

Überblick zu Kapitel 3

Im zweiten Kapitel wurden periodische Signale durch eine Reihe harmonischer Schwingungen („Fourierreihe“) beschrieben. Verringert man – zumindest gedanklich – die Wiederholffrequenz eines periodischen Signals immer mehr, das heißt, die Periodendauer wird immer länger, so kommt man vom periodischen Signal (*Puls*) zum einmaligen **aperiodischen Signal** – häufig auch als **Impuls** bezeichnet.

Im Folgenden werden solche aperiodischen, impulsförmigen Signale betrachtet und im Zeit- und Frequenzbereich mathematisch beschrieben. Das Kapitel beinhaltet im Einzelnen:

- die Herleitung der beiden *Fourierintegrale* aus der Fourierreihe,
- die Erweiterung des Fourierintegrals zur *Fouriertransformation* mittels Distributionen,
- einige *Sonderfälle* impulsartiger Signale wie Rechteck-, Gauß- und Diracimpuls,
- die *Gesetzmäßigkeiten* der Fouriertransformation, und schließlich
- die Bedeutung der *Faltungsoperation* und deren vielfältige Anwendungen.

Die Laplace- und die Hilberttransformation, die ausschließlich für kausale Signale bzw. Systeme anwendbar sind, werden erst im nächsten Buch „Lineare zeitinvariante Systeme“ behandelt.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 33 Bildschirmseiten mit Gleichungen, Bildern und Beispielen verdeutlicht. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel 51 Grafiken, neun Aufgaben und neun Zusatzaufgaben mit insgesamt 63 Teilaufgaben, zwei Lernvideos (LV) zu Kapitel 3.1 und Kapitel 3.3 und drei Interaktionsmodule (IM) zu Kapitel 3.2 und Kapitel 3.4, nämlich:

- **Kontinuierliche und diskrete Spektren** (LV zu Kap. 3.1, Dauer Teil 1: 6:20 – Teil 2: 5:15)
- **Zeitfunktion und zugehörige Spektralfunktion** (IM zu Kapitel 3.2)
- **Frequenzgang und zugehörige Impulsantwort** (IM zu Kapitel 3.2)
- **Gesetze der Fouriertransformation** (LV zu Kap. 3.3, Dauer Teil 1: 5:57 – Teil 2: 5:55)
- **Zur Verdeutlichung der grafischen Faltung** (IM zu Kapitel 3.4)

Literatur: [Ach95] – [Fli91] – [Föl77] – [GRS03] – [Han15] – [Hay83] – [KK10] – [Kro91] – [Küp74] – [Lük04] – [Mar94] – [Obe75] – [Schü91a] – [Schü91b] – [Sto15] – [Unb90]

Weitere Informationen zum Thema sowie Aufgaben, Simulationen und Programmierübungen finden Sie im Kapitel 6 des Praktikums *Simulationsmethoden in der Nachrichtentechnik* von Prof. Günter Söder. Diese LNT-Lehrveranstaltung (bis 2012) basierte auf den 24 DOS-Programmen des Lehrsoftwarepakets *LNTsim*.

- Kapitel 6: *Lineare zeitinvariante Systeme*, Programm *ft*

Hinweise zum Herunterladen des Programmpakets *LNTsim* und der Versuchsanleitung:

Lehrsoftwarepaket LNTsim (Zip-Version, mehr als 50 MB)

Praktikumsanleitung – Teil A (PDF-Version, ca. 8.5 MB)

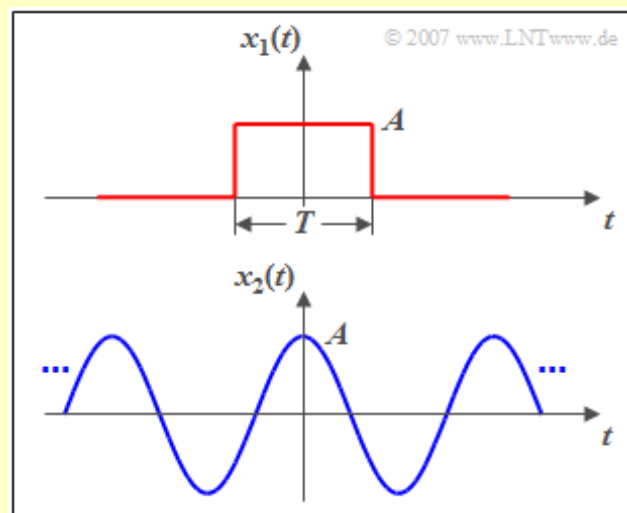
Eigenschaften aperiodischer Signale - Voraussetzungen

Im letzten Kapitel haben wir *periodische Signale* betrachtet. Das wesentliche Charakteristikum dieser Signale ist, dass für sie eine *Periodendauer* T_0 angegeben werden kann. Ist eine solche Periodendauer nicht angebar oder – was in der Praxis das gleiche ist – hat T_0 einen unendlich großen Wert, so spricht man von einem **aperiodischen Signal**.

Für das gesamte Kapitel 3 sollen folgende Voraussetzungen gelten:

- Die betrachteten Signale $x(t)$ sind *aperiodisch* und *energiebegrenzt*, das heißt, sie besitzen nur eine endliche Energie E_x und eine vernachlässigbar kleine (mittlere) Leistung P_x .
- Im Allgemeinen konzentriert sich die Energie dieser Signale auf einen relativ kurzen Zeitbereich, so dass man auch von *impulsförmigen* Signalen spricht.

Beispiel: Das folgende Bild zeigt einen Rechteckimpuls $x_1(t)$ mit Amplitude A und Dauer T als Beispiel eines aperiodischen und zeitlich begrenzten Signals. Dieser besitzt eine endliche Signalenergie ($E_1 = A^2 \cdot T$) und die Leistung $P_1 = 0$.



Ein leistungsbegrenzt Signal, z. B. das unten dargestellte Cosinussignal $x_2(t)$, besitzt dagegen

- stets eine endliche Leistung ($P_2 = A^2/2$), und
- eine unendlich große Signalenergie ($E_2 \rightarrow \infty$).

Genauere Betrachtung der Fourierkoeffizienten (1)

Wir gehen von einem periodischen Signal $x_P(t)$ mit der Periodendauer T_0 aus, das entsprechend den Ausführungen im Kapitel 2.4 als (komplexe) Fourierreihe dargestellt werden kann:

$$x_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot e^{j2\pi n t / T_0}.$$

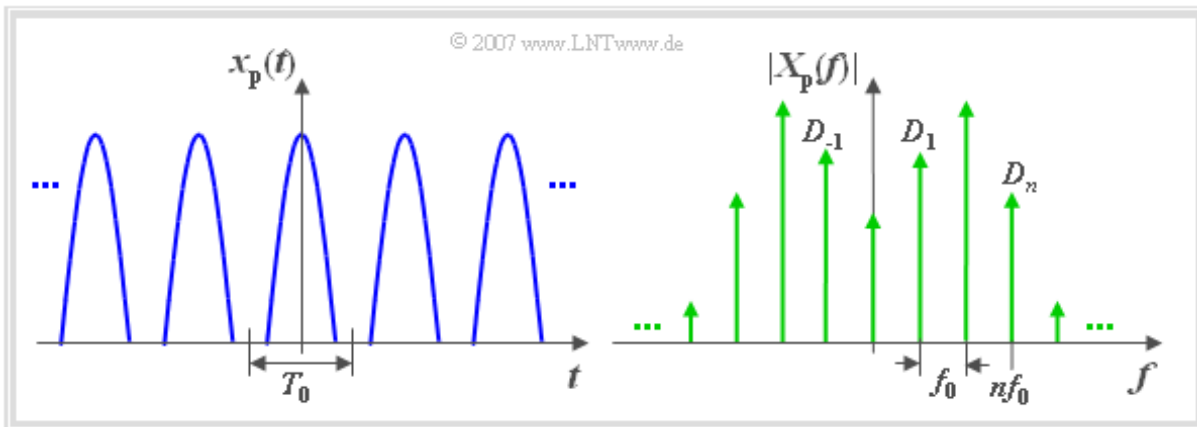
Die Fourierkoeffizienten sind im Allgemeinen komplex, und es gilt $D_{-n} = D_n^*$:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x_P(t) \cdot e^{-j2\pi n t / T_0} dt.$$

Wie bereits im **Kapitel 2.4** gezeigt wurde, ist die dazugehörige Spektralfunktion $X_P(f)$ ein so genanntes *Linienspektrum* mit Spektrallinien im Abstand $f_0 = 1/T_0$:

$$X_P(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot \delta(f - n \cdot f_0).$$

Das Bild zeigt links das periodische Zeitsignal und rechts das zugehörige Betragsspektrum.



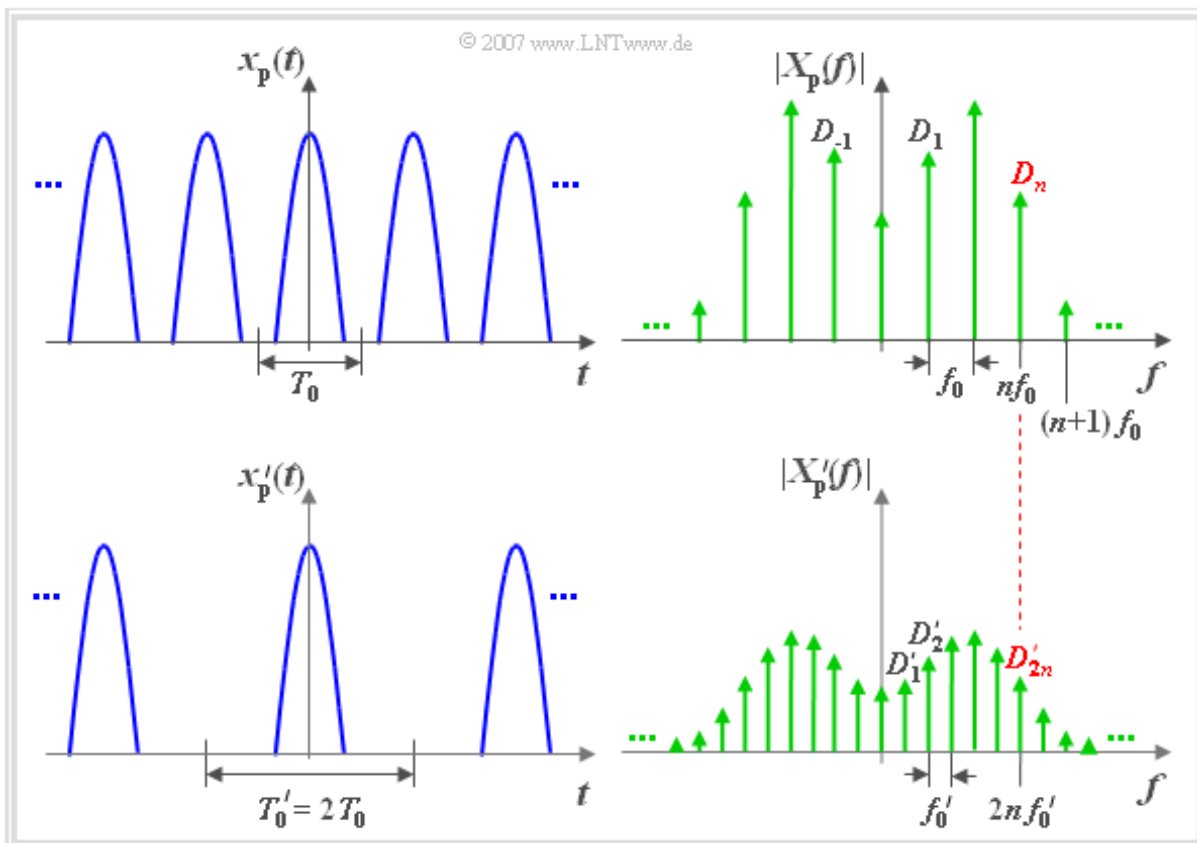
Anzumerken ist, dass es sich hierbei lediglich um eine schematische Skizze handelt. Ist $x_P(t)$ eine reelle und gerade Funktion, so ist $X_P(f)$ ebenfalls reell und gerade. Die Gleichung $X_P(f) = |X_P(f)|$ gilt allerdings nur dann, wenn alle Spektrallinien zudem auch positiv sind.

Genauere Betrachtung der Fourierkoeffizienten (2)

Im unteren Bild ist ein weiteres periodisches Signal $x_P'(t)$ mit doppelter Periodendauer $T_0' = 2 \cdot T_0$ dargestellt. Bezüglich dieses Signals gilt:

$$x_P'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n' \cdot e^{j2\pi n t / T_0'} \quad \text{mit} \quad D_n' = \frac{1}{T_0'} \cdot \int_{-T_0'/2}^{+T_0'/2} x_P'(t) \cdot e^{-j2\pi n t / T_0'} dt.$$

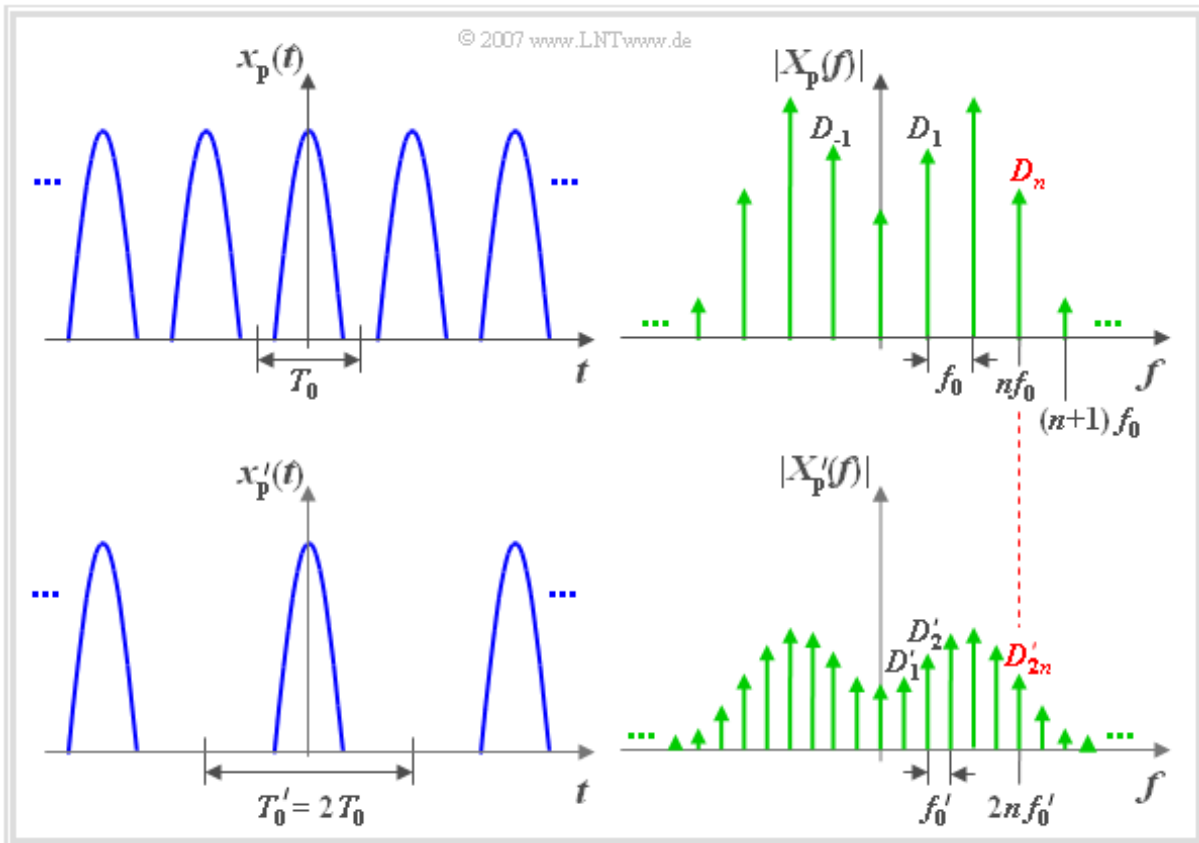
Im Bereich von $-T_0/2$ bis $+T_0/2$ sind die beiden Signale identisch.



Betrachten wir auch hier die Spektralfunktion $X_P'(f)$:

- Aufgrund der doppelten Periodendauer ($T_0' = 2 \cdot T_0$) liegen nun die Spektrallinien enger beisammen ($f_0' = f_0/2$).
- Die beiden Koeffizienten D_n und D_{2n}' – im Bild rot hervorgehoben – gehören zur gleichen physikalischen Frequenz $f = n \cdot f_0 = 2n \cdot f_0'$.

Genauere Betrachtung der Fourierkoeffizienten (3)



Durch Analyse der Koeffizienten

$$D_{2n}' = \frac{1}{T_0'} \cdot \int_{-T_0'/2}^{+T_0'/2} x_p'(t) \cdot e^{-j2\pi n t / T_0'} dt$$

erkennen wir:

- Zwischen $T_0/2$ und $T_0'/2$ ist $x_p'(t)$ identisch 0, ebenso im dazu symmetrischen Intervall bei negativen Zeiten. Deshalb können die Integrationsgrenzen auf $\pm T_0/2$ eingeschränkt werden.
- Innerhalb der neuen Integrationsgrenzen kann $x_p'(t)$ durch $x_p(t)$ ersetzt werden.

Setzen wir nun in obiger Gleichung noch $T_0' = 2T_0$, so erhalten wir:

$$D_{2n}' = \frac{1}{2T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x_p(t) \cdot e^{-j2\pi n t / T_0} dt = \frac{D_n}{2}.$$

Fassen wir dieses Ergebnis kurz zusammen:

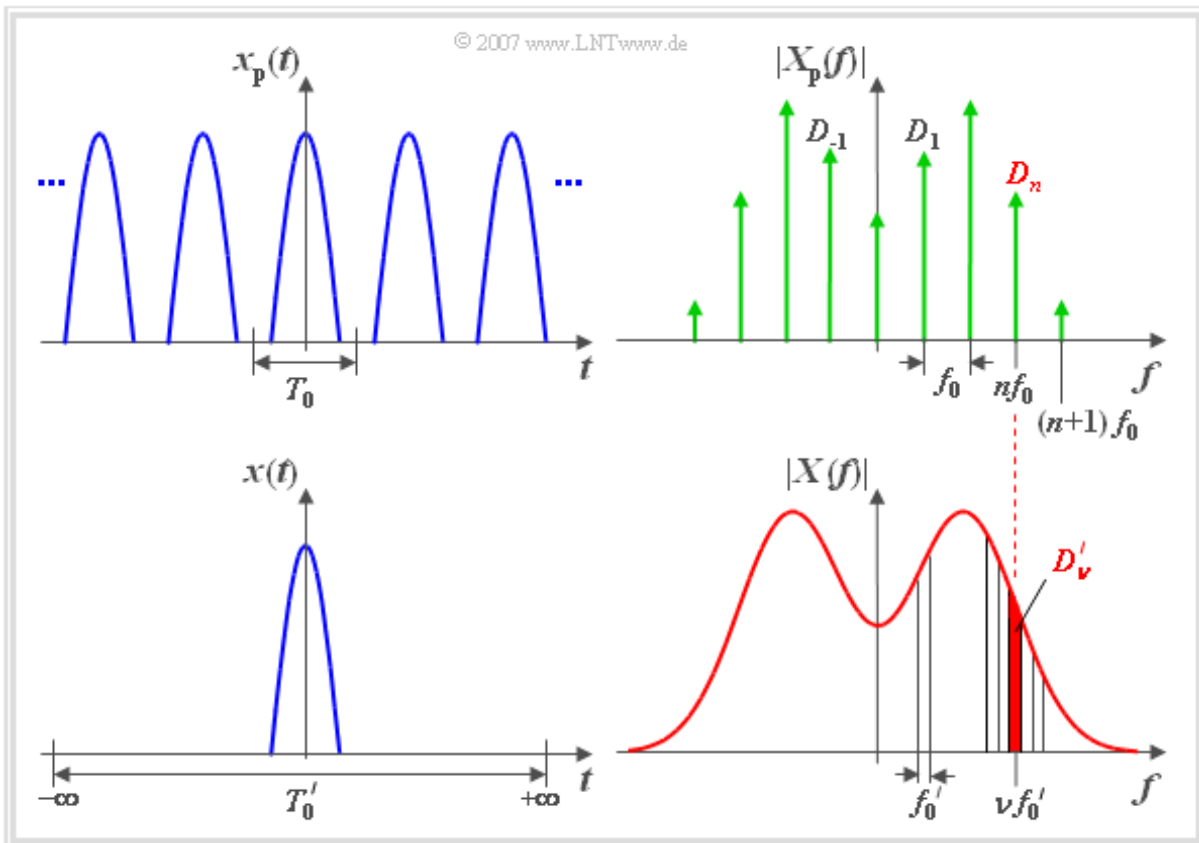
- Die Spektrallinie des Signals $x_p'(t)$ bei der Frequenz $f = n \cdot f_0'$ wird mit D_{2n}' bezeichnet (untere Grafik). Diese Linie ist genau halb so groß wie die Spektrallinie D_n des Signals $x_p(t)$ bei der gleichen physikalischen Frequenz f (obere Grafik).
- Die Spektralfunktion $X_p'(f)$ weist gegenüber $X_p(f)$ zusätzliche Spektrallinien bei $(n+1/2) \cdot f_0$ auf. Diese führen dazu, dass im Zeitbereich jeder zweite Impuls von $x_p(t)$ um $n \cdot T_0$ gelegen (n ungeradzahlig) ausgelöscht wird.

Vom periodischen zum aperiodischen Signal

Greifen wir nun die Überlegungen der vorherigen Seite auf und wählen die Periodendauer T_0' von $x_p'(t)$ allgemein um einen ganzzahligen Faktor k größer als die Periodendauer T_0 von $x_p(t)$. Dann können die bisherigen Aussagen verallgemeinert werden:

- Der Linienabstand ist bei $X_p'(f)$ um den Faktor k geringer als beim Spektrum $X_p(f)$.
- Um diesen Sachverhalt hervorzuheben, bezeichnen wir die Frequenz-Laufvariable der Funktion $X_p'(f)$ mit ν anstelle von n . Es gilt: $\nu = k \cdot n$.
- Für die Spektrallinie des Signals $x_p'(t)$ bei der Frequenz $f = n \cdot f_0 = \nu \cdot f_0'$ gilt:

$$D_{\nu}' = \frac{1}{k} \cdot D_n, \quad \text{wobei} \quad \nu = k \cdot n.$$



Wählt man nun – wie im Bild schematisch dargestellt – den Faktor k und damit die Periodendauer T_0' immer größer und lässt sie schließlich nach unendlich gehen, so

- geht das periodische Signal $x_p(t)$ in das aperiodische Signal $x(t)$ über,
- kann man das Linienspektrum $X_p(f)$ durch das kontinuierliche Spektrum $X(f)$ ersetzen.

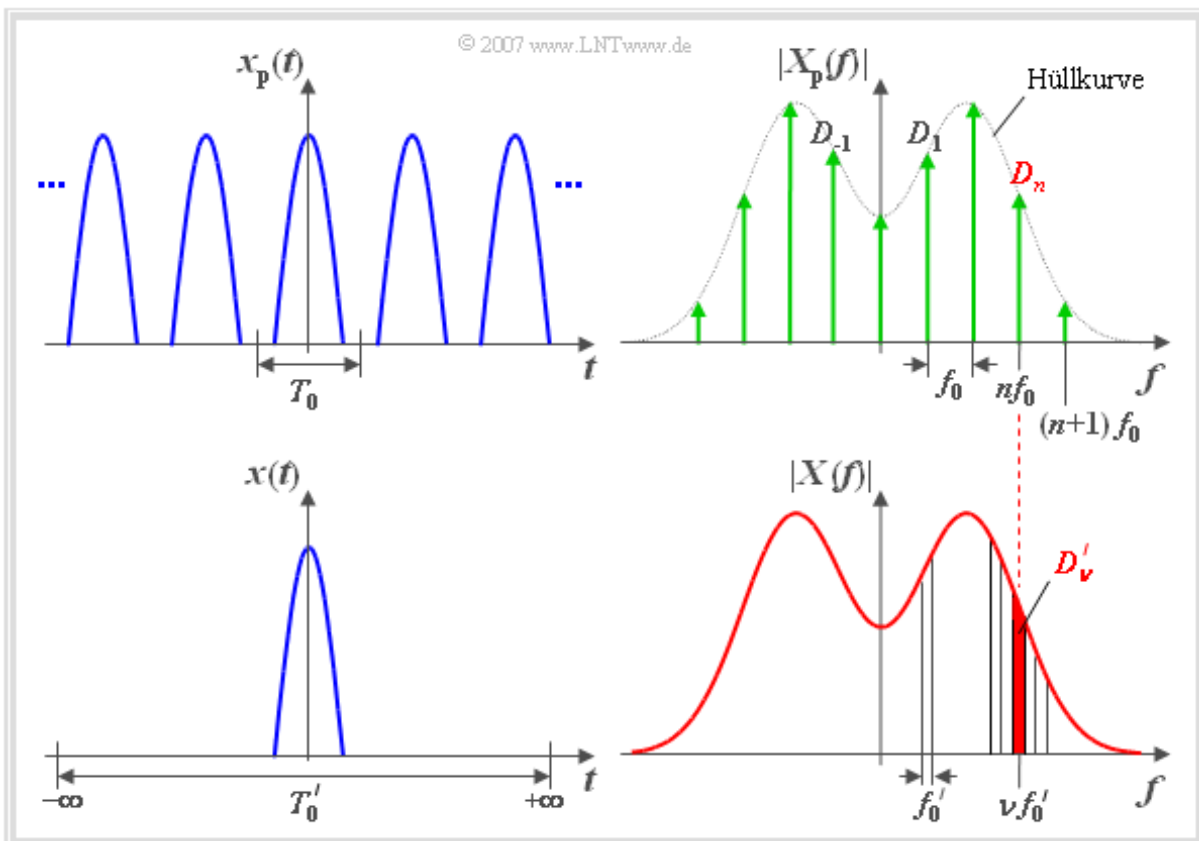
Das erste Fourierintegral (1)

Bezüglich den Spektralfunktion $X_p(f)$ und $X(f)$ lassen sich somit folgende Aussagen machen:

- Die einzelnen Spektrallinien liegen nun beliebig eng beieinander ($f_0' = 1/T_0' \rightarrow 0$).
- In der Spektralfunktion $X(f)$ treten nun innerhalb bestimmter Intervalle alle möglichen (nicht nur diskrete) Frequenzen auf, $X(f)$ stellt also kein Linienspektrum mehr dar.
- Der Beitrag einer jeden einzelnen Frequenz f zum Signal ist nur verschwindend gering ($k \rightarrow \infty, D_v' \rightarrow 0$). Aufgrund der unendlich vielen Frequenzen ergibt sich jedoch insgesamt ein endliches Resultat.
- Anstatt die Fourierkoeffizienten D_v' zu berechnen, wird nun stattdessen eine spektrale Dichte $X(f)$ ermittelt. Bei der Frequenz $f = \nu \cdot f_0'$ gilt dann:

$$X(f = \nu f_0') = \lim_{f_0' \rightarrow 0} (D_{\nu}' / f_0') = \lim_{T_0' \rightarrow \infty} (D_{\nu}' \cdot T_0').$$

- Die Spektralfunktion (Dichte) $X(f)$ des aperiodischen Signals $x(t)$ ist im Spektrum $X_p(f)$ des vergleichbaren periodischen Signals $x_p(t)$ als Einhüllende erkennbar (siehe Grafiken).
- In der unteren Grafik entspricht D_{ν}' der rot hinterlegten Fläche des Frequenzintervalls um $\nu \cdot f_0'$ mit der Breite f_0' .



Das erste Fourierintegral (2)

Verwendet man die auf der letzten Seite angegebenen Gleichungen, so erhält man:

$$X(f = \nu \cdot f_0') = \lim_{T_0' \rightarrow \infty} \int_{-T_0'/2}^{T_0'/2} x_P(t) \cdot e^{-j2\pi\nu f_0' t} dt.$$

Durch den gemeinsamen Grenzübergang ($T_0' \rightarrow \infty, f_0' \rightarrow 0$) wird nun

- aus dem periodischen Signal $x_P(t)$ das aperiodische Signal $x(t)$, und
- aus der diskreten Frequenz $\nu \cdot f_0'$ die kontinuierliche Frequenzvariable f .

Damit erhält man eine fundamentale Definition, welche die Berechnung der Spektralfunktion einer aperiodischen Zeitfunktion ermöglicht. Der Name dieser Spektraltransformation geht auf den französischen Physiker **Jean-Baptiste-Joseph Fourier** zurück.

Definition: Die **Spektralfunktion** (oder kurz: das Spektrum) eines aperiodischen und gleichzeitig energiebegrenzten Signals $x(t)$ ist wie folgt zu berechnen:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \Rightarrow \text{Erstes Fourierintegral.}$$

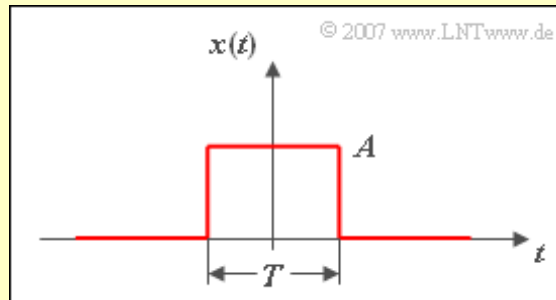
Das nachfolgende Lernvideo soll Ihnen die Aussagen der letzten Seiten nochmals verdeutlichen:

Unterschiede und Gemeinsamkeiten von kontinuierlichen und diskreten Spektren

(Dauer Teil 1: 6:20 – Teil 2: 5:15)

Beispiel zum ersten Fourierintegral

Beispiel: Gegeben ist der skizzierte Zeitverlauf $x(t)$. Gesucht ist das zugehörige Spektrum $X(f)$.



Wir wenden dazu das erste Fourierintegral an. Aus obiger Darstellung ist zu erkennen, dass das Signal $x(t)$ für $|t| > T/2$ gleich 0 ist. Das bedeutet, dass das Integrationsintervall auf den Bereich $\pm T/2$ begrenzt werden kann. Damit erhält man den Ansatz:

$$\begin{aligned} X(f) &= A \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{-j2\pi f} \left[e^{-j2\pi ft} \right]_{-T/2}^{+T/2} \\ &= \frac{A}{-j2\pi f} [\cos(\pi fT) - j \cdot \sin(\pi fT) - \cos(\pi fT) - j \cdot \sin(\pi fT)] . \\ \Rightarrow X(f) &= A \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} . \end{aligned}$$

Erweitert man Zähler und Nenner mit T , so erhält man:

$$X(f) = A \cdot T \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = A \cdot T \cdot \text{si}(\pi fT).$$

Die Funktion $\text{si}(x) = \sin(x)/x$ wird auf der Seite **Rechteckimpuls** im Kapitel 3.2 noch eingehend analysiert. Man nennt sie *si-Funktion* oder auch *Spaltfunktion*.

Betrachten wir noch die Einheiten der beiden Funktionen im Zeit- und Frequenzbereich:

- Ist $x(t)$ beispielsweise eine Spannung, so hat die Impulsamplitude A die Einheit „Volt“.
- Die Dimension der Größe T ist häufig die Zeit, z. B. mit der Einheit „Sekunde“.
- Der Kehrwert der Zeit entspricht der Frequenz mit der Einheit „Hertz“.
- Das Argument $f \cdot T$ ist dimensionslos.
- Die Spektralfunktion hat somit beispielsweise die Einheit „V/Hz“.

Fouriertransformation (1)

Das Spektrum $X(f)$ eines Signals $x(t)$ lautet gemäß dem „Ersten Fourierintegral“:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt.$$

Wie auf der letzten Seite an einem einfachen Beispiel gezeigt wurde, ist dieses Integral bei einem energiebegrenzten Signal $x(t)$ problemlos lösbar.

Bei nicht energiebegrenzten Signalen, zum Beispiel

- einem Gleichsignal (vgl. Kapitel 2.2),
- einer harmonischen Schwingung (vgl. Kapitel 2.3),
- einem anklingenden Signal,

divergiert aber das Fourierintegral. Unter Einbeziehung einer beidseitig abfallenden Hilfsfunktion $\varepsilon(t)$ kann allerdings die Konvergenz erzwungen werden:

$$X(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-\varepsilon|t|} \cdot e^{-j2\pi ft} dt.$$

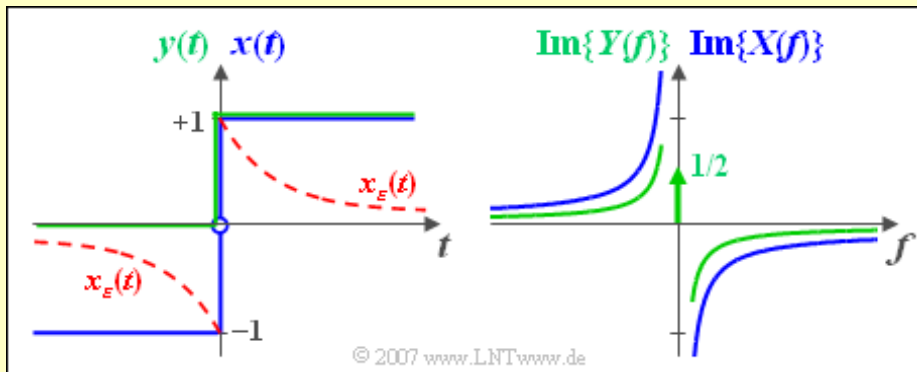
Solche nicht energiebegrenzten Signale führen im Spektrum zu **Diracfunktionen**, manchmal auch „Distributionen“ genannt. Man bezeichnet diesen allgemeinen Funktionalzusammenhang $X(f) = F[x(t)]$ als **Fouriertransformation** und verwendet hierfür die Kurzschreibweise:

$$X(f) \bullet \text{---} \circ x(t).$$

Bei einem anklingenden Signal wird die Konvergenz allerdings nur dann erreicht, solange die Zeitfunktion weniger als exponentiell ansteigt.

Fouriertransformation (2)

Beispiel: Wir betrachten eine akausale Sprungfunktion $x(t) = \text{sign}(t)$ mit $x(t) = -1$ für negative sowie $x(t) = +1$ für positive Zeiten. Dieses Signal ist in nachfolgender Skizze links in blauer Farbe dargestellt.



Da das Signal $x(t)$ nach beiden Seiten bis ins Unendliche reicht, muss zur Berechnung der Fouriertransformierten für beide Abschnitte zunächst ein geeigneter Konvergenzfaktor $\exp(-\varepsilon|t|)$ hinzugefügt werden (es gelte $\varepsilon > 0$). Die resultierende Zeitfunktion lautet dann:

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} e^{-\varepsilon t} & \text{für } t > 0, \\ -e^{\varepsilon t} & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Ähnlich wie auf der Seite **Diracfunktion** ergibt sich für die zugehörige Spektralfunktion

$$X_\varepsilon(f) = \frac{1}{\varepsilon + j2\pi f} - \frac{1}{\varepsilon - j2\pi f} = \frac{-j4\pi f}{\varepsilon^2 + (2\pi f)^2}.$$

Eigentlich interessieren wir uns aber für das Spektrum der Sprungfunktion. Für diese gilt:

$$x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t).$$

Deshalb ist auch die Spektralfunktion $X(f) = F[x(t)]$ als Grenzwert von $X_\varepsilon(f)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ zu bestimmen:

$$X(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon(f) = \frac{-j}{\pi f} = \frac{1}{j\pi f}.$$

In der rechten Grafik ist die rein imaginäre Spektralfunktion $X(f)$ als blaue Kurve dargestellt. Man erkennt, dass mit zunehmender Frequenz $|X(f)|$ kontinuierlich abnimmt.

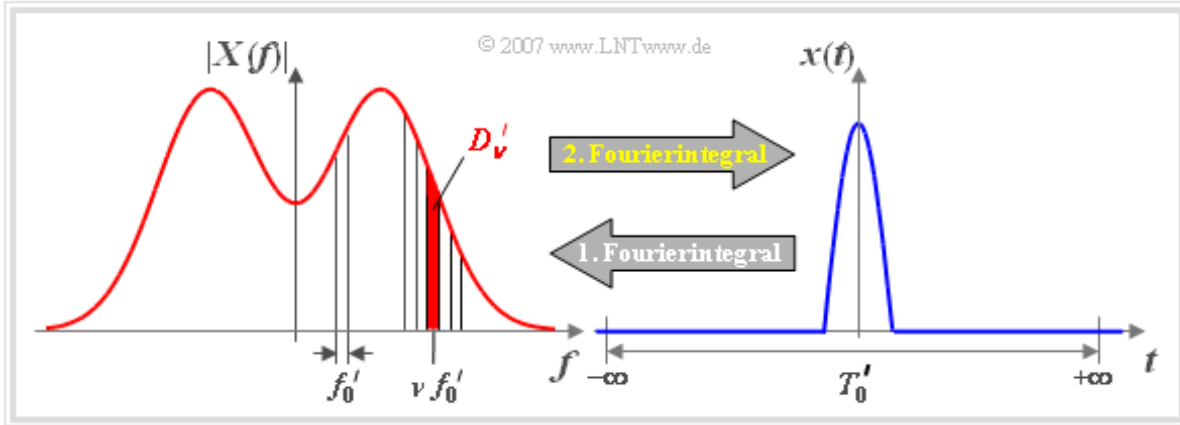
Der grüne Kurvenzug in der linken Grafik zeigt das Signal $y(t)$, das sich von $x(t)$ nur bei den negativen Zeiten unterscheidet. In diesem Bereich gilt $y(t) = 0$. Die zugehörige Spektralfunktion $Y(f)$ ist im gesamten Bereich nur halb so groß wie $X(f)$. Dies zeigt die nachfolgende Rechnung:

$$Y(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon + j2\pi f} = \frac{1}{j2\pi f}.$$

Zudem ergibt sich auf Grund des Gleichanteils nun noch eine Diracfunktion bei $f = 0$ mit dem Gewicht $1/2$. Hierauf wird im Beispiel zum Abschnitt **Zuordnungssatz** (Kapitel 3.3) noch im Detail eingegangen.

Das zweite Fourierintegral

Bisher haben wir lediglich gezeigt, wie man für ein aperiodisches, impulsförmiges Signal $x(t)$ die zugehörige Spektralfunktion $X(f)$ berechnet. Nun wenden wir uns der umgekehrten Aufgabe zu, aus der Spektralfunktion $X(f)$ die Zeitfunktion $x(t)$ zu ermitteln.



Mit den gleichen Bezeichnungen wie auf den ersten Seiten dieses Kapitels kann man das Signal $x(t)$ als Fourierreihe schreiben, wobei nun der Grenzübergang $f_0' \rightarrow 0$ zu berücksichtigen ist:

$$x(t) = \lim_{f_0' \rightarrow 0} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} D_{\nu}' \cdot e^{j2\pi\nu f_0' t}.$$

Erweitert man nun sowohl den Zähler als auch den Nenner um f_0' , so erhält man:

$$x(t) = \lim_{f_0' \rightarrow 0} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (D_{\nu}' / f_0') \cdot e^{j2\pi\nu f_0' t} \cdot f_0'.$$

Der Grenzübergang $f_0' \rightarrow 0$ hat nun folgende Auswirkungen:

- Die (unendliche) Summe wird zu einem Integral, wobei f_0' formal durch die differentielle Größe df (Integrationsvariable) zu ersetzen ist.
- Die Größe $\nu \cdot f_0'$ im Exponenten beschreibt die physikalische Frequenz f .
- Der Quotient D_{ν}' / f_0' ergibt die Spektralfunktion $X(f)$ bei der Frequenz f .

Unter Berücksichtigung dieser Eigenschaften kommt man zum *zweiten Fourierintegral*.

Definition: Ist die Spektralfunktion $X(f)$ eines aperiodischen und energiebegrenzten Signals gegeben, so lautet die dazugehörige **Zeitfunktion**:

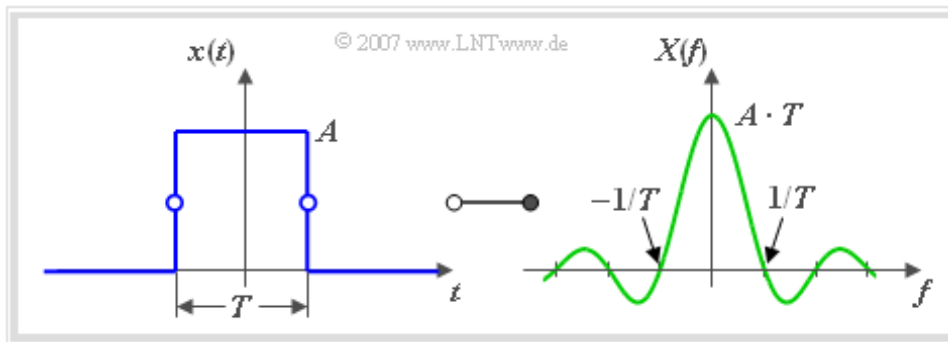
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} df \quad \Rightarrow \quad \text{Zweites Fourierintegral.}$$

Rechteckimpuls

Man spricht von einem **Rechteckimpuls**, wenn für die Zeitfunktion gilt:

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{für } |t| < T/2, \\ A/2 & \text{für } |t| = T/2, \\ 0 & \text{für } |t| > T/2. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet A die Impulsamplitude und T die Impulsdauer.



Die dazugehörige Spektralfunktion $X(f)$ erhält man durch Anwendung des ersten Fourierintegrals:

$$X(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} A \cdot e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2\pi ft) dt - j \cdot A \int_{-T/2}^{+T/2} \sin(2\pi ft) dt.$$

Hierbei berücksichtigen die Integrationsgrenzen $\pm T/2$, dass $x(t)$ ausserhalb des Intervalls von $-T/2$ bis $+T/2$ identisch 0 ist. Das zweite Integral verschwindet aufgrund des ungeraden Integranden und man erhält:

$$X(f) = \frac{A \cdot \sin(\pi fT)}{\pi f}.$$

Definition: Zur Abkürzung definieren wir nachfolgende Funktion und bezeichnen diese als **si-Funktion** oder auch als **Spaltfunktion**:

$$\text{si}(x) = \sin(x)/x.$$

Durch eine Erweiterung von Zähler und Nenner jeweils mit T kann man für die **Spektralfunktion** des Rechteckimpulses auch schreiben:

$$X(f) = A \cdot T \cdot \text{si}(\pi fT).$$

Wie die obere Grafik zeigt, besitzt $X(f)$ folgende Eigenschaften:

- Das Maximum liegt bei der Frequenz $f = 0$ und hat den Wert $A \cdot T$ (Fläche des Rechtecks).
- Bei den Frequenzen $f_n = n/T$ mit $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ besitzt das Spektrum Nullstellen:

$$X(f = f_n) = 0.$$

- Für das Betragsspektrum gilt folgende Schranke:

$$|X(f)| \leq \frac{A}{\pi \cdot |f|}.$$

Gaußimpuls (1)

Ein weiteres Beispiel eines aperiodischen Signals ist der **Gaußimpuls** mit dem Zeitverlauf

$$x(t) = A \cdot e^{-\pi(t/\Delta t)^2}.$$

Dieser Impuls wird durch zwei Parameter beschrieben, nämlich durch

- die Impulsamplitude A und
- die äquivalente Impulsdauer Δt .

Definition: Die Dauer eines Rechteckimpulses mit gleicher Amplitude und Fläche wie das gegebene impulsförmige Signal $x(t)$ bezeichnet man allgemein als **äquivalente Impulsdauer**:

$$\Delta t = \frac{1}{A} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt.$$

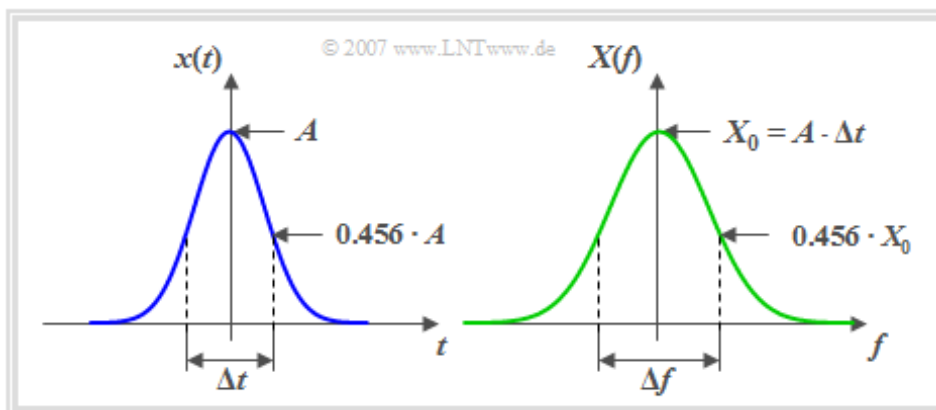
Der Gaußimpuls $x(t)$ weist folgende Eigenschaften auf (siehe Grafik am Seitenende):

- Die Zeitfunktion ist für alle Zeiten von $-\infty$ bis $+\infty$ existent und positiv. Das bedeutet gleichzeitig: Die absolute Impulsdauer ist unendlich groß.
- Das Impulsmaximum A liegt bei $t = 0$.
- Bei $t = \pm\Delta t/2$ ist der Impuls auf $e^{-\pi/4} \approx 0,456$ des Impulsmaximums abgeklungen, und bei $t = \pm 2\Delta t$ ist die Signalamplitude bereits kleiner als $0,0000035 \cdot A$.
- Die Spektralfunktion ist ebenfalls gaußförmig:

$$X(f) = A \cdot \Delta t \cdot e^{-\pi(f \cdot \Delta t)^2}.$$

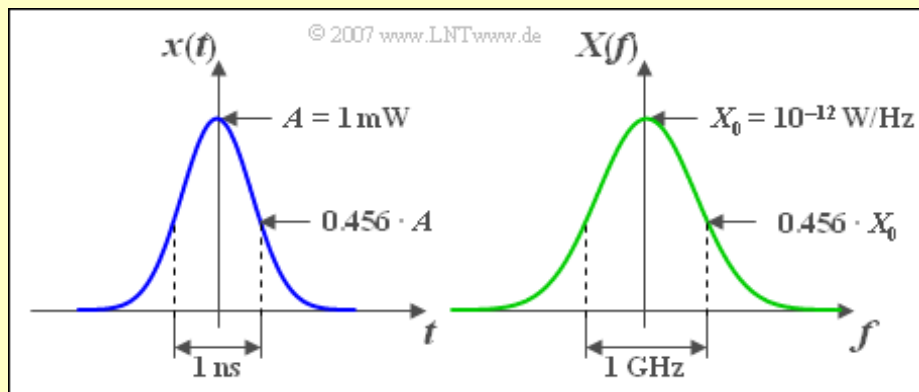
- Das Spektrum $X(f)$ hat sinngemäß gleiche Eigenschaften wie der gaußförmige Impuls $x(t)$. Auf der Seite **Reziprozitätsgesetz** im Kapitel 3.3 wird auf die Analogien von Zeitbereich und Frequenzbereich des Gaußimpulses nochmals gesondert eingegangen.

Die Grafik verdeutlicht Gemeinsamkeiten/Unterschiede zwischen $x(t)$ und $X(f)$ beim Gaußimpuls.



Gaußimpuls (2)

Beispiel: Der Ausgangsleistungsimpuls $x(t)$ eines Lasers für die digitale optische Übertragung kann im äquivalenten Tiefpassbereich mit guter Näherung als gaußförmig angenommen werden.



Mit den Signalparametern $A = 1$ Milliwatt, $\Delta t = 1$ Nanosekunde erhält man im Spektralbereich die vergleichbaren Kenngrößen $X_0 = X(f = 0) = A \cdot \Delta t = 10^{-12}$ W/Hz (Maximum) sowie die äquivalente Bandbreite $\Delta f = 1/\Delta t = 1$ GHz. Theoretisch erstreckt sich das Frequenzband absolut bis ins Unendliche. Allerdings ist bei $f = 2 \cdot \Delta f = 2$ GHz die Spektralfunktion gegenüber ihrem Maximum schon um den Faktor $3.5 \cdot 10^{-6}$ abgeklungen.

Wir möchten Sie auf zwei Interaktionsmodule zu dieser Thematik aufmerksam machen:

- **Zeitfunktion und zugehörige Spektralfunktion**
- **Frequenzgang und zugehörige Impulsantwort**

Mit diesen Modulen können Sie sich die folgenden Zeit- und Frequenzbereichsdarstellungen parametrisiert anzeigen lassen:

- Gaußimpuls,
- Rechteckimpuls,
- Dreieckimpuls,
- Trapezimpuls,
- Cosinus-Rolloff-Impuls.

Ebenso ist die Darstellung der so genannten „dualen Korrespondenzen“ möglich.

Diracimpuls (1)

Im Kapitel 2 wurde die **Diracfunktion** zur Beschreibung des Spektrums eines Gleichsignals oder einer harmonischen Schwingung verwendet. In der Nachrichtentechnik ist es aber auch üblich und äußerst vorteilhaft, kurzfristige impulsartige Vorgänge mit Hilfe dieser mathematischen Funktion im Zeitbereich zu beschreiben und zu analysieren.

Man bezeichnet als **Diracimpuls** den Zeitverlauf

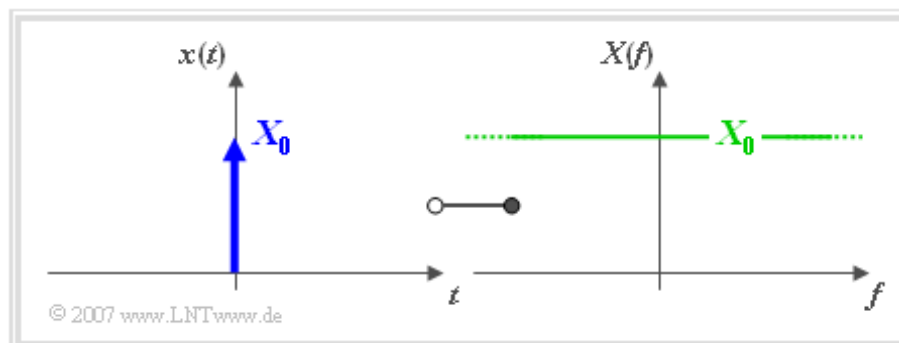
$$x(t) = X_0 \cdot \delta(t),$$

der wie folgt charakterisiert werden kann (siehe Skizze):

- Der Diracimpuls ist unendlich schmal, das heißt, es ist $x(t) = 0$ für $t \neq 0$.
- Der Diracimpuls ist zum Zeitpunkt $t = 0$ unendlich hoch.
- Beschreibt $x(t)$ einen Spannungsverlauf, so hat dessen Impulsgewicht X_0 die Einheit „Vs“ (also die Einheit „V/Hz“ einer Spektralfunktion), da $\delta(t)$ selbst die Einheit „1/s“ besitzt.
- Die Spektralfunktion des Diracimpulses beinhaltet alle Frequenzen gleichermaßen:

$$X(f) = X_0 \quad \text{für alle Frequenzen } f.$$

Die Grafik verdeutlicht diese Zusammenhänge beim Diracimpuls.

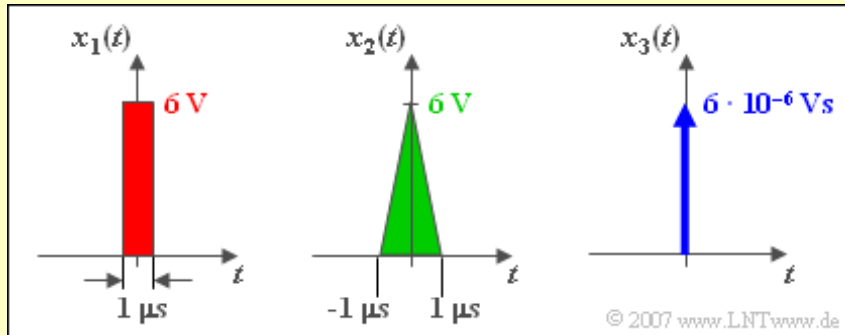


Die hier genannten Eigenschaften sind in einem Lernvideo zusammenfassend dargestellt:

Herleitung und Visualisierung der Diracfunktion (Dauer 2:50)

Diracimpuls (2)

Beispiel: Wir betrachten ein elektrisches Netzwerk mit ausgeprägter Tiefpasscharakteristik, z. B. mit der sehr niedrigen Grenzfrequenz $f_G = 10 \text{ kHz}$. Dessen Ausgangssignal ändert sich (nahezu) nicht, wenn eines der nachfolgenden Signale an den Eingang angelegt wird:



Diese Grafik kann wie folgt interpretiert werden:

- Da bei $x_1(t)$ und $x_2(t)$ die äquivalenten Impulsdauern jeweils gleich sind ($\Delta t = 1 \mu\text{s}$) und diese sehr viel kleiner ist als $1/f_G = 100 \mu\text{s}$, hat die tatsächliche Impulsform (Rechteck oder Dreieck) keinen oder nur einen untergeordneten Einfluss auf das Ausgangssignal.
- Deshalb können beide Eingangsimpulse – sowohl das Rechteck $x_1(t)$ als auch das Dreieck $x_2(t)$ – durch den Diracimpuls $x_3(t)$ angenähert werden, dessen Impulsfläche identisch mit den Impulsflächen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ist: $X_0 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}$. Bei einer Grenzfrequenz $f_G = 10 \text{ MHz}$ wäre diese vereinfachende Näherung dagegen nicht erlaubt.
- Auch wenn der Diracimpuls gleich hoch wie die beiden anderen Impulse gezeichnet ist, so hat er zum Zeitpunkt $t = 0$ trotzdem einen unendlich großen Wert. Beim Diracimpuls ist immer die Impulsfläche („Impulsgewicht“) angegeben. Diese unterscheidet sich gegenüber den anderen Impulsamplituden bereits in der Einheit („Vs“ anstelle von „V“).

Multiplikation mit konstantem Faktor - Additionssatz

In diesem Abschnitt sind die **Gesetzmäßigkeiten der Fouriertransformation** zusammengestellt. Diese können beispielsweise dazu genutzt werden, um mit möglichst geringem Rechenaufwand aus bereits bekannten Transformationen

$$x(t) \circ \bullet X(f), \quad x_1(t) \circ \bullet X_1(f), \quad x_2(t) \circ \bullet X_2(f)$$

neue Funktionszusammenhänge abzuleiten. Wir beschränken uns hier auf reelle Zeitfunktionen.

Satz: Ein **konstanter Faktor** k wirkt sich auf die Zeit- und die Spektralfunktion in gleicher Weise aus:

$$k \cdot x(t) \circ \bullet k \cdot X(f).$$

Diesen Zusammenhang kann man zum Beispiel zur Vereinfachung nutzen, indem man die Konstante k (die sowohl ein Verstärkungs- oder ein Einheitenfaktor sein kann) zunächst weglässt und erst später dem Ergebnis wieder hinzufügt.

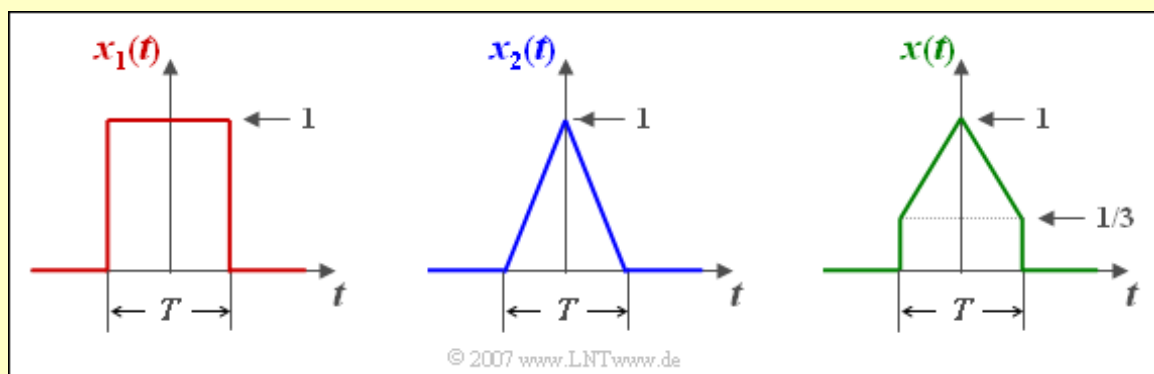
Obiger Satz folgt unmittelbar aus der Definition des ersten Fourierintegrals, ebenso wie der Additionssatz, der die Grundlage für das so genannte **Superpositionsprinzip** darstellt.

Satz: Kann man eine Zeitfunktion als Summe von Einzelfunktionen schreiben, so ist die resultierende Spektralfunktion die Summe der resultierenden Einzelspektren (**Additionssatz**):

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \circ \bullet \quad X(f) = X_1(f) + X_2(f).$$

Beispiel: Bekannt sind die beiden Fourierkorrespondenzen

$$\begin{aligned} x_1(t) &\circ \bullet X_1(f) = T \cdot \text{si}(\pi f T), \\ x_2(t) &\circ \bullet X_2(f) = T/2 \cdot \text{si}(\pi f T/2). \end{aligned}$$



Dann gilt für das Summensignal:

$$x(t) = 1/3 \cdot x_1(t) + 2/3 \cdot x_2(t) \quad \circ \bullet \quad X(f) = 1/3 \cdot X_1(f) + 2/3 \cdot X_2(f).$$

Zuordnungssatz

Bereits bei der **komplexen Fourierreihe** zur Beschreibung periodischer Signale haben wir festgestellt, dass eine gerade Funktion stets zu reellen und eine ungerade Funktion ausschließlich zu imaginären Fourierkoeffizienten führt. Die Fouriertransformation zeigt ähnliche Eigenschaften.

Satz: Besteht eine reelle Zeitfunktion additiv aus einem geraden und einem ungeraden Anteil,

$$x(t) = x_g(t) + x_u(t),$$

so gilt für die dazugehörige Spektralfunktion (**Zuordnungssatz**):

$$X(f) = X_R(f) + j \cdot X_I(f) \quad \text{mit} \quad x_g(t) \circ \longrightarrow \bullet X_R(f) \quad \text{und} \quad x_u(t) \circ \longrightarrow \bullet j \cdot X_I(f).$$

Der Realteil $X_R(f)$ des Spektrums ist dann ebenfalls gerade, während $X_I(f)$ eine ungerade Funktion der Frequenz beschreibt.

Dieser Satz lässt sich einfach beweisen, wenn man den Satz von **Leonhard Euler** berücksichtigt:

$$e^{-j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - j \cdot \sin(\omega_0 t).$$

Den geraden und ungeraden Anteil einer Funktion $x(t)$ kann man mit folgenden Gleichungen berechnen:

$$x_g(t) = \frac{1}{2} (x(t) + x(-t)),$$

$$x_u(t) = \frac{1}{2} (x(t) - x(-t)).$$

Beispiel: Wir betrachten die Sprungfunktion $\gamma(t)$:

$$x(t) = \gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

Diese kann wie folgt aufgeteilt werden:

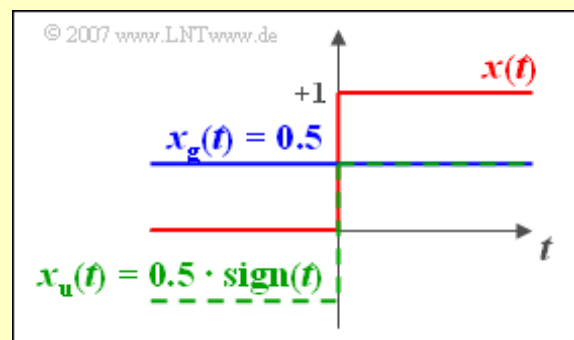
$$\gamma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \text{sign}(t),$$

wobei die *Signum-Funktion* verwendet wurde:

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0, \\ +1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Der gerade (blaue) Signalanteil ist eine Konstante mit der reellen Spektralfunktion $0.5 \cdot \delta(f)$. Das Spektrum der ungeraden (grünen) Signumfunktion wurde bereits im Beispiel auf der Seite **Fouriertransformation** berechnet. Damit erhält man für das resultierende Spektrum von $x(t)$:

$$X(f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f) - j \cdot \frac{1}{2\pi f}.$$



Ähnlichkeitssatz

Der Ähnlichkeitssatz zeigt den Zusammenhang zwischen den Spektralfunktionen zweier zwar formgleicher, aber gestreckter oder gestauchter Zeitsignale auf.

Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$, so gilt mit der reellen Konstanten k auch folgender Funktionszusammenhang (**Ähnlichkeitssatz**):

$$x(k \cdot t) \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{|k|} \cdot X(f/k).$$

Beweis: Für positives k folgt aus dem Fourierintegral mit der Substitution $\tau = k \cdot t$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(k \cdot t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{k} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f/k \cdot \tau} d\tau = \frac{1}{k} \cdot X(f/k).$$

Für negatives k würden sich die Integrationsgrenzen vertauschen und man erhält $1/(-k) \cdot X(f/k)$. Da in der Gleichung $|k|$ verwendet wird, gilt das Ergebnis für beide Vorzeichen. q.e.d.

Die Auswirkungen des Ähnlichkeitssatzes kann man sich zum Beispiel mit einem Tonband verdeutlichen. Spielt man ein solches Band mit doppelter Geschwindigkeit ab, so entspricht dies einer Stauchung des Zeitsignals ($k = 2$). Dadurch erscheinen die Frequenzen doppelt so hoch.

Beispiel: Wir betrachten zwei Rechtecke gleicher Höhe, wobei $T_2 = T_1/2$ gilt.

Die Spektralfunktion von $x_1(t)$ ergibt sich nach dem ersten Fourierintegral zu

$$X_1(f) = A \cdot \frac{1 - e^{-j2\pi f T_1}}{j2\pi f}.$$

Dafür kann auch geschrieben werden:

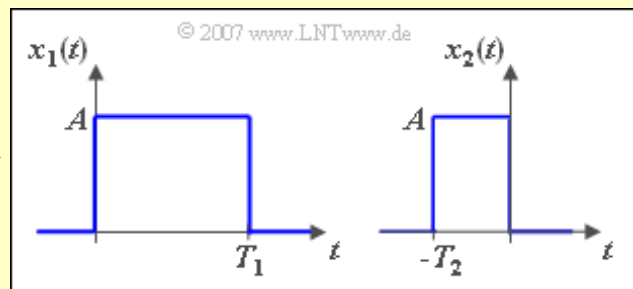
$$X_1(f) = A \cdot T_1 \cdot \frac{e^{j\pi f T_1} - e^{-j\pi f T_1}}{j2\pi f T_1} \cdot e^{-j\pi f T_1} = A \cdot T_1 \cdot \text{si}(\pi f T_1) \cdot e^{-j\pi f T_1}.$$

Für die Spektralfunktion von $x_2(t)$ folgt aus dem Ähnlichkeitssatz mit $k = -2$:

$$X_2(f) = \frac{1}{2} \cdot X_1\left(-\frac{f}{2}\right) = \frac{A \cdot T_1}{2} \cdot \text{si}\left(-\pi f \frac{T_1}{2}\right) \cdot e^{j\pi f T_1/2}.$$

Die si-Funktion ist gerade: $\text{si}(-x) = \text{si}(x)$. Deshalb kann man auf das Vorzeichen im Argument der si-Funktion verzichten. Mit $T_2 = T_1/2$ erhält man schließlich:

$$X_2(f) = A \cdot T_2 \cdot \text{si}(\pi f T_2) \cdot e^{j\pi f T_2}.$$



Reziprozitätsgesetz von Zeitdauer und Bandbreite

Dieses Gesetz folgt direkt aus dem Ähnlichkeitssatz: Je breiter ein Impuls in seiner zeitlichen Ausdehnung ist, desto schmaler und höher ist das zugehörige Spektrum und umgekehrt. Um quantitative Aussagen treffen zu können, definieren wir zwei Kenngrößen für energiebegrenzte Signale \Rightarrow Impulse:

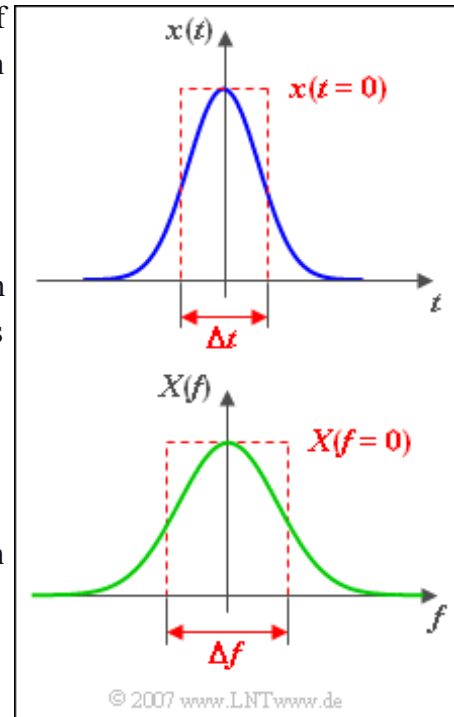
- Die **äquivalente Impulsdauer** wird aus dem Zeitverlauf abgeleitet. Sie ist gleich der Breite eines flächengleichen Rechtecks mit gleicher Höhe wie $x(t)$:

$$\Delta t = \frac{1}{x(t=0)} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt.$$

- Die **äquivalente Bandbreite** kennzeichnet den Impuls im f -Bereich. Sie gibt die Breite des flächengleichen Rechtecks mit gleicher Höhe wie das Spektrum $X(f)$ an:

$$\Delta f = \frac{1}{X(f=0)} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df.$$

Beide Größen sind nebenstehend für einen Gaußimpuls und dessen ebenfalls gaußförmiges Spektrum dargestellt.



Satz: Das Produkt aus äquivalenter Impulsdauer und äquivalenter Bandbreite ist stets gleich 1:

$$\Delta t \cdot \Delta f = 1$$

Man bezeichnet diesen Zusammenhang als **Reziprozitätsgesetz**.

Beweis: Ausgehend von den beiden Fourierintegralen erhält man für $f=0$ bzw. $t=0$:

$$X(f=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt, \quad x(t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df.$$

Berücksichtigt man dieses Ergebnis bei obigen Definitionen, so erhält man:

$$X(f=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt, \quad x(t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df.$$

Daraus folgt direkt $\Delta t = 1/\Delta f$.

q.e.d.

Anzumerken ist, dass Δf über das tatsächliche Spektrum $X(f)$ und nicht über $|X(f)|$ definiert ist. Bei reellen Funktionen genügt die Integration über den geraden Funktionsanteil, da das Integral über den ungeraden Anteil wegen des **Zuordnungssatzes** stets 0 ist. Bei ungeraden Zeitfunktionen und damit rein imaginären Spektren versagen die beiden Definitionen von Δt bzw. Δf .

Beispiel: Verbreitert man den Gaußimpuls um den Faktor 3, so wird die äquivalente Bandbreite um den gleichen Faktor kleiner. Da die Impulsamplitude $x(t=0)$ nicht verändert wird, bleibt auch die Integralfläche über $X(f)$ konstant. Das heißt, dass $X(f=0)$ gleichzeitig um den Faktor 3 größer wird.

Vertauschungssatz

Diese Gesetzmäßigkeit ist besonders nützlich, um neue Fourierkorrespondenzen zu erhalten.

Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$, dann gilt nach dem **Vertauschungssatz** auch:

$$X^*(t) \circ \longrightarrow \bullet x^*(f).$$

Beschränken wir uns auf reelle Zeitfunktionen, so können die Zeichen für „konjugiert komplex“ auf beiden Seiten der Fourierkorrespondenz weggelassen werden.

Beweis: Das erste Fourierintegral lautet nach sukzessiver Umbenennung $t \rightarrow u$ bzw. $f \rightarrow t$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot e^{-j2\pi fu} du, \quad X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot e^{-j2\pi tu} du.$$

Ändert man das Vorzeichen in den Exponenten, so muss man $X(t)$ durch $X^*(t)$ und $x(u)$ durch $x^*(u)$ ersetzen:

$$X^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(u) \cdot e^{j2\pi tu} du.$$

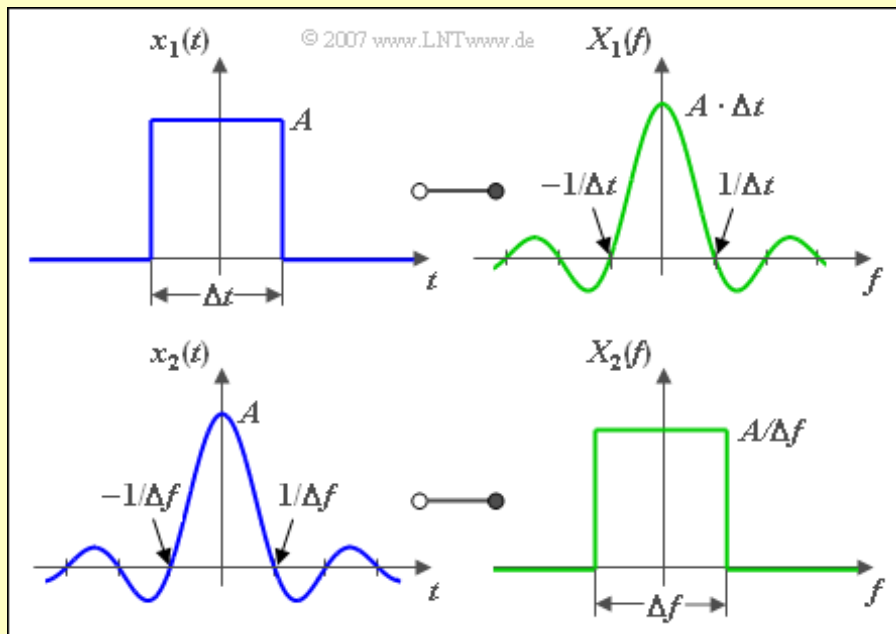
Mit der weiteren Umbenennung $u \rightarrow f$ kommt man zum zweiten Fourierintegral:

$$X^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(f) \cdot e^{j2\pi ft} df. \quad \text{q.e.d.}$$

Beispiel: Das Spektrum $X(f) = \delta(f)$ des Gleichsignals $x(t) = 1$ wird als bekannt vorausgesetzt. Nach dem Vertauschungssatz lautet deshalb die Spektralfunktion des Diracimpulses $x(t) = \delta(t)$:

$$x(t) = \delta(t) \circ \longrightarrow \bullet X(f) = 1.$$

Die folgende Grafik zeigt eine weitere Anwendung des Vertauschungssatzes.



Verschiebungssatz

Betrachten wir nun eine Verschiebung der Zeitfunktion – z. B. verursacht durch eine Laufzeit – oder eine Frequenzverschiebung, wie sie beispielsweise bei der Amplitudenmodulation auftritt.

Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte (Spektralfunktion) der Zeitfunktion $x(t)$, so gelten nach dem **Verschiebungssatz** auch folgende Zusammenhänge:

$$x(t - t_0) \circ \longrightarrow \bullet X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0},$$

$$x(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \circ \longrightarrow \bullet X(f - f_0).$$

Hierbei sind t_0 und f_0 Zeit- bzw. Frequenzgrößen.

Beweis von Gleichung (1): Das erste Fourierintegral für das um t_0 nach rechts verschobene Signal $x_V(t) = x(t - t_0)$ lautet mit der Substitution $\tau = t - t_0$:

$$X_V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f(\tau + t_0)} d\tau.$$

Der von der Integrationsvariablen τ unabhängige Term kann vor das Integral gezogen werden. Mit der Umbenennung $\tau \rightarrow t$ erhält man dann:

$$X_V(f) = e^{-j2\pi f t_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t_0} \cdot X(f).$$

Beispiel: Wie bereits erwähnt, besitzt der symmetrische Rechteckimpuls $x_1(t)$ das folgende Spektrum:

$$X_1(f) = A \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T).$$

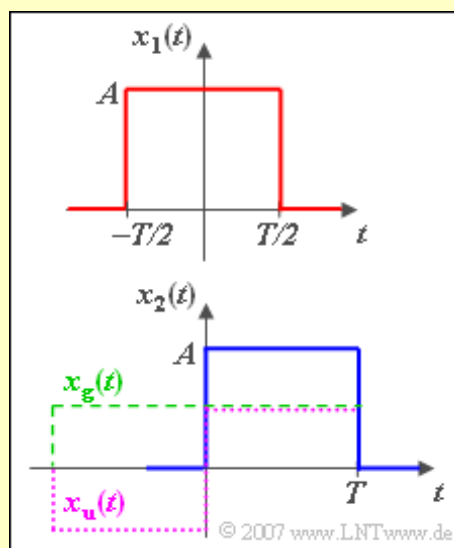
Der unten dargestellte Rechteckimpuls $x_2(t)$ ist gegenüber $x_1(t)$ um $T/2$ nach rechts verschoben: $x_2(t) = x_1(t - T/2)$. Somit lautet sein Spektrum:

$$X_2(f) = A \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T) \cdot e^{-j\pi f T}.$$

Diese Spektralfunktion kann mit dem Eulerschen Satz und einiger einfacher trigonometrischer Umformungen auch wie folgt geschrieben werden:

$$X_2(f) = \frac{A}{2\pi f} \cdot \sin(2\pi f T) + j \cdot \frac{A}{2\pi f} \cdot [\cos(2\pi f T) - 1].$$

Das gleiche Ergebnis erhält man auch mit dem **Zuordnungssatz**: Der Realteil des Spektrums gehört zum geraden Signalanteil $x_g(t)$, der Imaginärteil zum ungeraden Anteil $x_u(t)$.



Differentiationsatz

Dieser Satz zeigt, wie sich die Differentiation einer Funktion (im Zeit- bzw. Frequenzbereich) in der korrespondierenden Fouriertransformierten auswirkt; er ist auch mehrfach anwendbar. Ein einfaches Beispiel für die Anwendung dieses Satzes ist der Zusammenhang zwischen dem Strom $i(t)$ und der Spannung $u(t)$ einer Kapazität C : $i(t) = C \cdot du(t)/dt$.

Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$, so gelten auch folgende Korrespondenzen:

$$\frac{dx(t)}{dt} \circ \longrightarrow \bullet j2\pi f \cdot X(f),$$

$$-t \cdot x(t) \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{j2\pi} \cdot \frac{dX(f)}{df}.$$

Dies sind die beiden Varianten des **Differentiationsatzes**.

Beweis: Die erste Gleichung ergibt sich durch Differentiation des zweiten Fourierintegrals:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot j2\pi f \cdot e^{j2\pi ft} df.$$

Gleichzeitig gilt aber auch:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot e^{j2\pi ft} df.$$

Durch Vergleich der Integranden erhält man die obere Variante des Differentiationsatzes. Zur Herleitung der zweiten Variante geht man ausgehend vom ersten Fourierintegral in analoger Weise vor. Der negative Exponent im ersten Fourierintegral führt zum Minuszeichen in der Zeitfunktion.

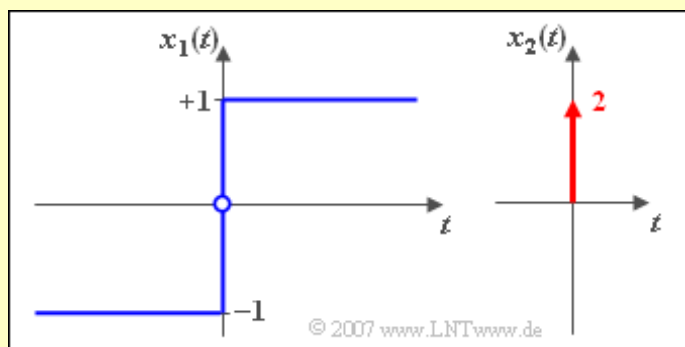
q.e.d.

Beispiel: Die Spektren der skizzierten Signale $x_1(t)$ und $x_2(t)$ wurden bereits in früheren Beispielen wie folgt berechnet:

$$X_1(f) = \frac{1}{j\pi f},$$

$$X_2(f) = 2 = \text{const.}$$

Offensichtlich gilt $X_2(f) = X_1(f) \cdot j2\pi f$.



- Aus dem Differentiationsatz folgt somit, dass $x_2(t)$ gleich der Ableitung von $x_1(t)$ nach der Zeit ist. Dies stimmt tatsächlich: Für $t \neq 0$ ist $x_1(t)$ konstant, also die Ableitung 0.
- Bei $t = 0$ ist die Steigung unendlich groß, was sich auch in der Gleichung $x_2(t) = 2 \cdot \delta(t)$ ausdrückt. Das Impulsgewicht „2“ der Diracfunktion berücksichtigt, dass der Sprung innerhalb der Funktion $x_1(t)$ bei $t = 0$ die Höhe 2 hat.

Integrationsatz (1)

Die Integration ist ebenso wie die Differentiation eine lineare Operation. Daraus ergibt sich:

Satz: Ist $X(f)$ die Fouriertransformierte (Spektralfunktion) von $x(t)$, so gelten auch die folgenden Fourierkorrespondenzen (**Integrationsatz**):

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \bullet X(f) \left(\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \right),$$
$$x(t) \left(-\frac{1}{j2\pi t} + \frac{1}{2} \cdot \delta(t) \right) \circ \bullet \int_{-\infty}^f X(\nu) d\nu.$$

Da der Integrationsatz genau die Umkehrung des Differentiationssatzes darstellt, soll hier auf den Beweis verzichtet und stattdessen auf [Mar94] verwiesen werden. Wendet man auf die obere Gleichung den Differentiationssatz an, so erhält man:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \bullet X(f) \left(\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \right) \cdot j2\pi f.$$

Die Differentiation nach der oberen Grenze auf der linken Seite liefert genau den Integranden $x(t)$. Auf der rechten Seite der Korrespondenz ergibt sich richtigerweise $X(f)$, da die Diracfunktion bei $f = 0$ wegen der Multiplikation mit $j2\pi f$ ausgeblendet wird.

Alle im Kapitel 3.3 dargelegten Gesetzmäßigkeiten – unter anderem auch der Differentiations- und der Integrationsatz – werden in einem Lernvideo an Beispielen verdeutlicht:

Gesetzmäßigkeiten der Fouriertransformation (Dauer Teil 1: 5:57 – Teil 2: 5:55)

Integrationsatz (2)

Beispiel: Die skizzierten Signale $x_1(t)$ und $x_2(t)$ hängen wie folgt zusammen:

$$x_2(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau.$$

Aufgrund des Integrationsatzes gilt der Zusammenhang zwischen den Spektren:

$$X_2(f) = \frac{1}{T} \cdot X_1(f) \left(\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \cdot \delta(f) \right).$$

Mit der Spektralfunktion

$$X_1(f) = A \cdot T \cdot \text{si}(\pi f T) \cdot e^{-j\pi f T}$$

erhält man somit

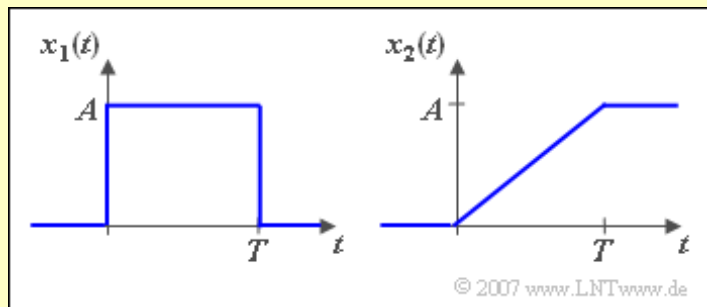
$$X_2(f) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f) + \frac{A \cdot T}{2j} \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{(\pi f T)^2} \cdot e^{-j\pi f T},$$

bzw. nach trigonometrischen Umformungen:

$$X_2(f) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f) + \frac{A \cdot T}{(2\pi f T)^2} \cdot [\cos(2\pi f T) - 1 - j \cdot \sin(2\pi f T)].$$

Hierzu ist anzumerken:

- Die Diracfunktion bei $f = 0$ mit dem Gewicht $A/2$ berücksichtigt den Gleichanteil der Rampenfunktion $x_2(t)$. Das bedeutet auch: Der Gleichanteil der Rampenfunktion ist genau so groß wie der Gleichanteil der Sprungfunktion.
- Das fehlende Dreieck mit den Eckpunkt-Koordinaten $(0, 0)$, (T, A) und $(0, A)$ ändert am Gleichanteil nichts; es wirkt sich gegenüber der unendlich großen Restfläche nicht aus.



Faltung im Zeitbereich

Der **Faltungssatz** ist mit das wichtigste Gesetz der Fouriertransformation. Deshalb wird in vorliegendem Tutorial diesem auch ein eigenes Unterkapitel gewidmet.

Betrachten wir zunächst den Faltungssatz im Zeitbereich und setzen voraus, dass die Spektren zweier Zeitfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bekannt sind:

$$X_1(f) \bullet \text{---} \circ x_1(t), \quad X_2(f) \bullet \text{---} \circ x_2(t).$$

Dann gilt für die Zeitfunktion des Produktes $X_1(f) \cdot X_2(f)$:

$$X_1(f) \cdot X_2(f) \bullet \text{---} \circ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau.$$

Hierbei ist τ eine formale Integrationsvariable mit der Dimension einer Zeit.

Definition: Die obige Verknüpfung der Zeitfunktion $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bezeichnet man als **Faltung** und stellt diesen Funktionalzusammenhang mit einem Stern dar:

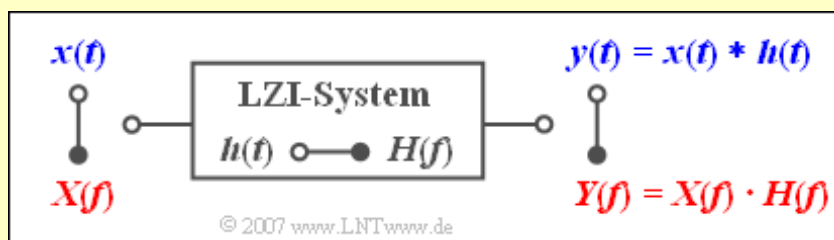
$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau = x_2(t) * x_1(t).$$

Damit lässt sich obige Fourierkorrespondenz auch wie folgt schreiben:

$$X_1(f) \cdot X_2(f) \bullet \text{---} \circ x_1(t) * x_2(t). \quad \Rightarrow \quad \text{Beweis (am Kapitelende)}$$

Anmerkung: Die Faltung ist **kommutativ** \Rightarrow Die Reihenfolge der Operanden ist vertauschbar.

Beispiel: Ein jedes lineare zeitinvariante (LZI-) System kann sowohl durch den Frequenzgang $H(f)$ als auch durch die Impulsantwort $h(t)$ beschrieben werden, wobei der Zusammenhang zwischen diesen beiden Systemgrößen durch die Fouriertransformation gegeben ist.



Legt man an den Eingang ein Signal $x(t)$ mit dem Spektrum $X(f)$ an, so gilt für das Spektrum des Ausgangssignals:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f).$$

Mit dem Faltungssatz ist es nun möglich, das Ausgangssignal auch direkt im Zeitbereich zu berechnen:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau = h(t) * x(t).$$

Aus dieser Gleichung geht nochmals hervor, dass die Faltungsoperation *kommutativ* ist.

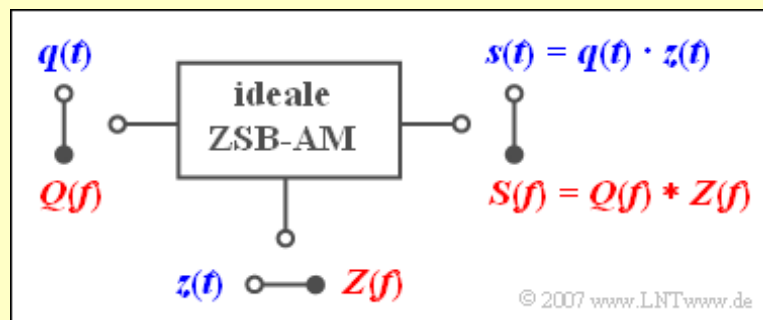
Faltung im Frequenzbereich

Die Dualität zwischen dem Zeit- und dem Frequenzbereich erlaubt auch Aussagen hinsichtlich des Spektrums des Produktsignals:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \circ \bullet X_1(f) * X_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\nu) \cdot X_2(f - \nu) d\nu.$$

Dieses Resultat lässt sich ähnlich wie der **Faltungssatz im Zeitbereich** beweisen. Allerdings hat nun die Integrationsvariable ν die Dimension einer Frequenz.

Beispiel: Die Zweiseitenband-Amplitudenmodulation (ZSB-AM) ohne Träger wird durch das unten skizzierte Modell beschrieben. Bei der Zeitbereichsdarstellung (blau) ergibt sich das modulierte Signal $s(t)$ als das Produkt aus dem Nachrichtensignal $q(t)$ und dem (normierten) Trägersignal $z(t)$.



Nach dem Faltungssatz folgt daraus für den Frequenzbereich (rot), dass das Ausgangsspektrum $S(f)$ gleich dem Faltungsprodukt aus $Q(f)$ und $Z(f)$ ist.

Faltung einer Funktion mit einer Diracfunktion

Sehr einfach wird die Faltungsoperation, wenn einer der beiden Operanden eine **Diracfunktion** ist. Dies gilt für die Faltung im Zeit- und im Frequenzbereich gleichermaßen.

Wir betrachten beispielhaft die Faltung einer Funktion $x_1(t)$ mit der Funktion

$$x_2(t) = \alpha \cdot \delta(t - T) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X_2(f) = \alpha \cdot e^{-j2\pi fT}.$$

Für die Spektralfunktion des Signals $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ gilt dann:

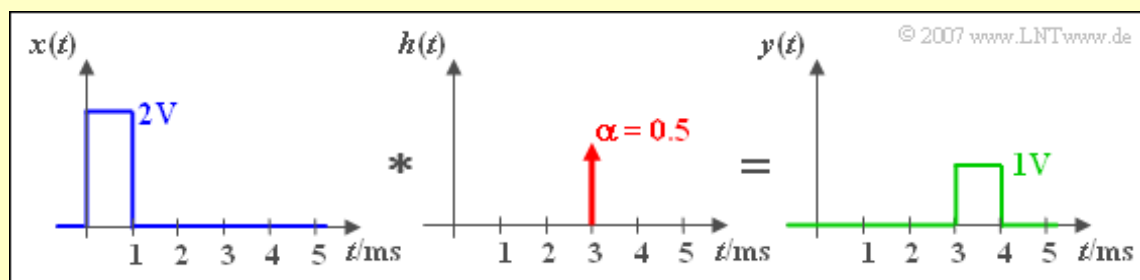
$$Y(f) = X_1(f) \cdot X_2(f) = X_1(f) \cdot \alpha \cdot e^{-j2\pi fT}.$$

Die komplexe Exponentialfunktion führt zu einer Verschiebung um T (Verschiebungssatz), der Faktor α zu einer Dämpfung ($\alpha < 1$) bzw. Verstärkung ($\alpha > 1$). Daraus folgt:

$$x_1(t) * x_2(t) = \alpha \cdot x_1(t - T).$$

In Worten: Die Faltung einer beliebigen Funktion mit einer Diracfunktion bei $t = T$ ergibt die um T nach rechts verschobene Funktion, wobei noch die Gewichtung der Diracfunktion durch den Faktor α zu berücksichtigen ist.

Beispiel: Ein Rechtecksignal $x(t)$ wird durch ein LZI-System beispielsweise um eine Laufzeit $\tau = 3$ ms verzögert und um den Faktor $\alpha = 0.5$ gedämpft.



Dies erkennt man sowohl am Ausgangssignal $y(t)$ als auch an der Impulsantwort $h(t)$.

Grafische Faltung (1)

Für die Beschreibungen auf dieser Seite wird von folgender Faltungsoperation ausgegangen:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau.$$

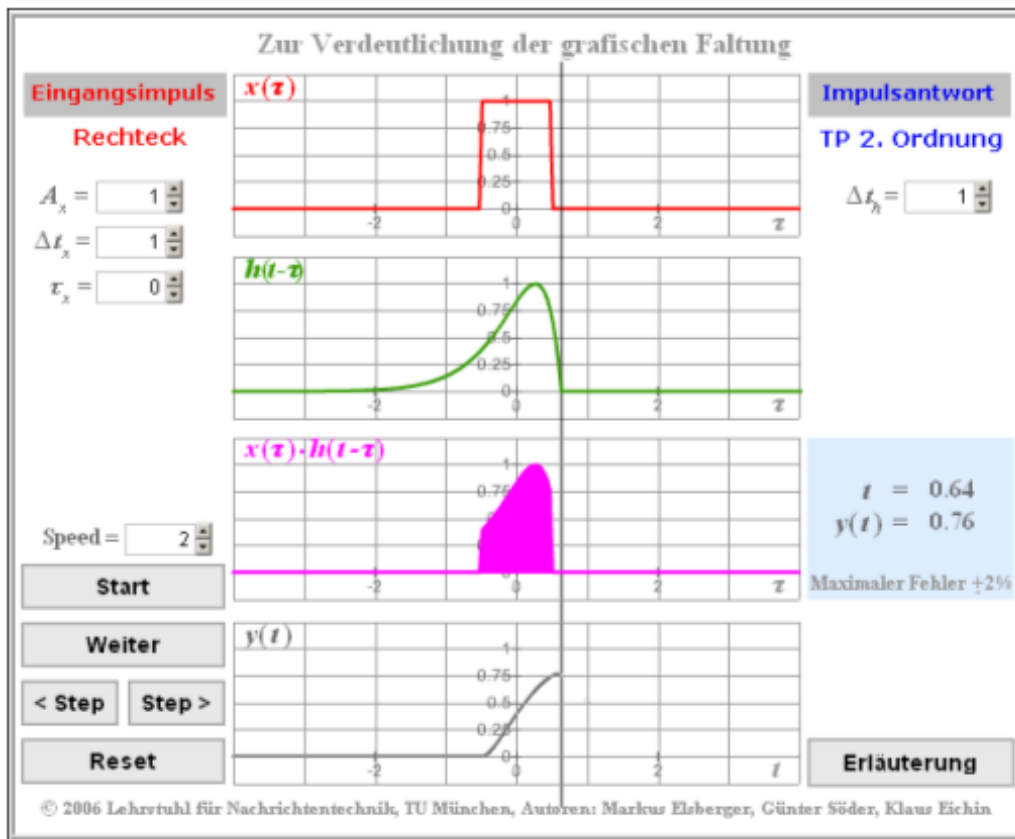
Die Lösung des Faltungsintegrals soll auf grafischem Wege erfolgen. Hierbei wird vorausgesetzt, dass $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zeitkontinuierliche Signale sind. Dann sind folgende Schritte erforderlich:

1. Die **Zeitvariablen** der beiden Funktionen **ändern**: $x_1(t) \rightarrow x_1(\tau), x_2(t) \rightarrow x_2(\tau)$.
2. Zweite **Funktion spiegeln**: $x_2(\tau) \rightarrow x_2(-\tau)$.
3. Gespiegelte **Funktion** um t **verschieben**: $x_2(-\tau) \rightarrow x_2(t - \tau)$.
4. **Multiplikation** der beiden Funktionen $x_1(\tau)$ und $x_2(t - \tau)$.
5. **Integration** über das Produkt bezüglich τ in den Grenzen von $-\infty$ bis $+\infty$.

Da die Faltung kommutativ ist, kann anstelle von $x_2(\tau)$ auch $x_1(\tau)$ gespiegelt werden.

Auf der nächsten Seite wird die Vorgehensweise anhand eines ausführlichen Beispiels erklärt. Die Thematik dieses Abschnitts wird auch durch das folgende Interaktionsmodul veranschaulicht:

Zur Verdeutlichung der grafischen Faltung (die folgende Grafik zeigt einen Bildschirmabzug)



Grafische Faltung (2)

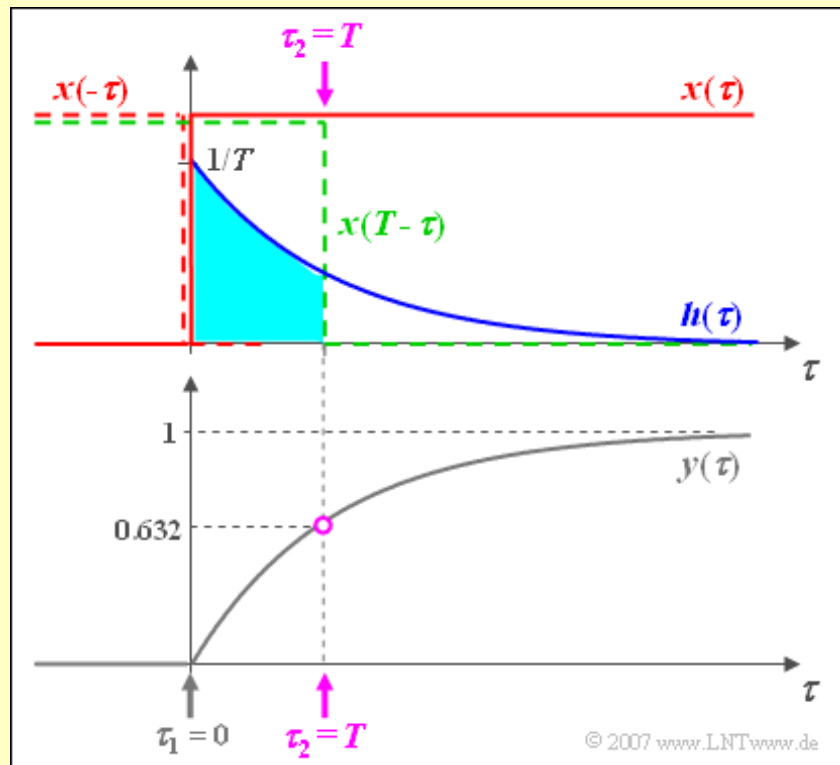
Beispiel: Am Eingang eines RC-Tiefpassfilters liege eine Sprungfunktion $x(t) = \gamma(t)$ an. Die Filter-Impulsantwort sei

$$h(t) = 1/T \cdot e^{-t/T}.$$

Zur Erklärung der Grafik:

Zeitachse ist in τ umbenannt.

$x(\tau)$: Eingangssignal (rot), $h(\tau)$:
 Impulsantwort (blau), $y(\tau)$:
 Ausgangssignal (grau).



Das Ausgangssignal errechnet sich zum Beispiel nach folgender Gleichung:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau.$$

Noch einige Anmerkungen zur grafischen Faltung:

- Der Ausgangswert bei $t = 0$ ergibt sich, indem man das Eingangssignal spiegelt, dieses gespiegelte Signal $x(-\tau)$ mit der Impulsantwort $h(\tau)$ multipliziert und darüber integriert.
- Da es hier kein Zeitintervall gibt, bei dem sowohl die blaue Kurve $h(\tau)$ und gleichzeitig auch die rot gestrichelte Spiegelung $x(-\tau)$ ungleich 0 ist, folgt daraus $y(t = 0) = 0$.
- Für jeden anderen Zeitpunkt t muss das Eingangssignal verschoben werden $\Rightarrow x(t - \tau)$, beispielsweise entsprechend der grün gestrichelten Kurve für $t = T$.
- Da auch $x(t - \tau)$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann, wird die Integration (allgemein von τ_1 bis τ_2) sehr einfach und man erhält hier mit $\tau_1 = 0$ und $\tau_1 = t$:

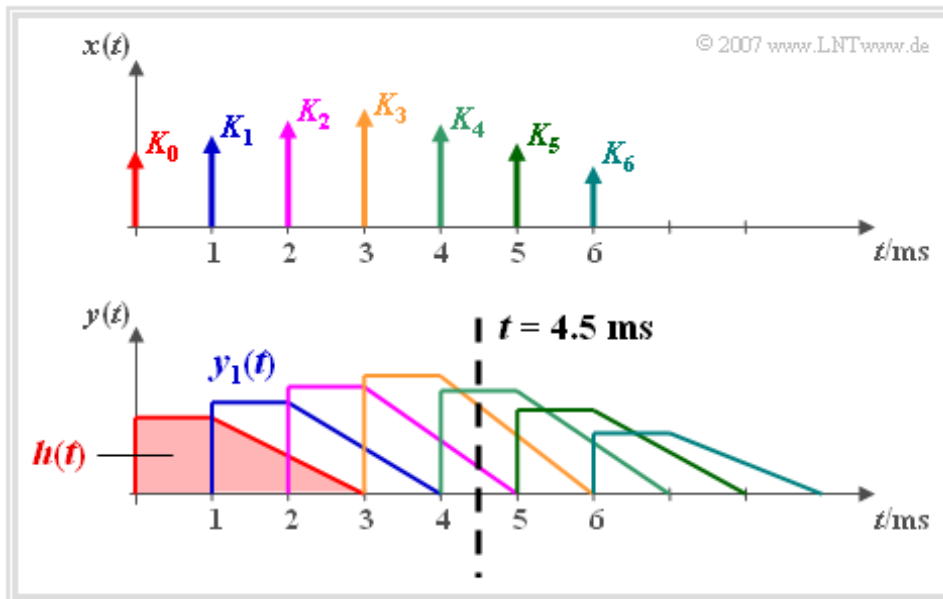
$$y(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \cdot \int_0^t e^{-\tau/T} d\tau = 1 - e^{-t/T}.$$

Obige Skizze gilt für $t = T$ und führt zum Ausgangswert $y(t = T) = 1 - 1/e \approx 0.632$.

Anschauliche Deutung der Faltung

Wir betrachten ein Tiefpassfilter mit der Impulsantwort $h(t)$, die zunächst eine Millisekunde lang konstant ist und dann bis zur Zeit $t = 3$ ms linear abfällt. Legt man an den Eingang dieses Filters einen Diracimpuls $K_0 \cdot \delta(t)$ an, so ist das Ausgangssignal $y(t)$ formgleich mit der Impulsantwort $h(t)$. Der Sachverhalt ist im Bild rot dargestellt.

Ein um $T = 1$ ms späterer Diracimpuls mit Gewicht $K_1 > K_0$ hat das blau eingezeichnete Ausgangssignal $y_1(t)$ zur Folge, das gegenüber dem roten Signal verzögert und in der Amplitude vergrößert ist.



Wir betrachten nun das aus sieben verschieden gewichteten und verschobenen Diracimpulsen bestehende Eingangssignal

$$x(t) = \sum_{n=0}^6 K_n \cdot \delta(t - n \cdot T),$$

das als zeitdiskrete Näherung eines zeitkontinuierlichen Signals aufgefasst werden kann. Das Signal am Ausgang des linearen Systems ist die Summe der sieben im Bild verschiedenfarbig markierten Teilsignale:

$$y(t) = \sum_{n=0}^6 K_n \cdot h(t - n \cdot T).$$

Betrachten wir nun beispielhaft den Signalwert zum Zeitpunkt $t = 4.5T$ (siehe Strichpunktierung):

$$y(t = 4.5T) = K_2 \cdot h(2.5T) + K_3 \cdot h(1.5T) + K_4 \cdot h(0.5T).$$

Der Signalwert $y(4.5T)$ wird somit nur durch die Eingangssignalwerte K_2 , K_3 und K_4 bestimmt, und zwar ist der Einfluss

- von K_4 wegen $h(0.5T) = 1$ am stärksten,
- von K_3 wegen $h(1.5T) = 0.75$ weniger stark,
- von K_2 wegen $h(2.5T) = 0.25$ am geringsten.

Beweis des Faltungssatzes

Definition: Man bezeichnet die folgende Verknüpfung der Zeitfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ als **Faltung** und stellt diesen Funktionalzusammenhang mit einem Stern dar:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau.$$

Daraus ergibt sich die folgende Fourierkorrespondenz:

$$X_1(f) \cdot X_2(f) \bullet \text{---} \circ x_1(t) * x_2(t).$$

Die Fourierintegrale der Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ lauten mit veränderten Integrationsvariablen:

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau,$$

$$X_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t') \cdot e^{-j2\pi ft'} dt'.$$

Bildet man das Produkt der Spektralfunktionen, so erhält man:

$$X_1(f) \cdot X_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t') \cdot e^{-j2\pi f(\tau+t')} d\tau dt'.$$

Mit der Substitution $t = \tau + t'$ ergibt sich:

$$X_1(f) \cdot X_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau \right] \cdot e^{-j2\pi ft} dt.$$

In dieser Gleichung ist bereits berücksichtigt, dass die Exponentialfunktion unabhängig von der inneren Integrationsvariablen τ ist und deshalb nur als Faktor des inneren Integrals fungiert.

Bezeichnen wir nun das Produkt der beiden Spektren mit $P(f)$ und die dazugehörige Zeitfunktion mit $p(t)$, so lautet das entsprechende Fourierintegral:

$$P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt.$$

Ein Koeffizientenvergleich der beiden Integrale zeigt, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau.$$

q.e.d.