(t)$ umgesetzt, so muss der Empfänger auch einen *Demodulator* beinhalten.
- Der letzte Block in obigem Bild ist die **Nachrichtensinke**. Das Sinkensignal $v(t)$ ist wie das zu übertragende Signal $q(t)$ wieder niederfrequent. Im Idealfall, der in der Praxis allerdings nie exakt erreicht werden kann, sollte für alle Zeiten $v(t) = q(t)$ gelten.

# Nachrichtenquelle

Als Beispiele für **Nachrichtenquellen** bzw. für das Quellensignal $q(t)$ können genannt werden:

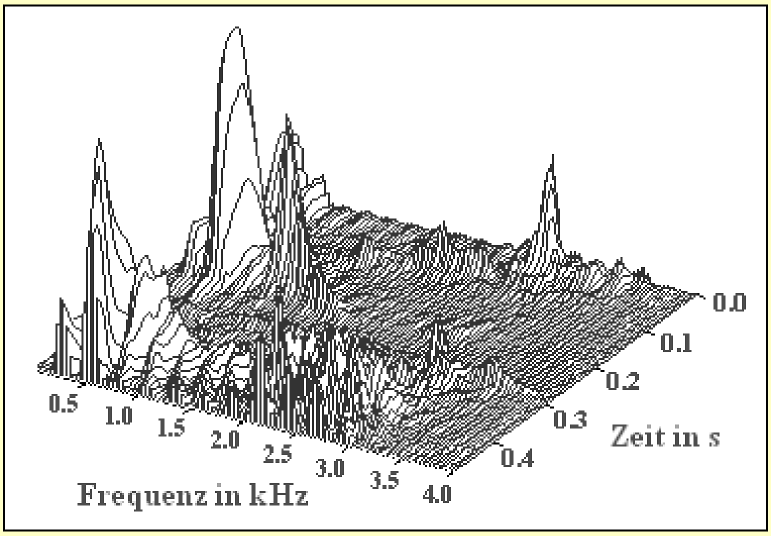
- Audiosignale, z. B. Sprache oder Musik,
- Videosignale, z. B. ein analoges Fernsehsignal oder MPEG-codiertes Streaming-Video,
- Datensignale, z. B. der Datenstrom einer USB-Schnittstelle oder eine Email im Internet,
- Messsignale, z. B. zur Steuerung oder zur Regelung in einem Produktionsprozess.

Man unterscheidet zwischen analogen und digitalen Nachrichtenquellen. Nähere Informationen hierüber finden Sie im **Kapitel 1.2** und dem nachfolgenden Lernvideo:

**Analoge und digitale Signale** (Dauer Teil 1: 3:46; Teil 2: 3:28)

Die hier dargelegte Beschreibungsform gilt für Analogsignale und Digitalsignale gleichermaßen.

**Beispiel:** Unten sehen Sie die Frequenz–Zeitdarstellung eines Sprachsignals (wir bedanken uns bei Markus Kaindl, LNT/TUM, für die Bereitstellung dieser Grafik).




Man erkennt zu unterschiedlichen Zeiten die verschiedenen Frequenzanteile im kHz-Bereich. Es handelt sich hierbei um einen männlichen Sprecher.

# Aufgaben des Senders

Die wesentliche Aufgabe des *Nachrichtensenders* ist es, das Quellensignal $q(t)$ derart in ein Sendesignal $s(t)$ umzuformen, dass dieses unter Einhaltung vorgegebener Leistungsmerkmale möglichst gut an den Übertragungskanal angepasst ist. Dazu enthält jeder Sender entsprechende **Funktionseinheiten** wie

- *Wandler* – zum Beispiel ein Mikrofon zur Umwandlung der physikalischen Größe „Druck" (akustische Welle) in ein elektrisches Signal,
- *Signalumsetzer* – beispielsweise von „analog" nach „digital" mit Hilfe der Komponenten *Abtastung*, *Quantisierung* und *Binärcodierung*,
- *Codierer* zum Entfernen von Redundanz zur Datenkomprimierung (*Quellencodierung*) oder zum systematischen Hinzufügen von Redundanz, die beim Empfänger zur Fehlererkennung und/oder Fehlerkorrektur genutzt werden kann (*Kanalcodierung*),
- *Modulator* zur Anpassung an den Übertragungskanal, etwa eine *Frequenzumsetzung* mittels einer analogen Amplituden–, Frequenz– oder Phasenmodulation bzw. den entsprechenden digitalen Verfahren ASK, FSK und PSK.

Je nach Anwendung bedeuten die obigen **Leistungsmerkmale**, dass für die Signalübertragung ganz spezifische Eigenschaften gefordert werden. Solche Merkmale sind beispielsweise:

- Leistungsbegrenzung – aufgrund der Diskussionen zum Thema *Elektrosmog* hochaktuell,
- Bandbreiteneffizienz – die UMTS-Versteigerung hat gezeigt, um welche Beträge es geht,
- Distanz bzw. Reichweite – ungünstige Werte erhöhen die Kosten der Infrastruktur,
- Übertragungsqualität – z. B. ein hoher Signal-zu-Störabstand oder eine geringe Fehlerrate.

# Übertragungskanal

Bei der Realisierbarkeit bestimmter Übertragungseigenschaften spielt das **Übertragungsmedium** mit seinen physikalischen Eigenschaften eine wesentliche Rolle.

Beispiele für Übertragungsmedien sind:

- elektrische Leitungen, z. B. Kupferdraht, Twisted Pair,
- Koaxialkabel, z. B. Antennenleitung oder Kabelnetz,
- Lichtwellenleiter, z. B. Multimode- und Monomodeglasfaser,
- Funkkanäle, z. B. Rundfunk, Mobilfunk und Satellitenfunk.

Diese Übertragungsmedien sind in der Praxis nicht ideal und beeinträchtigen die Übertragung. Das Empfangssignal $r(t)$ unterscheidet sich vom Sendesignal $s(t)$ zum Beispiel aufgrund

- der *Kanaldämpfung*,
- von *Laufzeiten* auf dem Kanal,
- von *Verzerrungen* linearer und nichtlinearer Art.

Hinzu kommt, dass sich die Übertragungseigenschaften des Kanals – wie beispielsweise beim Mobilfunk – mit der Zeit stark verändern können (*Zeitvarianz*).

Zusätzlich sind stets die bei der Signalübertragung auftretenden **Störsignale** zu berücksichtigen. Hier kann man als Beispiele nennen:

- *Rauschsignale* – z. B. Widerstands- und Halbleiterrauschen,
- *Impulsstörungen* – z. B. Starkstromleitungen, Funkenstörungen und Entladungen,
- *Nachbarkanalstörungen* (Übersprechen anderer Nutzer, Interferenzen, Kreuzmodulation).

Sie finden einige grundlegende Details über die Modellierung des Nachrichtenkanals allgemein und des recht einfachen AWGN-Kanalmodells in nachfolgendem Lernvideo:

**Eigenschaften des Übertragungskanals** (Dauer 5:50)

# Empfänger – Nachrichtensinke

Als Beispiele für die **Nachrichtensinke** können wir nennen:

- Auge und Ohr des Menschen,
- Videorecorder und Anrufaufzeichner,
- ein Personalcomputer, der eine Datei aus dem Internet herunterlädt, oder
- eine Steuerungsanlage, die empfangene Messsignale verarbeitet.

Damit zumindest im – in der Praxis allerdings nie erreichbaren – Idealfall das Sinkensignal $v(t)$ mit dem Quellensignal $q(t)$ übereinstimmen könnte, müssen zuerst durch den **Empfänger** alle sendeseitig getroffenen Maßnahmen rückgängig gemacht werden. Eine weitere wichtige Aufgabe des Empfängers besteht darin, die bei der Übertragung aufgetretenen Signalverfälschungen und Störungen möglichst gut zu beseitigen.

Entsprechende **Funktionseinheiten** des Empfängers können sein:

- *Wandler* – zum Beispiel ein Lautsprecher zur Umwandlung eines elektrischen in ein akustisches Signal (Gegenstück zum Mikrofon),
- *Signalrücksetzung* – zum Beispiel die Rekonstruktion des Analogsignals aus den digitalen Abtastwerten (Gegenstück zum A/D-Wandler),
- *Decodierung* – zum Beispiel mit der Möglichkeit zur Fehlererkennung und Fehlerkorrektur (Gegenstück zum Kanalcodierer),
- *Demodulation* – zum Beispiel Frequenzrücksetzung des Signals in den ursprünglichen Frequenzbereich (Gegenstück zum AM/FM/PM–Modulator).

Die Realisierung solcher Systemkomponenten für Sender und Empfänger geschieht durch verschiedene elektrische Netzwerke und Baugruppen. Auch hier lassen sich beispielhaft einige Funktionseinheiten nennen:

- Verstärker, Filter und Entzerrer,
- Oszillatoren und nichtlineare Komponenten zur (De-)Modulation und Synchronisation,
- digitale Signalverarbeitungskomponenten und Signalprozessoren.

# Signalverfälschungen (1)

Es wurde bereits angesprochen, dass im Idealfall $v(t) = q(t)$ sein sollte. Gilt jedoch wie bei jedem realen Übertragungskanal $r(t) \neq s(t)$, so wird sich natürlich auch das Sinkensignal $v(t)$ vom Quellensignal $q(t)$ unterscheiden. Hierzu einige Beispiele:

- Man spricht von **Rauschen**, wenn für das Sinkensignal gilt:

  $$v(t) = q(t) + n(t).$$

  Der additive Rauschanteil $n(t)$ ist stets von stochastischer Natur und hat meist keinerlei Bezug zum Nachrichtensignal $q(t)$. Ein solcher Rauschterm $n(t)$ ist bei jeder Übertragung unvermeidlich. In Ausnahmefällen ist das Rauschen $n(t)$ abhängig von $q(t)$.

- Die Übertragung ist **verzerrungsfrei**, wenn das Sinkensignal wie folgt lautet:

  $$v(t) = \alpha \cdot q(t - \tau) + n(t).$$

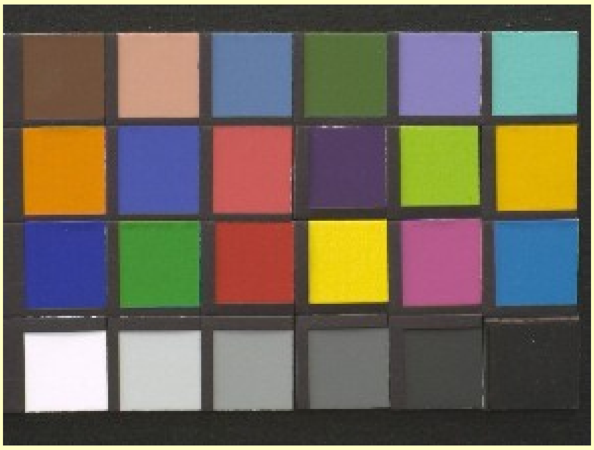
  Das Sinkensignal unterscheidet sich also – außer durch den stets vorhandenen Störanteil $n(t)$ – nur durch den (für alle Frequenzen gleichen) Dämpfungsfaktor $\alpha$ und die (für alle Frequenzen gleiche) Laufzeit $\tau$.

- Der *Dämpfungsfaktor* $\alpha$ bewirkt, dass das Signal $v(t)$ die gleiche Form wie $q(t)$ hat und nur etwas „leiser“ ist. Die *Laufzeit* $\tau$ führt dazu, dass das Signal $v(t)$ am Empfänger später ankommt, als $q(t)$ gesendet wurde. Beide Effekte sind für die (unidirektionale) Übertragung nicht sonderlich störend.

Ist obige Gleichung nicht erfüllt, so liegen **Verzerrungen** vor. Wie im *LNTwww*–Buch **Lineare zeitinvariante Systeme** noch beschrieben werden wird, unterscheidet man hier zwischen linearen und nichtlinearen Verzerrungen.

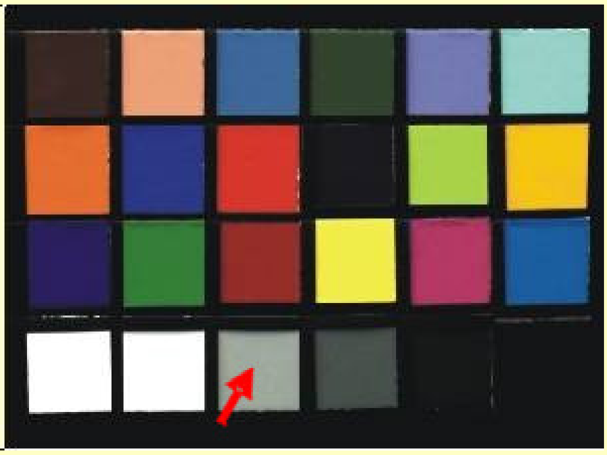
# Signalverfälschungen (2)

**Beispiel:** Die hier benutzten Begriffe sollen nun an einem Bildsignal verdeutlicht werden. Rechts oben sehen Sie als „Orginal” eine Farbschablone mit 291 × 218 Pixeln und 24 Bit Farbtiefe. Von den $2^{24}$ möglichen Farben sind hier allerdings nur wenige benutzt.



Die beiden unteren Bilder sind verfälscht:

- Im linken Beispiel ist dem Bildsignal ein additives Rauschsignal $n(t)$ überlagert, was sich als „Schnee” bemerkbar macht.
- Das rechte Bild zeigt beispielhaft den Einfluss von (nichtlinearen) Verzerrungen, die bei der hierfür gewählten Einstellung der CCD-Kamera sowohl zu einer Verfälschung der Helligkeitswerte als auch der Farbinformation führen.
- Im markierten Feld der Grautreppe stimmt die Helligkeit näherungsweise mit dem Orginalbild (oben) überein. Dagegen erscheinen andere Felder als zu hell oder zu dunkel bzw. mit Fehlfarben belegt.
- Rauscheffekte spielen im rechten Bild im Gegensatz zum linken Bild keine Rolle.

# Deterministische und stochastische Signale

In jedem Nachrichtensystem treten sowohl deterministische als auch stochastische Signale auf.

**Definition:** **Deterministische Signale** sind Signale, deren Zeitfunktionen $x(t)$ in analytischer Form vollständig angegeben werden können.

Da hier die Zeitfunktion $x(t)$ für alle Zeiten $t$ bekannt und eindeutig angebbar ist, existiert für diese Signale stets eine über die **Fourierreihe** oder die **Fouriertransformation** berechenbare Spektralfunktion $X(f)$.

**Definition:** Man spricht von einem **stochastischen Signal** bzw. von einem Zufallssignal, wenn der Signalverlauf $x(t)$ nicht – oder zumindest nicht vollständig - in mathematischer Form beschreibbar ist. Ein solches Signal kann für die Zukunft nicht exakt vorhergesagt werden.

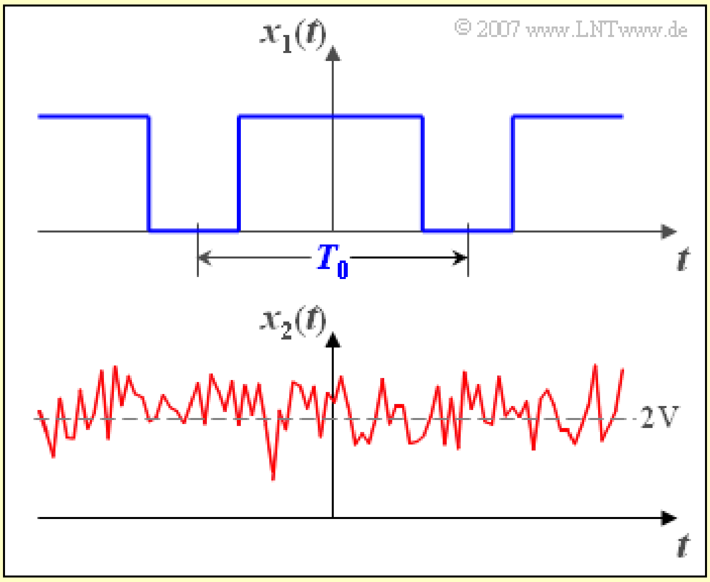
Für ein stochastisches, also nichtdeterministisches Signal $x(t)$ ist keine Spektralfunktion $X(f)$ angebbar, da Fourierreihe und Fouriertransformation die genaue Kenntnis der Zeitfunktion für alle Zeiten $t$ voraussetzt.

Informationstragende Signale sind stets von stochastischer Art. Ihre Beschreibung sowie die Definition geeigneter Kenngrößen erfolgt im Buch **Stochastische Signaltheorie.** Aber auch die deterministischen Signale haben eine große Bedeutung für die Nachrichtentechnik. Beispiele sind:

- Testsignale für den Entwurf von Nachrichtensystemen,
- Trägersignale für Frequenzmultiplexsysteme, und
- ein Puls zur Abtastung eines Analogsignals oder zur Zeitregenerierung eines Digitalsignals.

**Beispiel:** Die Grafik zeigt Zeitverläufe eines deterministischen (oben) und eines stochastischen Signals (unten):

- ein periodisches Rechtecksignal $x_1(t)$ mit der Periodendauer $T_0$,
- ein Gaußsches Rauschsignal $x_2(t)$ mit dem Mittelwert 2V.



# Kausale und akausale Signale

In der Nachrichtentechnik rechnet man oftmals mit zeitlich nicht begrenzten Signalen. Der Definitionsbereich des Signals erstreckt sich dann von $t = -\infty$ bis $+\infty$. In der Realität gibt es solche Signale nicht, denn jedes Signal musste irgendwann einmal eingeschaltet werden. Wählt man – zwar willkürlich, aber dennoch sinnvoll – den Einschaltzeitpunkt einheitlich zu $t = 0$, so kommt man zu folgender Klassifizierung:

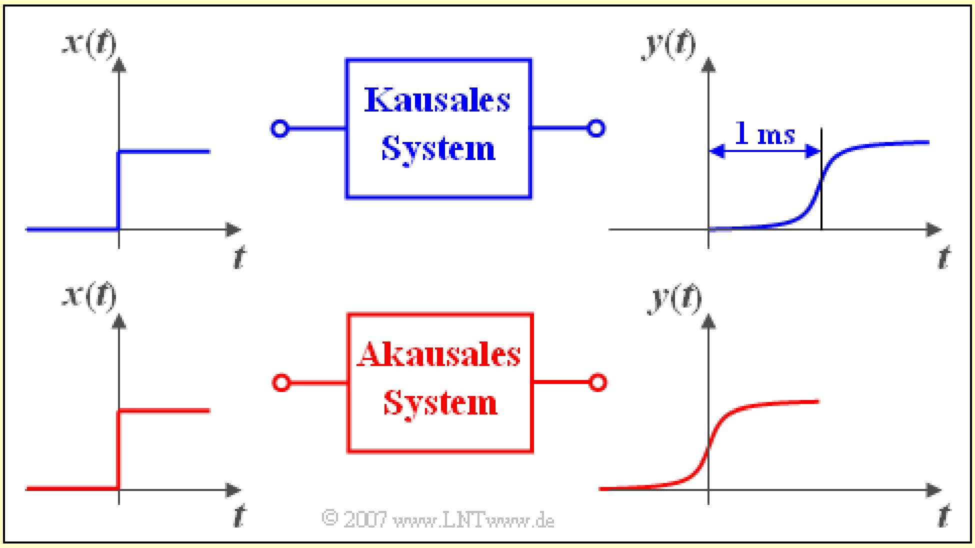
**Definition:** Man bezeichnet ein Signal $x(t)$ als **kausal**, wenn es für alle Zeiten $t < 0$ nicht existiert bzw. identisch 0 ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so liegt ein *akausales Signal* (oder System) vor.

Im gesamten Buch „Signaldarstellung" werden meist akausale Signale und Systeme betrachtet. Dies hat folgende Gründe:

- Akausale Signale (und akausale Systeme) sind mathematisch leichter zu handhaben als kausale. Beispielsweise kann man hier die Spektralfunktion mittels Fouriertansformation bestimmen und benötigt nicht wie bei der Laplacetransformation weitreichende Kenntnisse der Funktionentheorie.
- Akausale Signale und Systeme beschreiben den Sachverhalt vollständig und richtig, wenn man die Problematik des Einschaltvorgangs außer Acht lässt.

Die Beschreibung kausaler Signale und Systeme mit Hilfe der Laplacetransformation folgt im Buch **Lineare zeitinvariante Systeme.**

**Beispiel:** Sie sehen nachfolgend ein kausales Übertragungssystem. Wird an dessen Eingang eine Sprungfunktion $x(t)$ angelegt, so kann auch das Ausgangssignal $y(t)$ erst ab dem Zeitpunkt $t = 0$ von 0 auf seinen Maximalwert ansteigen. Ansonsten wäre der Kausalzusammenhang, dass die Wirkung nicht vor der Ursache einsetzen kann, nicht erfüllt.




Im unteren Bild ist diese Kausalität nicht mehr gegeben. Wie leicht zu ersehen ist, kommt man hier durch eine zusätzliche Laufzeit von 1 ms von der akausalen zur kausalen Darstellung.

# Energiebegrenzte und leistungsbegrenzte Signale (1)

An dieser Stelle müssen zunächst zwei wichtige Signalbeschreibungsgrößen eingeführt werden, nämlich die Energie und die Leistung. Im Sinne der Physik entspricht die *Energie* der Arbeit und hat zum Beispiel die Einheit „Ws“. Die *Leistung* ist als „Arbeit pro Zeit” definiert und besitzt somit die Einheit „W“.

Beide Größen sind nach den elementaren Gesetzen der Elektrotechnik vom Widerstand $R$ abhängig. Um diese Abhängigkeit zu eliminieren, wird in der Nachrichtentechnik oftmals der Widerstand $R$ = 1 Ω zugrunde gelegt. Dann gelten folgende Definitionen:

**Definition:** Die **Energie** des Signals $x(t)$ ist wie folgt zu berechnen:

$$E_x = \lim_{T_{\rm M}\to\infty} \int_{-T_{\rm M}/2}^{T_{\rm M}/2} x^2(t)\,{\rm d}t.$$

Zur Berechnung der (mittleren) **Leistung** muss vor dem Grenzübergang noch durch die Zeit $T_{\rm M}$ dividiert werden:

$$P_x = \lim_{T_{\rm M}\to\infty} \frac{1}{T_{\rm M}} \cdot \int_{-T_{\rm M}/2}^{T_{\rm M}/2} x^2(t)\,{\rm d}t.$$

Hierbei bezeichnet $T_{\rm M}$ die symmetrisch bezüglich des Zeitursprungs ($t$ = 0) angenommene Messdauer, während der das Signal beobachtet wird. Dieses Zeitintervall muss im Allgemeinen sehr groß gewählt werden; im Idealfall sollte $T_{\rm M}$ gegen unendlich gehen.

Bezeichnet $x(t)$ einen Spannungsverlauf mit der Einheit „V“, so hat nach obigen Gleichungen

- die Signalenergie die Einheit „$\rm V^2s$“ und
- die Signalleistung die Einheit „$\rm V^2$“.

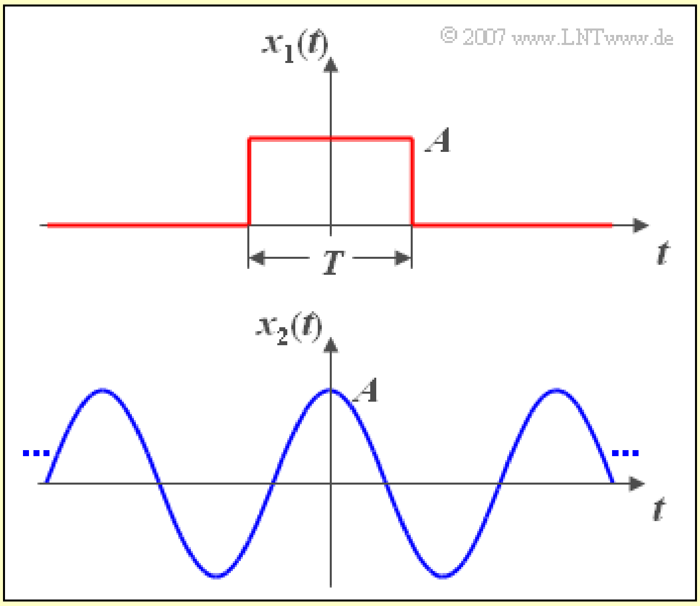
Dies bedeutet: Obigen Definitionen liegt der Bezugswiderstand $R$ = 1 Ω bereits implizit zugrunde.

Auf der nächsten Seite werden Energie und Leistung zweier beispielhafter Signale berechnet.

# Energiebegrenzte und leistungsbegrenzte Signale (2)

**Beispiel:** Die Grafik zeigt oben einen Rechteckimpuls $x_1(t)$ mit Amplitude $A$ und Dauer $T$.

- Die Signalenergie ist $E_1 = A^2 \cdot T$.
- Für die Signalleistung ergibt sich aufgrund der Division durch $T_\text{M}$ und Grenzwertbildung ($T_\text{M} \to \infty$) der Wert $P_1 = 0$.




Beim Cosinussignal $x_2(t)$ mit Amplitude $A$ entsprechend der unteren Skizze ist

- die Signalleistung unabhängig von der Frequenz gleich $P_2 = A^2/2$, und
- die Signalenergie (Integral über die Leistung für alle Zeiten) unendlich.

Mit $A$ = 4 V ergibt sich für die Leistung $P_2$ = 8 V$^2$. Bei einem Widerstand von $R$ = 50 Ω entspricht dies der physikalischen Leistung 8/50 V/Ω = 160 mW.

Entsprechend diesem Beispiel gibt es die folgenden Klassifizierungsmerkmale:

**Definition:** Ein Signal $x(t)$ mit endlicher Energie $E_x$ und unendlich kleiner Leistung ($P_x = 0$) bezeichnet man als **energiebegrenzt.**

- Impulsförmige Signale wie das Signal $x_1(t)$ im obigen Beispiel sind stets energiebegrenzt. Meist sind hier die Signalwerte nur für eine endliche Zeitdauer von Null verschieden. In anderen Worten: Solche Signale sind oft auch zeitbegrenzt.
- Aber auch zeitlich unbegrenzte Signale können durchaus eine endliche Energie besitzen. Weitere Informationen zu energiebegrenzten und damit aperiodischen Signalen, zu denen beispielsweise der Gauß– und der Exponentialimpuls gehören, finden Sie im **Kapitel 3.**

**Definition:** Ein Signal $x(t)$ mit endlicher Leistung $P_x$ und dementsprechend unendlich großer Energie ($E_x \to \infty$) bezeichnet man als **leistungsbegrenzt.**

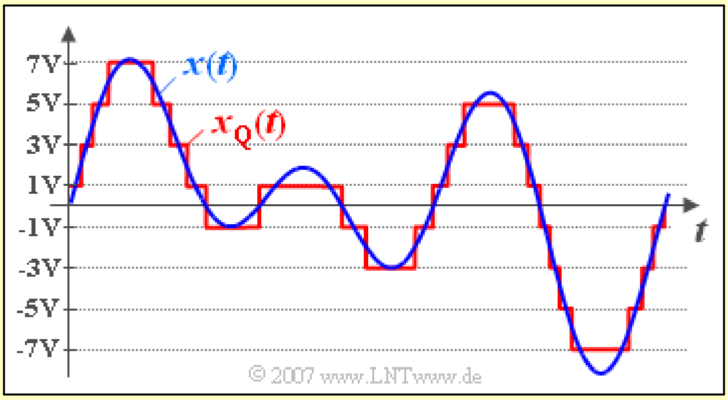
Alle leistungsbegrenzten Signale sind auch zeitlich unendlich weit ausgedehnt. Beispiele hierfür sind das Gleichsignal und periodische Signale wie das cosinusförmige Signal $x_2(t)$ im obigen Beispiel. Solche Signale werden im **Kapitel 2** ausführlich beschrieben. Auch die meisten stochastischen Signale sind leistungsbegrenzt – siehe Buch **Stochastische Signaltheorie.**

# Wertkontinuierliche und wertdiskrete Signale

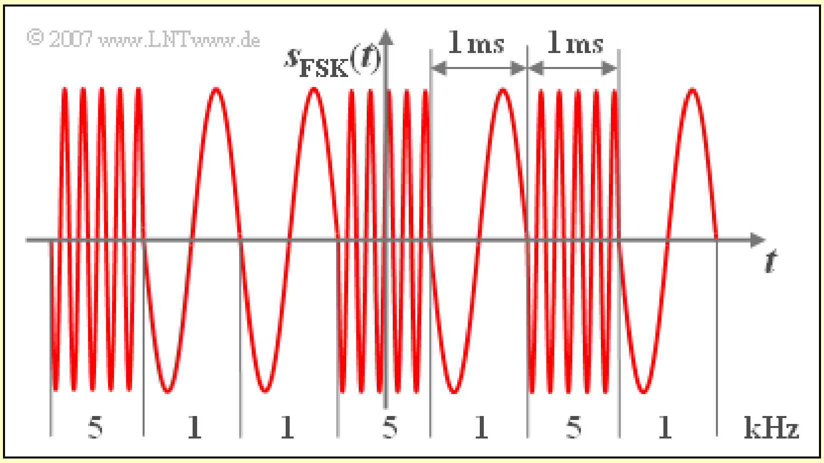
**Definition:** Ein Signal bezeichnet man als **wertkontinuierlich**, wenn sein Signalparameter – zum Beispiel der Augenblickswert – alle Werte eines Kontinuums (eines Intervalls) annehmen kann. Sind für den Signalparameter dagegen nur abzählbar viele verschiedene Werte möglich, so nennt man das Signal *wertdiskret*. Die Anzahl der möglichen Werte bezeichnet man als die **Stufenzahl** $M$.

Bei den analogen Übertragungssystemen wird stets mit wertkontinuierlichen Signalen gearbeitet. Bei Digitalsystemen sind dagegen die meisten Signale – aber nicht alle – wertdiskret.

**Beispiel:** Die Grafik zeigt in blau einen Ausschnitt eines wertkontinuierlichen Signals $x(t)$ mit Werten zwischen ±8V. In roter Farbe erkennt man das auf $M$ = 8 Quantisierungsstufen diskretisierte Signal $x_{\rm Q}(t)$ mit den möglichen Signalwerten ±1V, ±3V, ±5V und ±7V.




Beim Signal $x_{\rm Q}(t)$ wurde der Augenblickswert als der entscheidende Signalparameter betrachtet. Bei einem FSK-System (*Frequency Shift Keying*) ist dagegen die Augenblicksfrequenz der wesentliche Signalparameter. Deshalb bezeichnet man auch das unten dargestellte Signal $s_{\rm FSK}(t)$ als wertdiskret mit der Stufenzahl $M$ = 2 und den möglichen Frequenzen 1 kHz und 5 kHz, obwohl der Augenblickswert wertkontinuierlich ist.



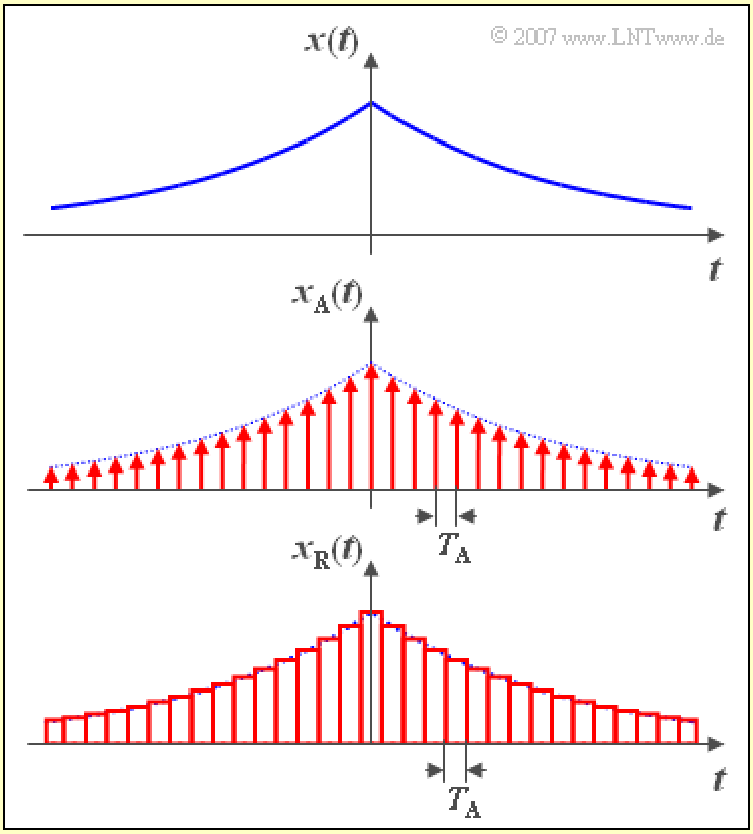
# Zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Signale

Bei den bisher betrachteten Signalen war der Signalparameter zu jedem beliebigen Zeitpunkt definiert. Man spricht dann von einem *zeitkontinuierlichen Signal*.

**Definition:** Bei einem **zeitdiskreten Signal** ist im Gegensatz dazu der Signalparameter nur zu diskreten Zeitpunkten $t_ν$ definiert. Diese Zeitpunkte wählt man meist äquidistant: $t_ν = ν \cdot T_{\rm A}$. Da ein solches Signal beispielsweise durch Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals entsteht, bezeichnen wir $T_{\rm A}$ als *Abtastzeitabstand* und dessen Kehrwert $f_{\rm A} = 1/T_{\rm A}$ als *Abtastfrequenz*.

Ein zeitdiskretes Signal $x(t)$ ist durch die zeitliche Folge $\langle x_ν \rangle$ seiner Abtastwerte vollständig bestimmt. Diese Abtastwerte können dabei sowohl wertkontinuierlich als auch wertdiskret sein.

**Beispiel:** Das zeitdiskrete Signal $x_{\rm A}(t)$ erhält man nach Abtastung des oben dargestellten zeit– und wertkontinuierlichen Nachrichtensignals $x(t)$ im Abstand $T_{\rm A}$.

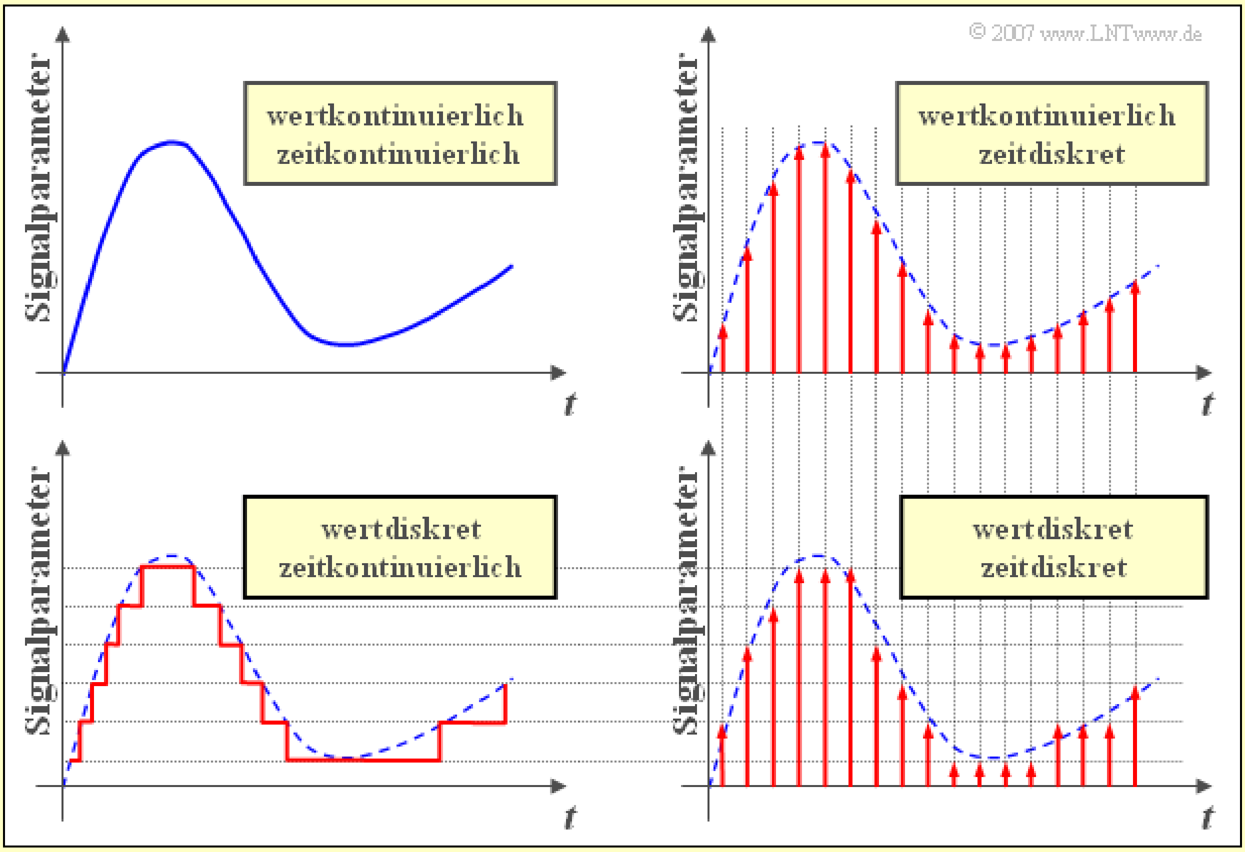



Der unten skizzierte Verlauf $x_{\rm R}(t)$ unterscheidet sich von der echten zeitdiskreten Darstellung $x_{\rm A}(t)$ dadurch, dass die unendlich schmalen Abtastwerte (mathematisch mit Diracimpulsen beschreibbar) durch Rechteckimpulse der Dauer $T_{\rm A}$ ersetzt sind. Ein solches Signal kann nach obiger Definition ebenfalls als zeitdiskret bezeichnet werden.

Die mathematische Beschreibung zeitdiskreter Signale erfolgt in **Kapitel 5.1.**

# Analog– und Digitalsignale

**Beispiel:** In folgender Grafik sind noch einmal die Signaleigenschaften „wertkontinuierlich” und „wertdiskret” sowie „zeitkontinuierlich” und „zeitdiskret” an einem Beispiel verdeutlicht.




Ist ein Signal wert- und zeitkontinuierlich, so spricht man auch von einem **Analogsignal**. Solche Signale bilden einen kontinuierlichen Vorgang kontinuierlich ab. Beispiele hierfür sind Sprach–, Musik–, Bild– und Messsignale.

Ein **Digitalsignal** ist dagegen stets wert– und zeitdiskret und die darin enthaltene Nachricht besteht aus den Symbolen eines Symbolvorrats. Es kann beispielsweise ein abgetastetes und quantisiertes (sowie in irgendeiner Form codiertes) Sprach–, Musik– oder Bildsignal sein, aber auch ein Datensignal, wenn im Internet eine Datei von einem Server heruntergeladen wird.

Je nach Stufenzahl sind Digitalsignale auch noch unter anderen Namen bekannt, beispielsweise

- $M = 2$: binäres Digitalsignal oder Binärsignal,
- $M = 3$: ternäres Digitalsignal oder Ternärsignal,
- $M = 4$: quaternäres Digitalsignal oder Quaternärsignal.

Das nachfolgende Lernvideo fasst die hier behandelten Klassifizierungsmerkmale zusammen:

**Analoge und digitale Signale** (Dauer Teil 1: 3:46; Teil 2: 3:28)

# Reelle Zahlenmengen

In den folgenden Kapiteln dieses Buches spielen komplexe Größen stets eine wichtige Rolle. Obwohl das Rechnen mit komplexen Zahlen bereits in der Schulmathematik behandelt und geübt wird, haben unsere Erfahrungen gezeigt, dass auch Studierende von naturwissenschaftlichen und technischen Fachgebieten damit durchaus Probleme haben. Deshalb werden am Ende dieses Grundlagenkapitels die Rechenregeln für komplexe Zahlen kurz zusammengefasst.

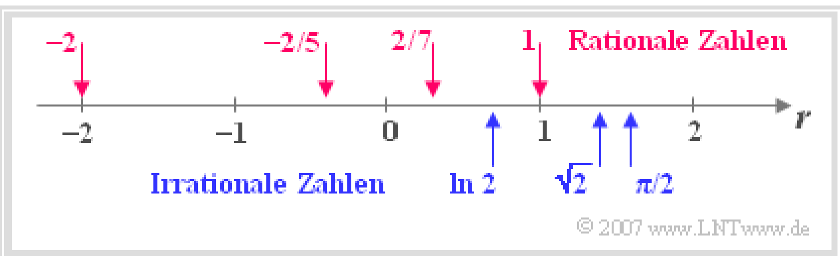
Vielleicht hängen diese Schwierigkeiten auch damit zusammen, dass „komplex" im Alltag oft als Synonym für „kompliziert" verwendet wird, während „reell" laut Duden für „zuverlässig, ehrlich und redlich" steht.

Zunächst folgen einige Anmerkungen über die reellen Zahlenmengen, für die im strengen mathematischen Sinne die Bezeichnung „Zahlenkörper" richtiger wäre. Hierzu gehören:

- **Natürliche Zahlen** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Mit diesen Zahlen sind die Rechenoperationen Addition, Multiplikation und „$x^y$" möglich. Das jeweilige Ergebnis ist wieder eine natürliche Zahl.
- **Ganze Zahlen** $\mathbb{Z} = \{... , –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, ...\}$. Diese Zahlenmenge ist eine Erweiterung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Die Einführung der Menge $\mathbb{Z}$ war notwendig, um die Ergebnismenge einer Substraktion zu erfassen, zum Beispiel $5 – 7 = –2$.
- **Rationale Zahlen** $\mathbb{Q} = \{z/n\}$ mit $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Mit dieser auch als Bruchzahlen bekannten Zahlenmenge liegt auch für jede Division ein definiertes Ergebnis vor. Schreibt man eine rationale Zahl in Dezimalschreibweise, so treten ab einer gewissen Dezimalstelle nur Nullen auf (zum Beispiel –2/5 = –0.400...) oder es sind Periodizitäten zu erkennen (Beispiel: 2/7 = 0.285714285...). Da der Divisor $n = 1$ erlaubt ist, sind die ganzen Zahlen eine Teilmenge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- **Irrationale Zahlen** $\backslash\mathbb{Q} \neq \{z/n\}$ mit $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Obwohl es unendlich viele rationale Zahlen gibt, verbleiben ebenfalls unendlich viele Zahlen, die nicht als Bruch dargestellt werden können. Beispiele hierfür sind die Zahl $\pi = 3.141592654....$ (wobei es auch bei mehr Dezimalstellen keine Perioden gibt) oder das Ergebnis der folgenden Gleichung:

  $$a^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{2} = \pm 1.414213562\ldots$$

  Auch diese Zahl ist irrational, was bereits **Euklid** in der Antike bewiesen hat.
- **Reelle Zahlen** $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \backslash\mathbb{Q}$. Die Gesamtheit aller rationalen und irrationalen Zahlen ergibt die Menge der reellen Zahlen. Diese können entsprechend ihren Zahlenwerten geordnet und auf dem so genannten Zahlenstrahl eingezeichnet werden.




Weitere Informationen zu dieser Thematik finden Sie im Internet, z.B. bei **mathe-online.**

# Imaginäre und komplexe Zahlen

Mit der Einführung der irrationalen Zahlen war die Lösung der Gleichung $a^2 - 2 = 0$ möglich, nicht jedoch von $a^2 + 1 = 0$. Der Mathematiker **Leonhard Euler** löste dieses Problem, indem er den Körper der reellen Zahlen um die imaginären Zahlen erweiterte. Er definierte dazu die imaginäre Einheit

$$\mathrm{j} = \sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{j}^2 = -1.$$

Anzumerken ist, dass Euler diese Größe mit „i” bezeichnet hat und dies auch heute noch in der Mathematik so üblich ist. In der Elektrotechnik hat sich dagegen die Bezeichnung „j” durchgesetzt, da „i” bereits mit dem zeitabhängigen Strom belegt ist.

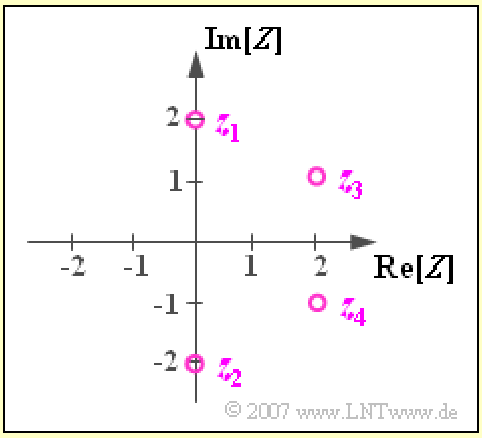
**Definition:** Die **komplexe Zahl** $z$ ist im allgemeinen die Summe einer reellen Zahl $x$ und einer imaginären Zahl $\mathrm{j} \cdot y$:

$$z = x + \mathrm{j} \cdot y.$$

$x$ und $y$ entstammen hierbei der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die Menge aller möglichen komplexen Zahlen bezeichnet man als den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Aus dem Zahlenstrahl der reellen Zahlen wird nun die komplexe Ebene, die durch zwei um 90° verdrehte Zahlenstränge für Real- und Imaginärteil aufgespannt wird.

**Beispiel:** Die komplexe Zahl $z_1 = 2\mathrm{j}$ ist eine der zwei möglichen Lösungen der Gleichung $z^2 + 4 = 0$. Eine andere Lösung ist $z_2 = -2\mathrm{j}$.




Dagegen geben $z_3 = 2 + \mathrm{j}$ und $z_4 = 2 - \mathrm{j}$ die beiden Lösungen zu folgender Gleichung an:

$$(z - 2 - \mathrm{j})(z - 2 + \mathrm{j}) = 0$$
$$\Rightarrow \quad z^2 - 4 \cdot z + 5 = 0.$$

Man bezeichnet $z_4 = z_3^*$ auch als die **Konjugiert-Komplexe** von $z_3$. Die Summe $z_3 + z_4$ ist rein reell:

$$z_3 + z_4 = 2 \cdot \mathrm{Re}[z_3] = 2 \cdot \mathrm{Re}[z_4].$$

*Anmerkung:* In der Fachliteratur werden komplexe Größen oftmals durch eine Unterstreichung gekennzeichnet. Darauf wird in den Büchern von *LNTwww* verzichtet.

# Darstellung nach Betrag und Phase

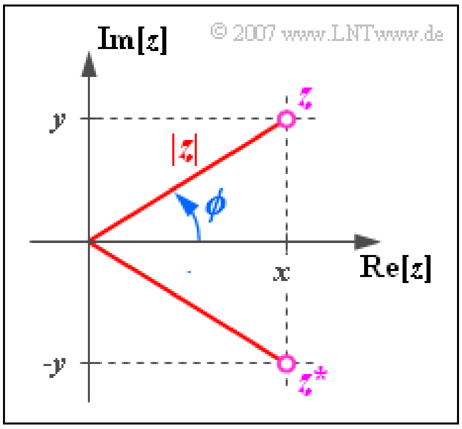
Eine komplexe Zahl $z$ kann außer durch den Realteil $x$ und den Imaginärteil $y$ auch durch ihren **Betrag** $|z|$ und die **Phase** $\phi$ beschrieben werden. Es gelten folgende Umrechnungen:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x},$$

$$x = |z| \cdot \cos(\phi), \quad y = |z| \cdot \sin(\phi).$$

Somit kann die komplexe Größe $z$ auch in folgender Form dargestellt werden:

$$z = |z| \cdot \cos(\phi) + \mathrm{j} \cdot |z| \cdot \sin(\phi) = |z| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \phi}.$$




Hier ist der **Satz von Euler** verwendet, der unten bewiesen wird. Dieser besagt, dass die komplexe Größe exp(j$\phi$) den Realteil cos($\phi$) und den Imaginärteil sin($\phi$) aufweist.

Weiter erkennt man aus der nebenstehenden Grafik, dass für die **Konjugiert-Komplexe** von $z = x + \mathrm{j} \cdot y$ gilt:

$$z^* = x - \mathrm{j} \cdot y = |z| \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j} \cdot \phi}.$$

Der **Beweis des Eulerschen Satzes** basiert auf dem Vergleich von Potenzreihenentwicklungen. Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion lautet:

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots .$$

Mit imaginärem Argument kann hierfür auch geschrieben werden:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = 1 + \mathrm{j} \cdot \frac{x}{1!} + \mathrm{j}^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + \mathrm{j}^3 \cdot \frac{x^3}{3!} + \mathrm{j}^4 \cdot \frac{x^4}{4!} + \ldots .$$

Berücksichtigt man $\mathrm{j}^2 = -1$, $\mathrm{j}^3 = -\mathrm{j}$, $\mathrm{j}^4 = 1$, $\mathrm{j}^5 = \mathrm{j}$, usw. und fasst die reellen und die imaginären Terme zusammen, so erhält man

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = A(x) + \mathrm{j} \cdot B(x), \qquad \text{wobei}$$

$$A(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ \ldots \ = \cos(x),$$

$$B(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \ldots \ = \sin(x).$$

Daraus folgt direkt der Satz von Euler:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \cos(x) + \mathrm{j} \cdot \sin(x).$$

q.e.d.

# Rechenregeln für komplexe Zahlen

Die Rechengesetze für zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = x_1 + \mathrm{j} \cdot y_1 = |z_1| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \phi_1}, \qquad z_2 = x_2 + \mathrm{j} \cdot y_2 = |z_2| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \phi_2}$$

sind derart definiert, dass sich für den Sonderfall eines verschwindenden Imaginärteils die Rechenregeln der reellen Zahlen ergeben. Man spricht vom so genannten **Permanenzprinzip**.

Für die Grundrechenarten gelten folgende Regeln:

- Die **Summe** zweier komplexer Zahlen (bzw. deren **Differenz**) wird gebildet, indem man ihre Real- und Imaginärteile addiert (bzw. subtrahiert):

$$z_3 = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{j} \cdot (y_1 + y_2),$$

$$z_4 = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{j} \cdot (y_1 - y_2).$$

- Das **Produkt** zweier komplexer Zahlen kann in der Realteil- und Imaginärteildarstellung durch Ausmultiplizieren unter Berücksichtigung von $\mathrm{j}^2 = -1$ gebildet werden. Einfacher gestaltet sich die Multiplikation allerdings, wenn $z_1$ und $z_2$ mit Betrag und Phase geschrieben werden:

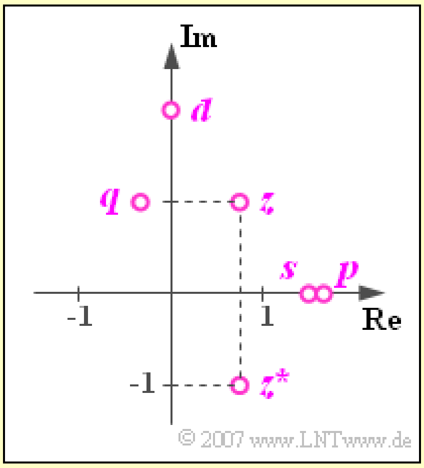
$$z_5 = z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + \mathrm{j} \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1),$$

$$z_5 = |z_1| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \phi_1} \cdot |z_2| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \phi_2} = |z_5| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \phi_5} \quad \Rightarrow \quad |z_5| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \phi_5 = \phi_1 + \phi_2.$$

- Die **Division** ist in der Exponentialschreibweise ebenfalls überschaubarer. Hier werden die beiden Beträge dividiert und die Phasen im Exponenten subtrahiert:

$$z_6 = \frac{z_1}{z_2} = |z_6| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \phi_6} \quad \Rightarrow \quad |z_6| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \phi_6 = \phi_1 - \phi_2.$$

**Beispiel:** Die komplexe Zahl $z = 0.75 + \mathrm{j} = 1.25 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot 53.1°}$ und deren Konjugiert-Komplexe $z^* = 0.75 - \mathrm{j} = 1.25 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j} \cdot 53.1°}$ sind in der Grafik als Punkte innerhalb der komplexen Ebene dargestellt, zusätzlich die Summe $s = z + z^* = 1.5$ (rein reell) und die Differenz $d = z - z^* = 2\mathrm{j}$ (rein imaginär).




Das Produkt $p = z \cdot z^* = 1.25^2 \approx 1.5625$ ist in diesem Fall ebenfalls rein reell, während der Quotient $q = z/z^* = \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot 106.2°}$ den Betrag 1 und den doppelten Phasenwinkel wie $z$ aufweist.

Die Thematik von Kapitel 1.3 wird auch in dem folgenden Lernvideo behandelt:

**Rechnen mit komplexen Zahlen** (Dauer 11:52)