

## Überblick zu Kapitel 4

Im Kapitel 3 wurden meist stillschweigend tiefpassartige Signale vorausgesetzt, das heißt solche Signale, deren Spektralfunktionen im Bereich um die Frequenz  $f = 0$  liegen. Insbesondere bei der optischen Übertragung und bei Funkübertragungssystemen – aber nicht nur hier – liegen die Sendesignale jedoch in einem engen Bereich um eine Trägerfrequenz  $f_T$ . Solche Signale bezeichnet man als **Bandpass-Signale**.

Alle im Kapitel 3 dargelegten Gesetze der Fouriertransformation und –rücktransformation gelten für bandpassartige Signale in gleicher Weise. Daneben gibt es aber auch einige Besonderheiten der Bandpass-Signale, deren Beachtung zu einer einfacheren Beschreibung führen.

Dieses Kapitel beinhaltet im Einzelnen:

- die Aufzählung von *Unterschieden* und *Gemeinsamkeiten* von TP– und BP–Signalen,
- die *Synthese* von Bandpass–Signalen aus dem äquivalenten Tiefpass–Signal,
- das *analytische Signal* und die zugehörige Spektralfunktion,
- das *äquivalente Tiefpass–Signal* im Zeit– und Frequenzbereich, und schließlich
- die Darstellung von analytischem Signal/äquivalentem TP–Signal in der *komplexen Ebene*.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 25 Bildschirmseiten mit Gleichungen, Bildern und Beispielen verdeutlicht. Zudem beinhaltet das Kapitel noch 47 Grafiken, sechs Aufgaben und sechs Zusatzaufgaben mit insgesamt 53 Teilaufgaben sowie ein Lernvideo (LV) und zwei Interaktionsmodule (IM), nämlich:

- **Eigenschaften von TP– und BP–Signalen** (LV zu Kap. 4.1, Dauer 5:18)
- **Zeigerdiagramm – Darstellung des analytischen Signals** (IM zu Kap. 4.2)
- **Ortskurve – Darstellung des äquivalenten TP-Signals** (IM zu Kap. 4.3)

**Literatur:** [Hay83] – [KI89] – [Lük04] – [Mar94] – [Schü91a] – [Schü91b] – [Söd01] – [Sto15]

Weitere Informationen zum Thema, zahlreiche Aufgaben und Simulationen finden Sie im Versuch „Analoge Modulationsverfahren“ des Praktikums „Simulation digitaler Übertragungssysteme“ von Prof. Günter Söder am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technischen Universität München.

Diese Veranstaltung basiert auf dem Windows-Programm AMV des Softwarepakets *LNTwin*.

Hinweise zum Herunterladen des Programms und der Versuchsanleitung:

**Windows–Programm „AMV“** (Zip–Version)

**Praktikumsanleitung** (PDF–Version, ca. 5.7 MB)

## Bedeutung der Bandpass-Signale für die Nachrichtentechnik

In den Kapiteln 2 und 3 dieses Buches wurden bisher fast nur **tieffpassartige Signale** betrachtet, deren Spektralfunktionen in einem engen Bereich um die Frequenz  $f = 0$  liegen. Beispiele hierfür sind analoge Sprach-, Musik- und Bildsignale, die man alle – trotz ihrer unterschiedlichen Bandbreiten – als Tiefpass-Signale bezeichnen kann.

Will man ein solches Tiefpass-Signal zu einer räumlich entfernten Sinke übertragen, so muss das Signal unter Umständen in eine andere Frequenzlage umgesetzt werden. Dafür kann es mehrere Gründe geben:

- Häufig ist der Übertragungskanal für die direkte Übertragung des Quellensignals im originalen Frequenzband ungeeignet, da dieses für ihn ungünstige Frequenzen beinhaltet. Erst durch eine Frequenzverschiebung mittels einer so genannten **Modulation** wird eine Übertragung ermöglicht.
- Man kann einen einzigen Übertragungskanal auch zur gleichzeitigen Übertragung mehrerer Signale nutzen, wenn diese sendeseitig mit verschiedenen Trägerfrequenzen moduliert werden. Man nennt dieses Verfahren **Frequenzmultiplex** (englisch: *Frequency Division Multiple Access*, FDMA).
- Die Übertragungsqualität kann meist auf Kosten einer größeren Bandbreite gegenüber dem einfachsten analogen Verfahren (Amplitudenmodulation) verbessert und somit ein größeres **Signal-zu-Rauschverhältnis** erzielt werden. Beispiele hierfür sind die Frequenzmodulation (FM) als analoges Verfahren und die digitale Pulsmodulation (PCM).

Festzuhalten ist: Die Sendesignale vieler Übertragungsverfahren sind **Bandpass-Signale**.

**Hinweis:** Den Autoren ist durchaus bewusst, dass es nach der letzten Rechtschreibreform „Tiefpasssignal“ und „Bandpasssignal“ heißen müsste. Um diese unschönen Konstrukte zu vermeiden, verwenden wir im Folgenden meist die Schreibweisen „TP-Signal“ und „BP-Signal“.

**Beispiele:** *Sprache und Musik* sind TP-Signale mit einer Bandbreite von 20 kHz (bei sehr guter Qualität). Da eine Funkübertragung aber erst ab ca. 100 kHz möglich ist, erfolgt vor der Übertragung eine Umsetzung auf Trägerfrequenzen zwischen

- 0.525 ... 1.61 MHz (Mittelwellenrundfunk, Amplitudenmodulation, Kanalabstand 9 kHz),
- 87.5 ... 108 MHz (Rundfunk auf UKW, Frequenzmodulation, Kanalabstand 300 kHz).

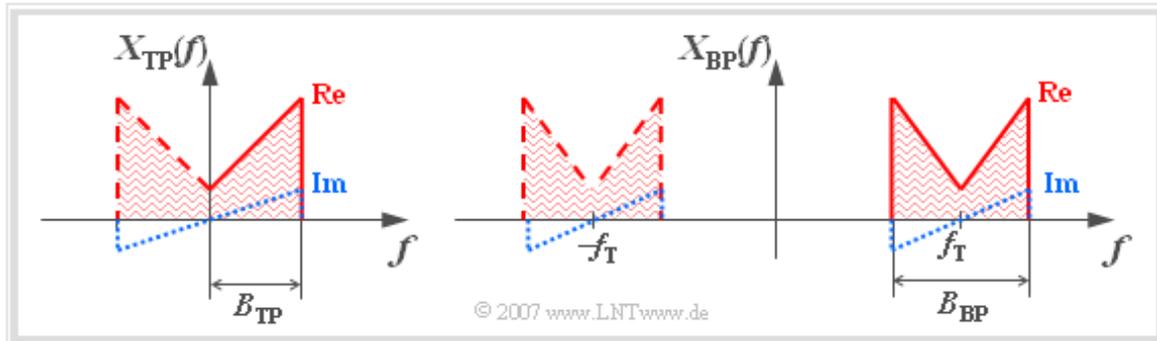
*TV-Bildsignale* weisen eine größere Bandbreite auf (z.B. 5 MHz). Auch hier erfolgt vor der Ton- und Bildübertragung eine Frequenzbandverschiebung durch Trägerfrequenzen zwischen

- 41 ... 68 / 174 ... 230 MHz (Fernsehen, VHF-Band, Kanalabstand 7 MHz),
- 470 ... 850 MHz (Fernsehen, UHF-Band, Kanalabstand 8 MHz).

Beim **GSM-Mobilfunk** liegen die Trägerfrequenzen bei 900 MHz (D-Band) bzw. 1800 MHz (E-Band). Bei *optischer Übertragung* werden die elektrischen Signale in Licht gewandelt, also auf Frequenzen zwischen ca. 200 und 350 THz (entsprechend 1.55 ... 0.85  $\mu\text{m}$  Wellenlänge).

## Eigenschaften von Bandpass-Signalen (1)

Auf dieser Seite werden – ohne Anspruch auf Vollständigkeit – einige Eigenschaften von BP-Signalen zusammengestellt und den TP-Signalen vergleichend gegenübergestellt. Dabei gehen wir von den Spektralfunktionen  $X_{TP}(f)$  und  $X_{BP}(f)$  gemäß der folgenden Skizze aus.



Zu dieser Grafik ist anzumerken:

- Die Dreiecksform der dargestellten Spektren ist rein schematisch zu verstehen und soll nur das belegte Frequenzband kennzeichnen.
- Daraus sollte nicht geschlossen werden, dass alle Frequenzen innerhalb des Bandes tatsächlich belegt sind und dass alle Spektralfunktionen linear mit der Frequenz zunehmen.
- Die zugehörigen Zeitfunktionen  $x_{TP}(t)$  und  $x_{BP}(t)$  seien vorerst reell. Das bedeutet, dass nach dem **Zuordnungssatz** die Spektralfunktionen  $X_{TP}(f)$  und  $X_{BP}(f)$  – bezogen auf die Frequenz  $f = 0$  – jeweils einen geraden Realteil und einen ungeraden Imaginärteil besitzen.
- Als Bandbreite  $B_{TP}$  bzw.  $B_{BP}$  bezeichnen wir für Tiefpass und Bandpass gleichermaßen das belegte Frequenzband bei den positiven Frequenzen (durchgezogene Kurvenverläufe).

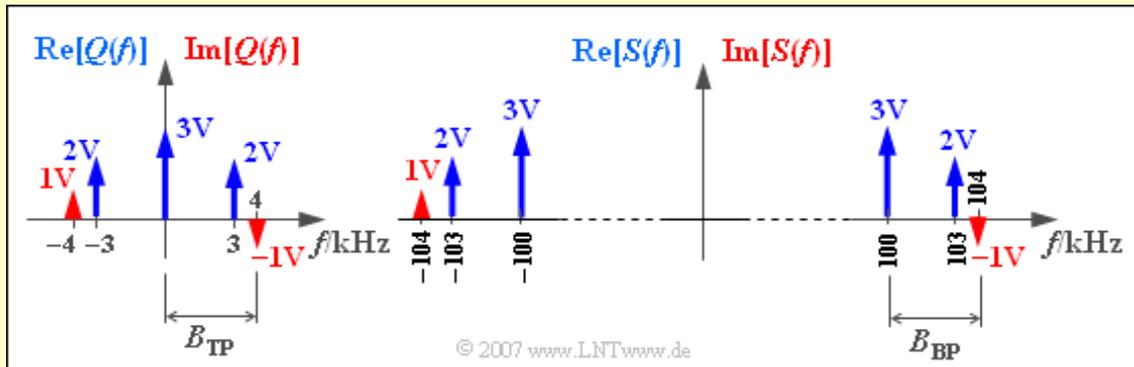
Auf der nächsten Seite folgt ein weiteres Beispiel mit diskreten Spektrallinien.

## Eigenschaften von Bandpass-Signalen (2)

**Beispiel:** Die linke Grafik zeigt das Spektrum  $Q(f)$  des Nachrichtensignals

$$q(t) = 3\text{ V} + 4\text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 3\text{ kHz} \cdot t) + 2\text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot 4\text{ kHz} \cdot t).$$

Die diskreten Spektrallinien des Realteils  $\Rightarrow \text{Re}[Q(f)]$  sind blau dargestellt und diejenigen des Imaginärteils  $\Rightarrow \text{Im}[Q(f)]$  rot.



Rechts dargestellt ist das Spektrum  $S(f)$  nach Einseitenband–Amplitudenmodulation (ESB–AM) mit der Trägerfrequenz  $f_T = 100\text{ kHz}$ . Eine Beschreibung dieses Übertragungssystems finden Sie im **Kapitel 2.3** des Buches „Modulationsverfahren“.

- Entsprechend dieser Systembeschreibung ist  $q(t)$  eindeutig ein TP–Signal, während  $s(t)$  ein BP–Signal darstellt. Die Bandbreiten sind jeweils  $B_{TP} = B_{BP} = 4\text{ kHz}$ .
- Die Signale  $q(t)$  und  $s(t)$  sind zudem reell, da sowohl  $Q(f)$  als auch  $S(f)$  einen geraden Real- und einen ungeraden Imaginärteil aufweisen.
- Würde beim Quellensignal der Gleichanteil (3 V) fehlen, so würde man sinnvollerweise  $q(t)$  noch immer als tiefpassartig bezeichnen.
- Ohne Kenntnis der Aufgabenstellung könnte man  $q(t)$  dann aber auch als BP–Signal mit der Bandbreite  $B_{BP} = 1\text{ kHz}$  auffassen.

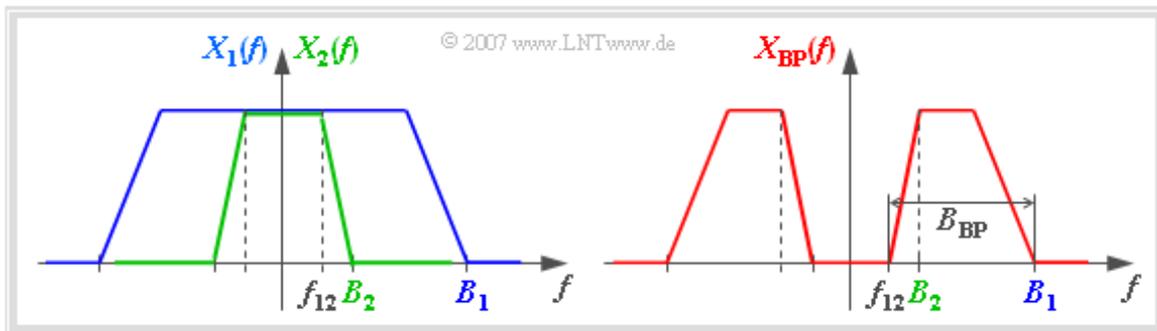
Dieses Beispiel soll zeigen, dass es kein eindeutiges mathematisches Unterscheidungsmerkmal zwischen Tiefpass– und Bandpass–Signalen gibt.

## Beschreibung eines BP-Signals mittels TP-Signalen

Wir betrachten zwei verschiedene TP-Spektren  $X_1(f)$  und  $X_2(f)$  mit den Bandbreiten  $B_1$  und  $B_2$  entsprechend der linken Grafik. Aus dieser Darstellung ist zu erkennen:

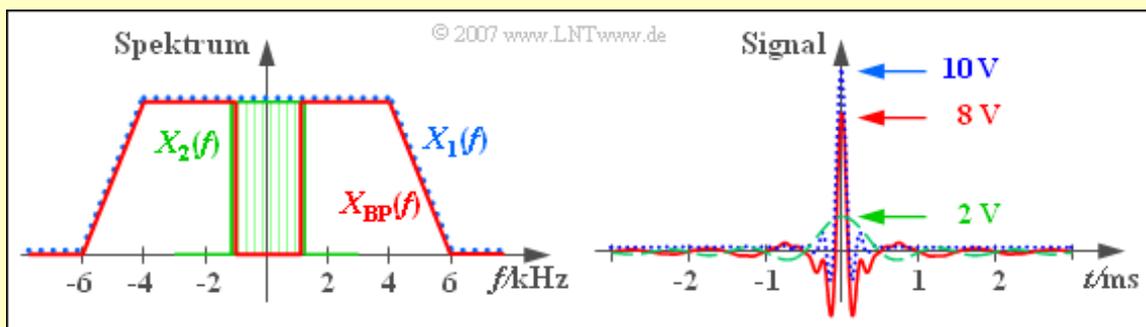
- Sind  $X_1(f)$  und  $X_2(f)$  bis zu einer Frequenz  $f_{12}$  identisch, so beschreibt die Differenz ein Bandpass-Spektrum mit Bandbreite  $B_{BP} = B_1 - f_{12}$  (rechte Grafik):  $X_{BP}(f) = X_1(f) - X_2(f)$ .
- Aufgrund der Linearität der Fouriertransformation gilt für die zum Bandpass-Spektrum  $X_{BP}(f)$  zugehörige Zeitfunktion:  $x_{BP}(t) = x_1(t) - x_2(t)$ .
- Aus der Fouriertransformation folgt allgemein, dass das Integral über die Zeitfunktion gleich dem Spektralwert bei  $f = 0$  ist. Bei jedem BP-Signal ist dieses Integral gleich 0:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_{BP}(t) dt = X_{BP}(f=0) = 0.$$



**Beispiel:** Die roten Kurven zeigen das BP-Spektrum  $X_{BP}(f)$  und die zugehörige Zeitfunktion

$$x_{BP}(t) = 10 \text{ V} \cdot \text{si}(\pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot t) \cdot \text{si}(\pi \cdot 2 \text{ kHz} \cdot t) - 2 \text{ V} \cdot \text{si}(\pi \cdot 2 \text{ kHz} \cdot t).$$



Ebenfalls dargestellt sind die zwei TP-Spektren und -Signale. Man erkennt aus diesen Bildern:

- Die blau-gepunktete Kurve (links) stellt das trapezförmige Spektrum  $X_1(f)$  dar, wobei die äquivalente Bandbreite  $\Delta f_1 = 10 \text{ kHz}$  beträgt und der Rolloff-Faktor  $r_1 = 0.2$  ist.
- Die blau-gepunktete Kurve (rechts) zeigt das dazugehörige Signal  $x_1(t)$ . Der Signalwert bei  $t = 0$  entspricht der blauen Trapezfläche des Spektrums  $X_1(f)$ :  $x_1(t = 0) = 10 \text{ V}$ .
- Die grüne Kurve gilt für das Rechtekspektrum  $X_2(f)$  mit der äquivalenten Bandbreite  $\Delta f_2 = 2 \text{ kHz}$ . Das dazugehörige Zeitsignal verläuft si-förmig und es gilt:  $x_2(t = 0) = 2 \text{ V}$ .

Die rote Kurve ergibt sich links wie rechts als Differenz zwischen blauer und grüner Kurve.

## Synthese von BP-Signalen aus dem äquivalenten TP-Signal (1)

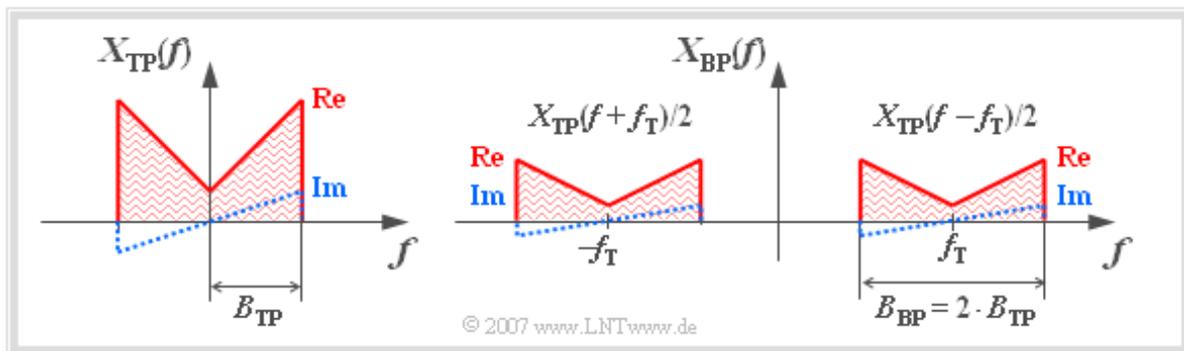
Wir betrachten ein Tiefpass-Signal  $x_{TP}(t)$  mit dem Spektrum  $X_{TP}(f)$ . Multipliziert man dieses Signal mit einer (dimensionslosen) harmonischen Schwingung

$$z(t) = \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad Z(f) = 1/2 \cdot \delta(f - f_T) + 1/2 \cdot \delta(f + f_T),$$

so ergibt sich nach dem Faltungssatz für das Spektrum des Signals  $x_{BP}(t) = x_{TP}(t) \cdot z(t)$ :

$$X_{BP}(f) = X_{TP}(f) \star Z(f) = 1/2 \cdot X_{TP}(f - f_T) + 1/2 \cdot X_{TP}(f + f_T).$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass die Faltung der Spektralfunktion  $X_{TP}(f)$  mit der verschobenen Diracfunktion  $\delta(f - f_T)$  die um  $f_T$  nach rechts verschobene Funktion  $X_{TP}(f - f_T)$  ergibt.



Aus der Spektraldarstellung (rechte Skizze) erkennt man eindeutig, dass

$$x_{BP}(t) = x_{TP}(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t)$$

ein Bandpass-Signal ist. Die Einhüllende von  $x_{BP}(t)$  ist durch den Betrag  $|x_{TP}(t)|$  gegeben.

Anwendung findet dieses Prinzip zum Beispiel bei der *Amplitudenmodulation ohne Träger*, die im Buch **Modulationsverfahren – Kapitel 2.1** eingehend behandelt wird.

Aus obiger Grafik erkennt man:

- Das Spektrum  $X_{BP}(f)$  hat im Bereich um die Trägerfrequenz  $f_T$  die gleiche Form wie  $X_{TP}(f)$  im Bereich um  $f = 0$ , ist aber gegenüber diesem um den Faktor 2 gedämpft.
- Da das TP-Spektrum  $X_{TP}(f)$  bezogen auf  $f = 0$  einen geraden Real- und einen ungeraden Imaginärteil besitzt, weist das BP-Spektrum  $X_{BP}(f)$  gleiche Symmetrieeigenschaften auf – allerdings bezogen auf die Trägerfrequenz  $f_T$ .
- Auch das BP-Spektrum  $X_{BP}(f)$  besitzt Anteile bei negativen Frequenzen. Da das zugehörige Signal  $x_{BP}(t)$  gemäß obiger Gleichung ebenfalls reell ist, muss auch  $X_{BP}(f)$  bezüglich der Frequenz  $f = 0$  einen geraden Real- und einen ungeraden Imaginärteil besitzen.
- Die Bandbreite des BP-Signals ist doppelt so groß wie die des TP-Signals:  $B_{BP} = 2 \cdot B_{TP}$ . Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Aussage ist, dass die Trägerfrequenz  $f_T$  mindestens um den Faktor 2 größer ist als die maximale Frequenz ( $B_{TP}$ ) des Signals  $x_{TP}(t)$ .

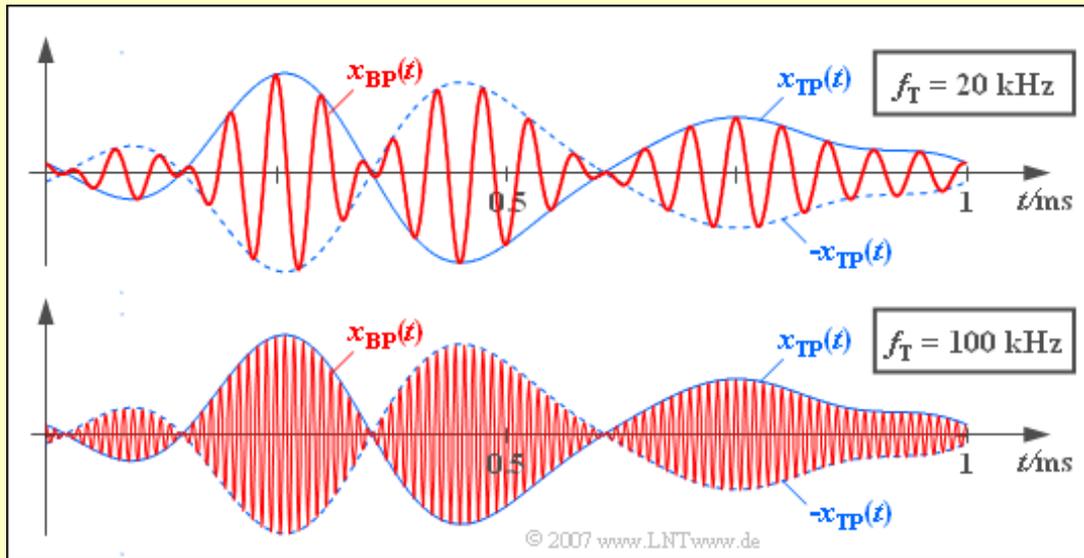
**Hinweis: Eigenschaften von Tiefpass- und Bandpass-Signalen** (Lernvideo, Dauer 5:18)

## Synthese von BP-Signalen aus dem äquivalenten TP-Signal (2)

**Beispiel:** Ein TP-Signal besitze Anteile bei  $f_1 = 1$  kHz,  $f_2 = 2$  kHz,  $f_3 = 3$  kHz und  $f_4 = 4$  kHz:

$$x_{TP}(t) = 0.26 \cdot \cos(\omega_1 t + 20^\circ) + 0.54 \cdot \cos(\omega_2 t - 180^\circ) \\ + 0.30 \cdot \cos(\omega_3 t + 120^\circ) + 0.14 \cdot \cos(\omega_4 t - 40^\circ).$$

Das dazugehörige Spektrum  $X_{TP}(f)$  ist wegen der von 0 verschiedenen Phasenlagen komplex.



Multipliziert man  $x_{TP}(t)$  mit einem Cosinussignal der Amplitude 1 und der Frequenz  $f_T = 20$  kHz, so ergibt sich das BP-Signal entsprechend dem oberen Bild. Das untere Bild gilt für das BP-Signal mit der Trägerfrequenz  $f_T = 100$  kHz. In beiden Bildern sind die Funktionsverläufe  $\pm|x_{TP}(t)|$  als Einhüllende der BP-Signale zu erkennen.

## Definition im Frequenzbereich

Wir betrachten ein reelles bandpassartiges Signal  $x(t)$  mit dem dazugehörigen BP-Spektrum  $X(f)$ , das bezüglich des Frequenznullpunktes einen geraden Real- und einen ungeraden Imaginärteil besitzt. Es wird vorausgesetzt, dass die Trägerfrequenz  $f_T$  sehr viel größer als die Bandbreite des BP-Signals  $x(t)$  ist.

**Definition:** Das zum physikalischen Signal  $x(t)$  gehörige **analytische Signal**  $x_+(t)$  ist diejenige Zeitfunktion, deren Spektrum folgende Eigenschaft erfüllt:

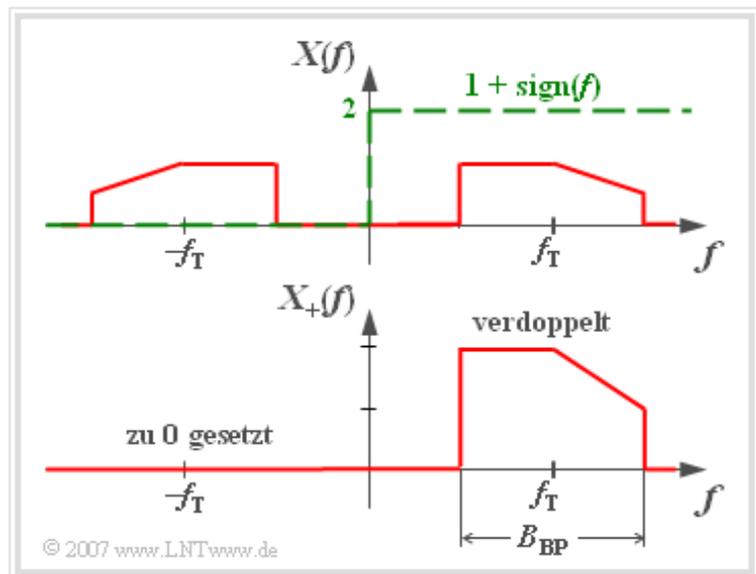
$$X_+(f) = [1 + \text{sign}(f)] \cdot X(f) = \begin{cases} 2 \cdot X(f) & \text{für } f > 0, \\ 0 & \text{für } f < 0. \end{cases}$$

Die so genannte **Signumfunktion** ist dabei für positive Werte von  $f$  gleich  $+1$  und für negative  $f$ -Werte gleich  $-1$ . Der (beidseitige) Grenzwert liefert  $\text{sign}(0) = 0$ .

Aus der Abbildung erkennt man die Berechnungsvorschrift für  $X_+(f)$ : Das tatsächliche BP-Spektrum  $X(f)$  wird

- bei den positiven Frequenzen verdoppelt, und
- bei den negativen Frequenzen zu Null gesetzt.

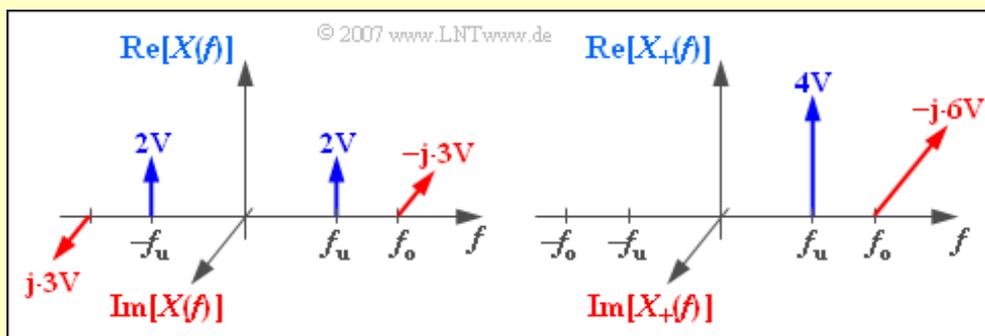
Der Index „+“ soll deutlich machen, dass  $X_+(f)$  nur Anteile bei positiven Frequenzen besitzt.



**Beispiel:** Das nachfolgende Bild zeigt links das (komplexe) Spektrum  $X(f)$  des BP-Signals

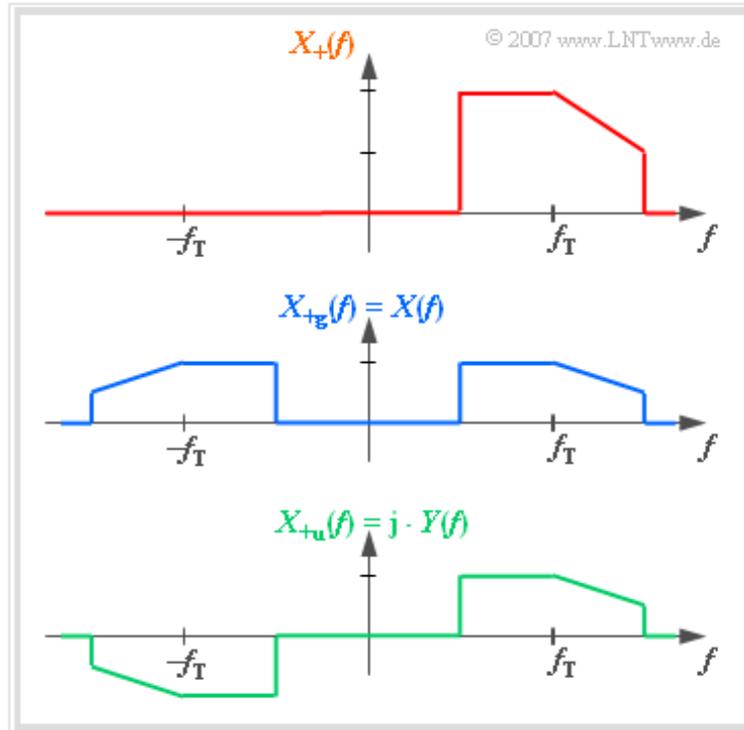
$$x(t) = 4V \cdot \cos(2\pi f_u t) + 6V \cdot \sin(2\pi f_o t).$$

Rechts daneben ist das Spektrum des dazugehörigen analytischen Signals dargestellt.



## Allgemeingültige Berechnungsvorschrift im Zeitbereich (1)

Wir betrachten nun das Spektrum  $X_+(f)$  etwas genauer und teilen dieses in einen bezüglich  $f = 0$  geraden und einen ungeraden Anteil auf:  $X_+(f) = X_{+g}(f) + X_{+u}(f)$ . Alle diese Spektren sind im Allgemeinen komplex.



Berücksichtigt man den **Zuordnungssatz** der Fouriertransformation, so sind anhand der Grafik folgende Aussagen möglich:

- Der gerade Anteil  $X_{+g}(f)$  von  $X_+(f)$  führt nach der Fouriertransformation zu einem rein reellen Zeitsignal, der ungerade Anteil  $X_{+u}(f)$  zu einem rein imaginären.
- Es ist offensichtlich, dass  $X_{+g}(f)$  gleich dem tatsächlichen Fourierspektrum  $X(f)$  und damit der Realteil von  $x_+(t)$  gleich dem vorgegebenen BP-Signal  $x(t)$  ist.
- Bezeichnen wir den Imaginärteil mit  $y(t)$ , so lautet das analytische Signal:

$$x_+(t) = x(t) + j \cdot y(t).$$

- Nach den allgemein gültigen Gesetzen der Fouriertransformation entsprechend dem Kapitel 3.3 gilt somit für die Spektralfunktion des Imaginärteils:

$$j \cdot Y(f) = X_{+u}(f) = \text{sign}(f) \cdot X(f) \Rightarrow Y(f) = \frac{\text{sign}(f)}{j} \cdot X(f).$$

- Transformiert man diese Gleichung in den Zeitbereich, so wird aus der Multiplikation die Faltungsoperation, und man erhält:

$$y(t) = \frac{1}{\pi t} \star x(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

## Allgemeingültige Berechnungsvorschrift im Zeitbereich (2)

An dieser Stelle ist es erforderlich, kurz auf eine weitere Spektraltransformation einzugehen, die im Buch **Lineare zeitvariante Systeme** noch eingehend behandelt wird.

**Definition:** Für die **Hilberttransformierte**  $H\{ \dots \}$  einer Zeitfunktion  $x(t)$  gilt:

$$y(t) = H\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Dieses bestimmte Integral ist nicht auf einfache, herkömmliche Art lösbar, sondern muss mit Hilfe des Cauchy-Hauptwertsatzes ausgewertet werden. Entsprechend gilt im Frequenzbereich:

$$Y(f) = -j \cdot \text{sign}(f) \cdot X(f).$$

Das Ergebnis der letzten Seite lässt sich mit dieser Definition wie folgt zusammenfassen:

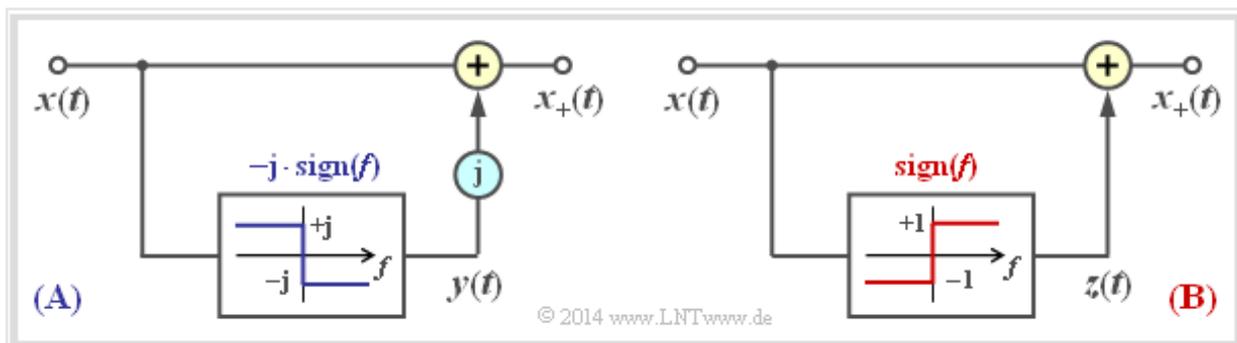
- Man erhält aus dem realen, physikalischen BP-Signal  $x(t)$  das analytische Signal  $x_+(t)$ , indem man zu  $x(t)$  einen Imaginärteil entsprechend der Hilberttransformierten hinzufügt:

$$x_+(t) = x(t) + j \cdot H\{x(t)\}.$$

- Die Hilberttransformierte  $H\{x(t)\}$  verschwindet nur für das Gleichsignal  $x(t) = \text{const.}$  Bei allen anderen Signalformen ist das analytische Signal  $x_+(t)$  somit stets komplex.
- Aus dem analytischen Signal  $x_+(t)$  kann das reale BP-Signal in einfacher Weise durch Realteilbildung ermittelt werden:

$$x(t) = \text{Re}\{x_+(t)\}.$$

Das Prinzip der Hilbert-Transformation wird durch die untere Grafik nochmals verdeutlicht. Nach der linken Darstellung (A) kommt man vom physikalischen Signal  $x(t)$  zum analytischen Signal  $x_+(t)$ , indem man einen Imaginärteil  $j \cdot y(t)$  hinzufügt. Hierbei ist  $y(t) = H[x(t)]$  eine reelle Zeitfunktion, die sich am einfachsten im Spektralbereich durch die Multiplikation des Spektrums  $X(f)$  mit „ $-j \cdot \text{sign}(f)$ “ angeben lässt.



Die rechte Darstellung (B) ist äquivalent zu (A). Nun gilt  $x_+(t) = x(t) + z(t)$  mit der rein imaginären Funktion  $z(t)$ . Ein Vergleich der beiden Bilder zeigt, dass tatsächlich  $z(t) = j \cdot y(t)$  ist.

## Zeigerdiagrammdarstellung der harmonischen Schwingung

Die Spektralfunktion  $X(f)$  einer harmonischen Schwingung  $x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_T t - \varphi)$  besteht bekanntlich aus zwei Diracfunktionen bei den Frequenzen

- $+f_T$  mit dem komplexen Gewicht  $A/2 \cdot \exp(-j \cdot \varphi)$ ,
- $-f_T$  mit dem komplexen Gewicht  $A/2 \cdot \exp(+j \cdot \varphi)$ .

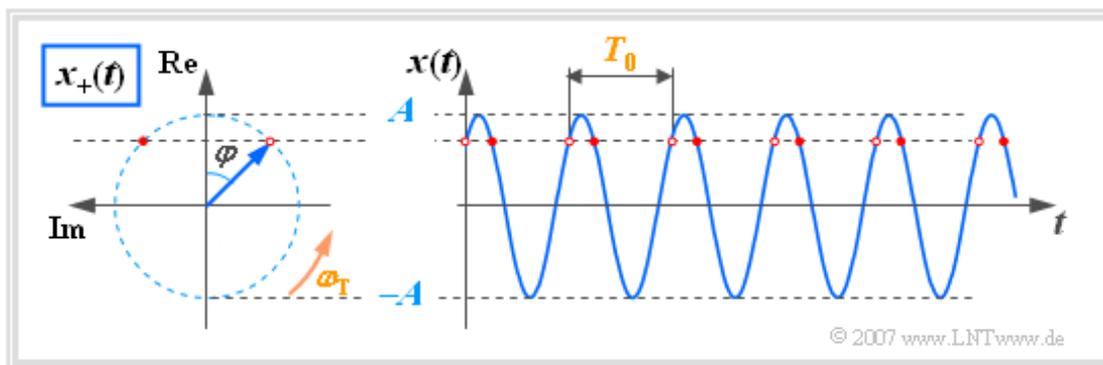
Somit lautet das Spektrum des analytischen Signals:

$$X_+(f) = A \cdot e^{-j\varphi} \cdot \delta(f - f_T).$$

Die dazugehörige Zeitfunktion erhält man durch Anwendung des **Verschiebungssatzes**:

$$x_+(t) = A \cdot e^{j(2\pi f_T t - \varphi)}.$$

Diese Gleichung beschreibt einen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_T = 2\pi f_T$  drehenden Zeiger. Aus Darstellungsgründen ist im folgenden Bild das Koordinatensystem entgegen der üblichen Darstellung um  $90^\circ$  nach links gedreht (Realteil nach oben, Imaginärteil nach links).



Anhand dieser Grafik sind folgende Aussagen möglich:

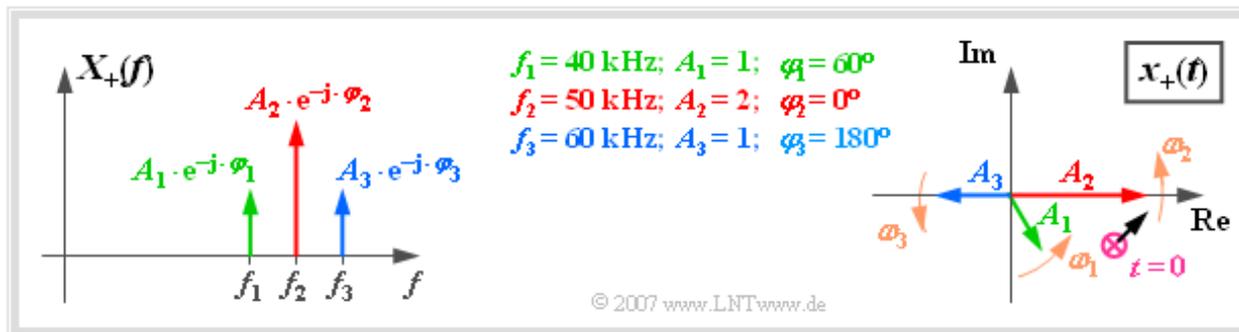
- Zum Startzeitpunkt  $t = 0$  liegt der Zeiger der Länge  $A$  (Signalamplitude) mit dem Winkel  $-\varphi$  in der komplexen Ebene. Im gezeichneten Beispiel gilt  $\varphi = 45^\circ$ .
- Für Zeiten  $t > 0$  dreht der Zeiger mit konstanter Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz)  $\omega_T$  in mathematisch positiver Richtung, das heißt entgegen dem Uhrzeigersinn.
- Die Spitze des Zeigers liegt somit stets auf einem Kreis mit Radius  $A$  und benötigt für eine Umdrehung genau die Zeit  $T_0$ , also die Periodendauer.
- Die Projektion des analytischen Signals  $x_+(t)$  auf die reelle Achse, durch rote Punkte markiert, liefert die Augenblickswerte des tatsächlichen, reellen BP-Signals  $x(t)$ .

## Zeigerdiagramm einer Summe harmonischer Schwingungen

Für die weitere Beschreibung gehen wir von folgendem Spektrum des analytischen Signals aus:

$$X_+(f) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{-j\varphi_i} \cdot \delta(f - f_i).$$

Das linke Bild zeigt ein solches Spektrum für das Beispiel  $I = 3$ . Wählt man  $I$  relativ groß und den Abstand zwischen benachbarten Spektrallinien entsprechend klein, so können mit obiger Gleichung aber auch kontinuierliche Spektralfunktionen angenähert werden.



Im rechten Bild ist die dazugehörige Zeitfunktion angedeutet. Diese lautet allgemein:

$$x_+(t) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{j(\omega_i \cdot t - \varphi_i)}.$$

Zu dieser Grafik ist Folgendes anzumerken:

- Die Skizze zeigt die Ausgangslage der Zeiger zum Startzeitpunkt  $t = 0$  entsprechend den Amplituden  $A_i$  und Phasenlagen  $\varphi_i$ .
- Die Spitze des resultierenden Zeigerverbundes ist durch das violette Kreuz markiert. Man erhält durch vektorielle Addition der drei Einzelzeiger für den Zeitpunkt  $t = 0$ :

$$x_+(t) = 1 \cdot \cos(60^\circ) - 1 \cdot j \cdot \sin(60^\circ) + 2 + 1 \cdot \cos(180^\circ) = 1.500 - j \cdot 0.866.$$

- Für Zeiten  $t > 0$  drehen die drei Zeiger mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_i = 2\pi f_i$ . Der rote Zeiger dreht schneller als der grüne, aber langsamer als der blaue Zeiger.
- Da alle Zeiger entgegen dem Uhrzeigersinn drehen, wird sich auch der resultierende Zeiger  $x_+(t)$  tendenziell in diese Richtung bewegen. Zum Zeitpunkt  $t = 1 \mu\text{s}$  liegt die Spitze des resultierenden Zeigers für die angegebenen Parameterwerte bei

$$\begin{aligned} x_+(t = 1 \mu\text{s}) &= 1 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} \cdot e^{j 2\pi \cdot 40 \cdot 0.001} + 2 \cdot e^{j 2\pi \cdot 50 \cdot 0.001} - 1 \cdot e^{j 2\pi \cdot 60 \cdot 0.001} \\ &= 1 \cdot e^{-j \cdot 45.6^\circ} + 2 \cdot e^{j \cdot 18^\circ} - 1 \cdot e^{j \cdot 21.6^\circ} \approx 1.673 - j \cdot 0.464. \end{aligned}$$

- Die resultierende Zeigerspitze liegt nun aber nicht wie bei einer einzigen harmonischen Schwingung auf einem Kreis, sondern es entsteht eine komplizierte geometrische Figur.

Das folgende Interaktionsmodul zeigt  $x_+(t)$  für die Summe dreier harmonischer Schwingungen:

### Zeigerdiagramm – Darstellung des analytischen Signals

## Motivation

Bei vielen Nachrichtenübertragungssystemen wird das niederfrequente Quellensignal  $q(t)$  in ein BP-Signal  $s(t)$  umgesetzt (**Modulation**). Nach der Übertragung muss das Empfangssignal  $r(t)$  – gegenüber dem Sendesignal  $s(t)$  eventuell verzerrt und mit (Rausch-)Störungen beaufschlagt – wieder in den ursprünglichen Frequenzbereich zurückgesetzt werden (**Demodulation**). Das Sinkensignal  $v(t)$ , das möglichst gut mit  $q(t)$  übereinstimmen sollte, ist wieder ein TP-Signal.



© 2007 www.LNTwww.de

Modulation und Demodulation sind fundamentale Komponenten eines Übertragungssystems, die im Buch **Modulationsverfahren** eingehend behandelt werden. Eine kurze Zusammenfassung finden Sie im **Kapitel 1** des vorliegenden Buches.

Untersuchung, Simulation, Optimierung und Dimensionierung von Bandpass-Systemen erfolgen meistens im **äquivalenten Tiefpassbereich**, wofür folgende Gründe genannt werden können:

- Sind Qualitätsmerkmale (Bandbreiteneffizienz, Signal-zu-Rauschverhältnis, Bitfehlerrate, Leistungsbedarf, usw.) eines Tiefpass-Systems bekannt, so lassen sich die entsprechenden Werte verwandter Bandpass-Systeme daraus relativ einfach herleiten. Beispiele hierfür sind die digitalen Modulationsverfahren *Amplitude Shift Keying (ASK)* und *Binary Phase Shift Keying (BPSK)*, deren Performance-Größen aus dem vergleichbaren Basisbandsystem (also ohne Modulator und Demodulator) „hochgerechnet“ werden können.
- Einzelne Teilkanäle bei einem sog. *Frequenzmultiplexsystem*, die sich durch verschiedene Trägerfrequenzen unterscheiden, können oft als qualitativ gleichwertig angesehen werden. Deshalb genügt es, die Berechnung und Dimensionierung auf einen einzigen Kanal zu beschränken und diese Untersuchungen im äquivalenten Tiefpass-Bereich – das heißt ohne Berücksichtigung der spezifischen Trägerfrequenz – durchzuführen.
- Häufig ist es so, dass die Bandbreite einer Nachrichtenverbindung um Größenordnungen kleiner ist als die Trägerfrequenz. So liegen beispielsweise beim *GSM-Mobilfunk* die einzelnen Kanäle im Frequenzbereich um 900 MHz (D-Netz) bzw. 1800 MHz (E-Netz), während jedem Kanal nur eine geringe Bandbreite von 200 kHz zur Verfügung steht. Deshalb ist eine Simulation im äquivalenten TP-Bereich sehr viel weniger aufwändig als eine Simulation der entsprechenden BP-Signale.

## Definition im Frequenzbereich (1)

Wir betrachten ein reelles BP-Signal  $x(t)$  mit dem Spektrum  $X(f)$ . Weiterhin soll gelten:

- Das BP-Signal  $x(t)$  sei aus der Modulation eines niederfrequenten Nachrichtensignals  $q(t)$  mit dem Trägersignal  $z(t)$  der Frequenz  $f_T$  entstanden.
- Die Art der Modulation (ob analog oder digital, Amplituden- oder Winkelmodulation, Einseitenband oder Zweiseitenband) sei nicht festgelegt.
- Die Spektralfunktion  $X_+(f)$  des dazugehörigen analytischen Signals  $x_+(t)$  existiert nur für positive Frequenzen und ist hier doppelt so groß wie  $X(f)$ .
- Die Spektralfunktion  $X_+(f)$  ist unabhängig von der Trägerfrequenz  $f_T$ .

**Definition:** Verschiebt man das Spektrum des analytischen Signals  $x_+(t)$  um  $f_T$  nach links, so bezeichnet man das Ergebnis als das **Spektrum des äquivalenten Tiefpass-Signals**:

$$X_{TP}(f) = X_+(f + f_T).$$

Im Allgemeinen sind  $X(f)$ ,  $X_+(f)$  und  $X_{TP}(f)$  komplexwertig. Ist allerdings  $X(f)$  rein reell, so sind auch die Spektralfunktionen  $X_+(f)$  und  $X_{TP}(f)$  rein reell, weil sich diese aus  $X(f)$  nur aus den Operationen „Abschneiden und Verdoppeln“ bzw. „Frequenzverschiebung“ ergeben.

Bei der Berechnung des äquivalenten TP-Spektrums  $X_{TP}(f)$  ist – im Gegensatz zu  $X_+(f)$  – die Kenntnis der Trägerfrequenz  $f_T$  unbedingt erforderlich. Für andere Werte von  $f_T$  ergeben sich auch andere Tiefpass-Spektren.

Transformiert man obige Gleichung in den Zeitbereich, so erhält man:

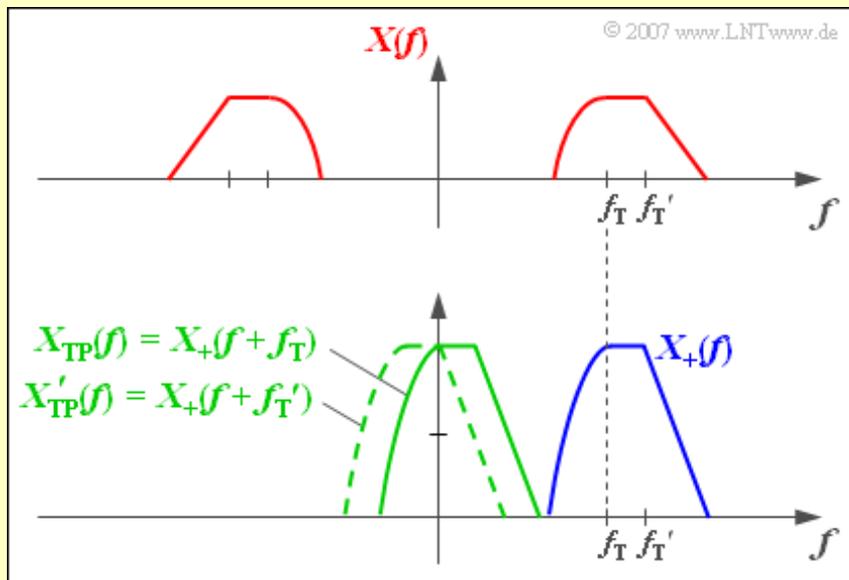
$$x_{TP}(t) = x_+(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f_T \cdot t}.$$

Mit der Beziehung  $x(t) = \text{Re}[x_+(t)]$  ergibt sich die Vorgehensweise, wie aus dem äquivalenten TP-Signal das tatsächliche, physikalische Bandpass-Signal berechnet werden kann:

$$x(t) = \text{Re}[x_+(t)] = \text{Re}[x_{TP}(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f_T \cdot t}].$$

## Definition im Frequenzbereich (2)

**Beispiel:** Das folgende Bild zeigt oben die rein reelle Spektralfunktion  $X(f)$  eines BP-Signals  $x(t)$ , das aus der Modulation eines niederfrequenten Signals  $q(t)$  mit der Trägerfrequenz  $f_T$  entstanden sei.



Darunter dargestellt sind die beiden ebenfalls reellen Spektralfunktionen  $X_+(f)$  und  $X_{TP}(f)$ . Aufgrund der Unsymmetrien bezüglich des Frequenzursprungs ( $f = 0$ ) sind die zugehörigen Zeitfunktionen komplex.

- Die durchgezogen-grün dargestellte Spektralfunktion  $X_{TP}(f)$  ist gegenüber  $X_+(f)$  um die Trägerfrequenz  $f_T$  nach links verschoben.
- Wäre das Spektrum  $X(f)$  aber das Modulationsergebnis eines anderen Nachrichtensignals  $q'(t)$  mit einer anderen Trägerfrequenz  $f_T'$ , so würde sich auch ein anderes äquivalentes TP-Signal ergeben, dessen Spektralfunktion in obiger Grafik gestrichelt eingezeichnet ist.

## Beschreibung im Zeitbereich (1)

Zur Vereinfachung der Darstellung gehen wir von einem Linienspektrum aus, so dass man das analytische Signal als Summe von komplexen Drehzeigern (als Zeigerverbund) darstellen kann:

$$X_+(f) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{-j\varphi_i} \cdot \delta(f - f_i) \quad \bullet \longrightarrow \circ \quad x_+(t) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{j(2\pi f_i t - \varphi_i)}.$$

Durch die Frequenzverschiebung um  $f_T$  nach links lautet somit das äquivalente TP-Signal im Frequenz- und Zeitbereich:

$$X_{\text{TP}}(f) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{-j\varphi_i} \cdot \delta(f - \nu_i) \quad \bullet \longrightarrow \circ \quad x_{\text{TP}}(t) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{j(2\pi \nu_i t - \varphi_i)}.$$

Zwischen den Frequenzwerten  $f_i$  und  $\nu_i$  gilt folgender Zusammenhang ( $i = 1, \dots, I$ ):

$$\nu_i = f_i - f_T.$$

Diese Gleichungen können wie folgt interpretiert werden:

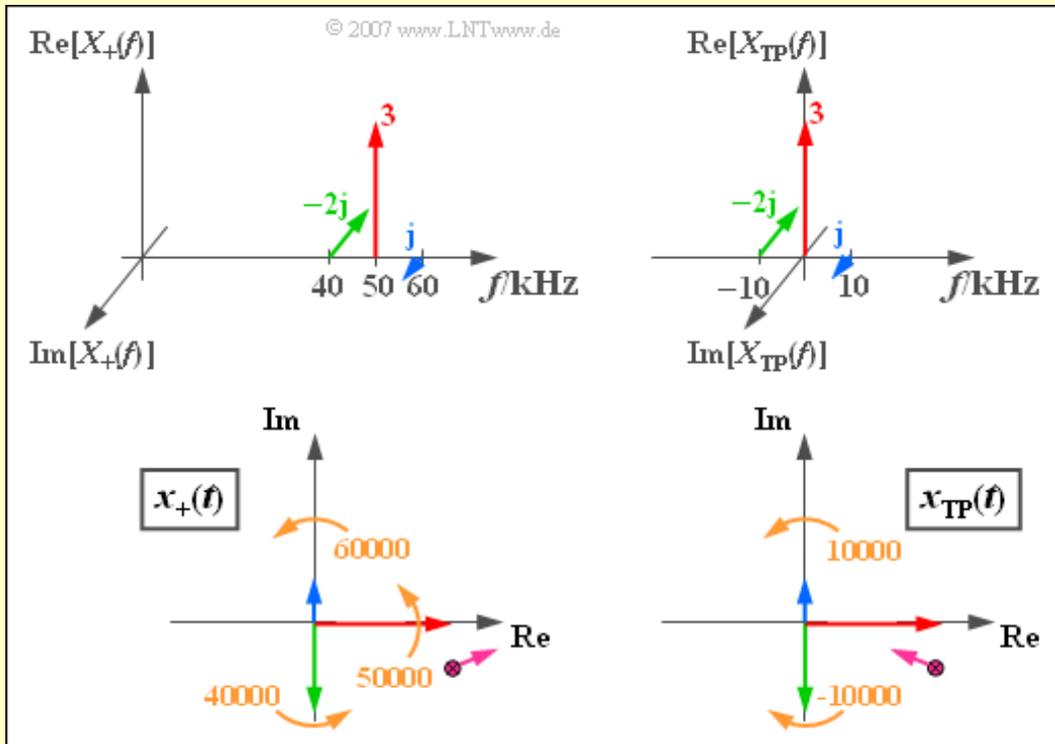
- Zur Zeit  $t = 0$  ist das äquivalente Tiefpass-Signal identisch mit dem analytischen Signal:

$$x_{\text{TP}}(t = 0) = x_+(t = 0) = \sum_{i=1}^I A_i \cdot e^{-j\varphi_i}.$$

- Zu diesem Zeitpunkt ist der Zeigerverbund allein durch die  $I$  Amplitudenparameter  $A_i$  und die  $I$  Phasenlagen  $\varphi_i$  festgelegt.
- Zur Wiederholung aus dem vorherigen Kapitel 4.2: Alle Zeiger des analytischen Signals  $x_+(t)$  drehen entsprechend den Frequenzen  $f_i$  entgegen dem Uhrzeigersinn.
- Beim äquivalenten TP-Signal sind die Drehgeschwindigkeiten geringer. Zeiger mit  $\nu_i > 0$  drehen in mathematisch positiver Richtung, solche mit  $\nu_i < 0$  im Uhrzeigersinn.
- Ist der Frequenzparameter  $\nu_i$  eines Zeigers gleich 0, so ruht dieser Zeiger in der komplexen Ebene entsprechend seiner Ausgangslage.

## Beschreibung im Zeitbereich (2)

**Beispiel:** Wir betrachten ein aus drei Spektrallinien bei 40 kHz, 50 kHz und 60 kHz bestehendes Spektrum  $X_+(f)$ . Mit den aus der Grafik erkennbaren Amplituden- und Phasenparametern erhält man das analytische Signal  $x_+(t)$  entsprechend der unteren linken Skizze.



Die Momentaufnahme der linken unteren Grafik  $\Rightarrow$  **analytisches Signal  $x_+(t)$**  gilt für die Zeit  $t = 0$ . Alle Zeiger drehen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit entgegen dem Uhrzeigersinn.

- Der blaue Zeiger dreht hierbei mit 60000 Umdrehungen pro Sekunde am schnellsten und der grüne Zeiger mit der Kreisfrequenz  $\omega_{40} = 2\pi \cdot 40000$  1/s am langsamsten.
- Der violette Summenpunkt aller drei Zeiger bewegt sich für  $t > 0$  in der komplexen Ebene in komplizierter Weise, bei obigen Zahlenwerten zuerst in die eingezeichnete Richtung.

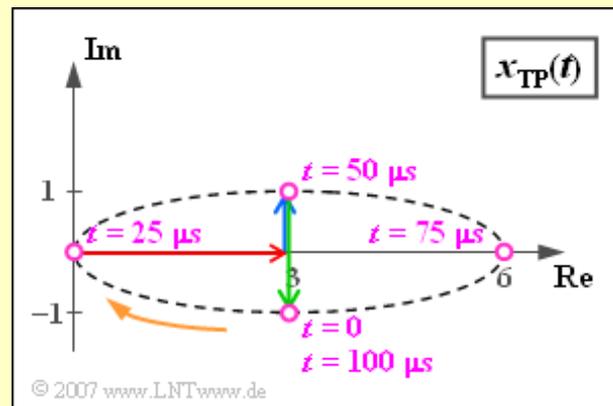
Die rechten Grafiken beschreiben das **äquivalente TP-Signal** im Frequenzbereich (oben) und im Zeitbereich (unten), gültig für  $f_T = 50$  kHz.

- Der Träger liegt nun bei  $f = 0$  und der dazugehörige rote Drehzeiger bewegt sich nicht.
- Der blaue Zeiger (OSB) dreht hier mit  $\omega_{10} = 2\pi \cdot 10000$  1/s entgegen dem Uhrzeigersinn.
- Der grüne Zeiger (USB) dreht mit gleicher Geschwindigkeit entgegengesetzt ( $-\omega_{10}$ ).

## Definition der Ortskurve

**Beispiel:** Wir betrachten das äquivalente TP-Signal  $x_{TP}(t)$  des letzten Beispiels, bestehend aus

- dem ruhenden Zeiger mit der Länge 3 (rot)
- dem mit  $\omega_{10} = 2\pi \cdot 10000$  1/s in mathematisch positiver Richtung rotierenden blauen Zeiger mit der komplexen Amplitude  $j$ ,
- den grünen Zeiger der Länge 2, der zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Richtung der negativen imaginären Achse liegt. Dieser dreht sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{10}$  wie der blaue Zeiger, aber in umgekehrter Richtung ( $-\omega_{10}$ ).



Der blaue Zeiger und der grüne Zeiger benötigen für eine Umdrehung jeweils genau eine Periodendauer  $T_0 = 100 \mu\text{s}$ . Der weitere Verlauf kann obiger Darstellung entnommen werden:

- Die violett eingezeichnete Zeigersumme ist zum Zeitpunkt  $t = 0$  gleich  $3 - j$ .
- Nach  $t = T_0/4 = 25 \mu\text{s}$  hat der resultierende Zeiger den Wert 0, da nun die beiden rotierenden Zeiger in Gegenrichtung zum Träger liegen.
- Nach einer Periodendauer ( $t = T_0 = 100 \mu\text{s}$ ) ist wieder der Ausgangszustand erreicht, das heißt, es gilt  $x_{TP}(t = T_0) = x_{TP}(t = 0) = 3 - j$ .

**Definition:** Der Kurvenzug, auf dem sich das äquivalente Tiefpass-Signal  $x_{TP}(t)$  in der komplexen Ebene bewegt, wird im Folgenden als **Ortskurve** bezeichnet.

Im Beispiel ist die Ortskurve eine Ellipse, die vom äquivalenten TP-Signal pro Periodendauer einmal durchlaufen wird. Die Darstellung gilt für die Zweiseitenband-Amplitudenmodulation (ZSB-AM) eines sinusförmigen 10 kHz-Signals mit einem cosinusförmigen Träger beliebiger Frequenz, wobei das obere Seitenband (blauer Zeiger) gedämpft ist.

Wären die Längen des blauen und des grünen Drehzeigers gleich, so ergäbe sich als Ortskurve eine Horizontale auf der reellen Achse – siehe **Aufgabe A4.5**. Im Buch „Modulationsverfahren“ werden die Ortskurven verschiedener Systemvarianten noch eingehend behandelt.

## Darstellung nach Betrag und Phase

Das äquivalente TP-Signal ist im Allgemeinen komplex und kann deshalb auch in der Form

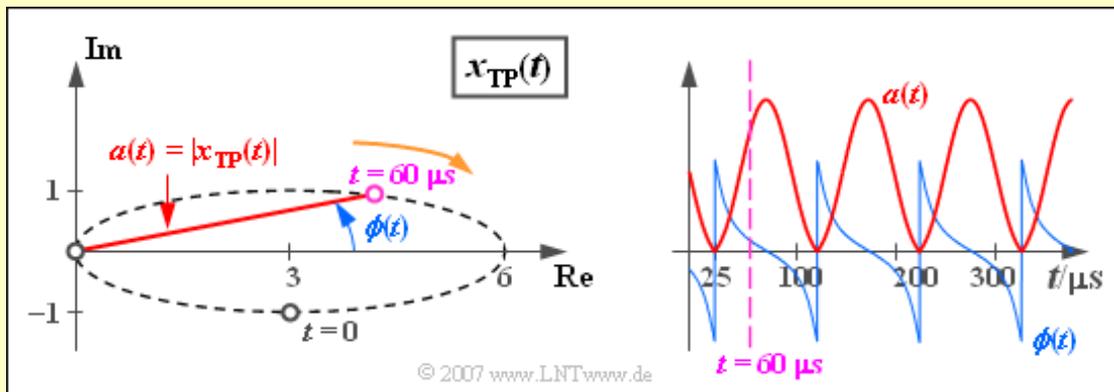
$$x_{\text{TP}}(t) = a(t) \cdot e^{j\phi(t)}$$

dargestellt werden. Zu beachten ist das Pluszeichen im Argument der Exponentialfunktion, das sich von der komplexen Fourierreihendarstellung unterscheidet: Man verwendet nämlich bei der Beschreibung der Modulationsverfahren auch für das physikalische Signal meist die Gleichung mit dem positiven Vorzeichen:

$$s(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_{\text{T}}t + \phi(t)).$$

In vielen Lehrbüchern wird diese Gleichung je nach Anwendung mit Plus- oder Minuszeichen benutzt, aber stets mit gleichem Phasenbezeichner. Durch die Verwendung zweier verschiedener Symbole ( $\varphi$  und  $\phi$ ) versuchen wir in LNTwww, diese Doppeldeutigkeit zu umgehen.

**Beispiel (Fortsetzung):** Die Grafik bezieht sich wieder auf das **Beispiel** der letzten Seite.



Zu dieser Darstellung ist anzumerken:

Die **Betragsfunktion** gibt die Zeitabhängigkeit der Zeigerlänge wieder:

$$a(t) = |x_{\text{TP}}(t)| = \sqrt{\text{Re}[x_{\text{TP}}(t)]^2 + \text{Im}[x_{\text{TP}}(t)]^2}.$$

$a(t)$  ist wie  $x_{\text{TP}}(t)$  periodisch mit  $T_0$  und nimmt im Beispiel Werte zwischen 0 und 6 an.

Die **Phasenfunktion** beschreibt den zeitabhängigen Winkel des äquivalenten TP-Signals  $x_{\text{TP}}(t)$ , bezogen auf den Koordinatenursprung:

$$\phi(t) = \text{arc}[x_{\text{TP}}(t)] = \arctan \frac{\text{Im}[x_{\text{TP}}(t)]}{\text{Re}[x_{\text{TP}}(t)]}.$$

Hier noch einige numerische Ergebnisse für die Phasenwerte:

- Die Phase im Startzeitpunkt ist  $\phi(t=0) = -\arctan(1/3) \approx -18.43^\circ = -0.32 \text{ rad}$ .
- Bei  $t = 25 \mu\text{s}$  sowie zu allen äquidistanten Zeiten davon im Abstand  $T_0 = 100 \mu\text{s}$  ist  $x_{\text{TP}}(t) = 0$ , so dass zu diesen Zeitpunkten die Phase  $\phi(t)$  von  $-\pi/2$  auf  $+\pi/2$  springt.
- Zum violett eingezeichneten Zeitpunkt  $t = 60 \mu\text{s}$  hat die Phase einen leicht positiven Wert.

## Zusammenhang zwischen äquivalentem TP- und BP-Signal (1)

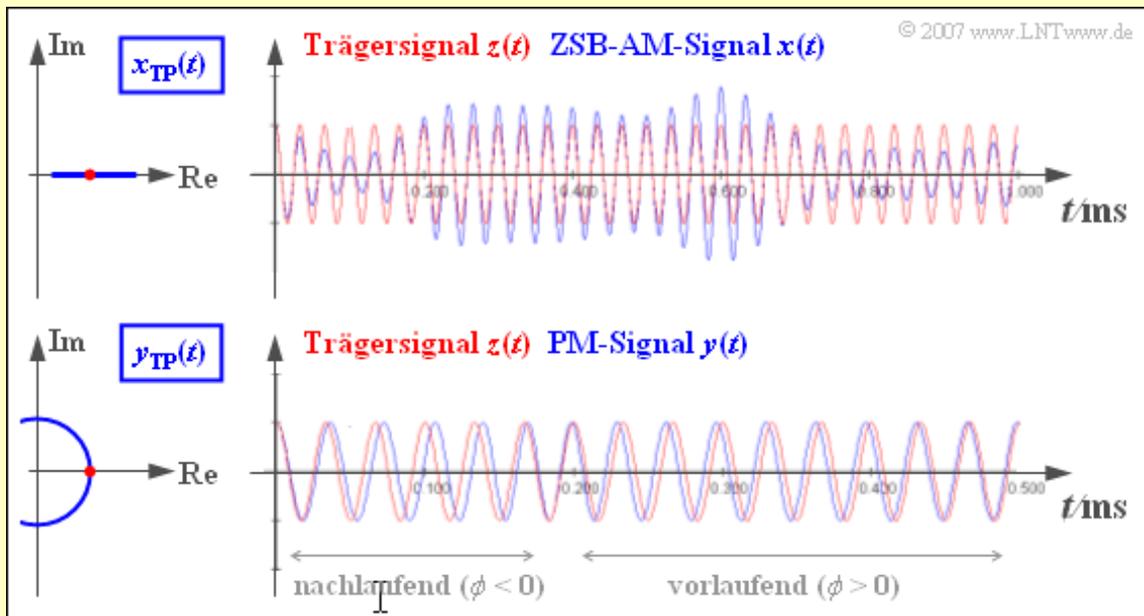
Ein BP-Signal  $x(t)$ , das sich aus der Modulation eines niederfrequenten Nachrichtensignals  $q(t)$  mit einem Trägersignal  $z(t)$  der Frequenz  $f_T$  ergeben hat, kann wie folgt dargestellt werden:

$$x(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_T t + \phi(t)) \Rightarrow x_{TP}(t) = a(t) \cdot e^{j\phi(t)}.$$

Hierbei bedeuten:

- $a(t)$  ist die **zeitabhängige Amplitude**, die oft als **Hüllkurve** bezeichnet wird. Diese ist gleich dem Betrag  $|x_{TP}(t)|$  des äquivalenten TP-Signals.
- $\phi(t)$  ist die **zeitabhängige Phase**, die ebenfalls aus dem äquivalenten TP-Signal als der Winkel zum Koordinatenursprung der komplexen Ebene ermittelt werden kann.
- Die Phase  $\phi(t)$  erkennt man im physikalischen Signal  $x(t)$  an den **Nulldurchgängen**. Bei  $\phi(t) > 0$  tritt der Nulldurchgang in  $x(t)$  früher auf als beim Trägersignal  $z(t)$ . Dagegen bedeutet  $\phi(t) < 0$  eine Verschiebung des Nulldurchgangs auf einen späteren Zeitpunkt.
- Steckt die gesamte Information über das Nachrichtensignal in  $a(t)$  und  $\phi(t)$  ist konstant, so spricht man von *Amplitudenmodulation*. Dagegen ist bei *Phasenmodulation* die Hüllkurve  $a(t)$  konstant, während  $\phi(t)$  die gesamte Information über das Nachrichtensignal beinhaltet.

**Beispiel:** Im oberen Diagramm sehen Sie das reelle äquivalente TP-Signal  $x_{TP}(t)$  bei ZSB-AM (Zweiseitenband-Amplitudenmodulation). Die Ortskurve ist eine horizontale Gerade, und die Nulldurchgänge des blauen ZSB-AM-Signals  $x(t)$  stimmen mit denen des roten Trägersignals  $z(t)$  exakt überein. Die Hüllkurve  $a(t)$  beinhaltet alle Information über das Nachrichtensignal.



Die untere Grafik gilt für Phasenmodulation (PM). Das PM-Signal  $y(t)$  hat eine konstante Einhüllende. Die Ortskurve ist ein Kreisbogen. Zu Beginn ist der Phasenwert kleiner 0, sodass die Nulldurchgänge später auftreten als beim Trägersignal  $z(t) \Rightarrow$  „nachlaufend“. Bei positiven Werten des Nachrichtensignals gilt auch  $\phi(t) > 0 \Rightarrow$  die Nulldurchgänge treten früher auf als beim Trägersignal  $\Rightarrow$  „vorlaufend“. Bei Phasenmodulation steckt also die gesamte Information über das Nachrichtensignal  $q(t)$  in den Lagen der Nulldurchgänge.

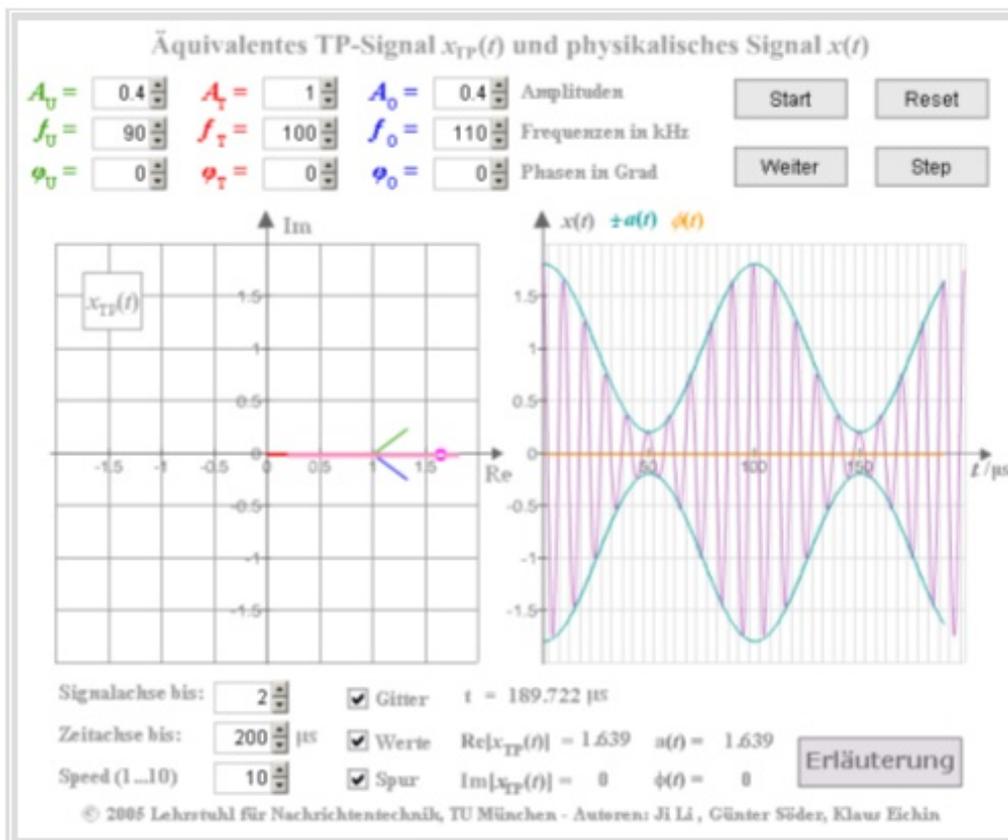
## Zusammenhang zwischen äquivalentem TP- und BP-Signal (2)

Abschließend – hoffentlich nicht zu spät – wollen wir uns noch der Frage zuwenden, warum die beiden komplexen und im Verständnis komplizierteren Signale  $x_+(t)$  und  $x_{TP}(t)$  zur Beschreibung des tatsächlichen Bandpass-Signals  $x(t)$  eigentlich notwendig sind. Sie wurden nicht deshalb in der Nachrichtentechnik eingeführt, um Studierende zu verunsichern, sondern:

- Hüllkurve  $a(t)$  und Phase  $\phi(t)$  können aus dem tatsächlichen, physikalischen BP-Signal  $x(t)$  direkt nur in einigen Sonderfällen in einfacher Weise extrahiert werden.
- Das real nicht existierende äquivalente TP-Signal  $x_{TP}(t)$  ist ein mathematisches Hilfsmittel, mit dem die Zeitverläufe  $a(t)$  und  $\phi(t)$  durch einfache geometrische Überlegungen bestimmt werden können. Im Buch „Modulationsverfahren“ werden wir darauf zurückkommen.
- Das analytische Signal  $x_+(t)$  ist ein Zwischenschritt beim Übergang von  $x(t)$  zu  $x_{TP}(t)$ . Während  $x_+(t)$  stets komplex ist, kann  $x_{TP}(t)$  in Sonderfällen reell sein, zum Beispiel bei idealer Amplitudenmodulation (vergleiche Kapitel 2 des Buches „Modulationsverfahren“).

Das folgende Interaktionsmodul zeigt  $x_{TP}(t)$  für die Summe dreier harmonischer Schwingungen:

### Ortskurve – Darstellung des äquivalenten Tiefpass-Signals



## Darstellung nach Real- und Imaginärteil (1)

Insbesondere bei der Beschreibung von Quadraturamplitudenmodulationsverfahren (QAM) eignet sich die Darstellung des äquivalenten TP-Signals nach Real- und Imaginärteil:

$$x_{\text{TP}}(t) = x_{\text{I}}(t) + j \cdot x_{\text{Q}}(t).$$

In dieser Darstellung bezeichnet der Realteil  $x_{\text{I}}(t)$  die **Inphasekomponente** (Normalkomponente) und der Imaginärteil  $x_{\text{Q}}(t)$  die **Quadraturkomponente** von  $x_{\text{TP}}(t)$ .

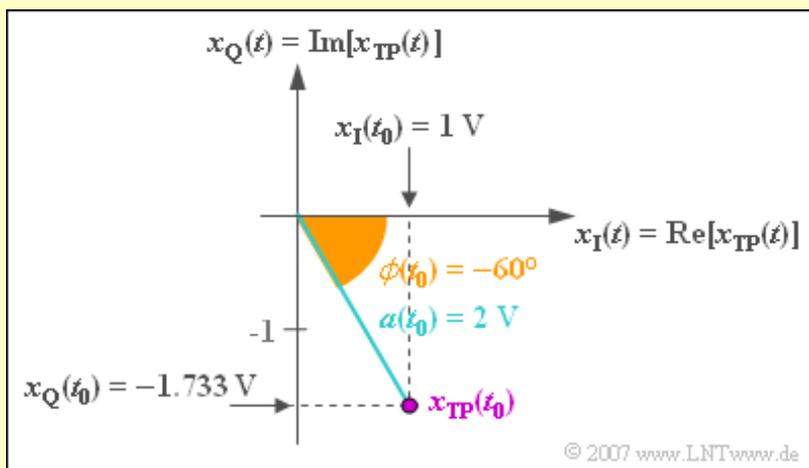
Mit der Betragsfunktion  $a(t) = |x_{\text{TP}}(t)|$  und der Phasenfunktion  $\phi(t) = \arg x_{\text{TP}}(t)$  entsprechend den Definitionen auf den vorangegangenen Seiten gilt:

$$\begin{aligned} x_{\text{I}}(t) &= \operatorname{Re}[x_{\text{TP}}(t)] = a(t) \cdot \cos(\phi(t)), \\ x_{\text{Q}}(t) &= \operatorname{Im}[x_{\text{TP}}(t)] = a(t) \cdot \sin(\phi(t)). \end{aligned}$$

**Beispiel:** Zu einem betrachteten Zeitpunkt  $t_0$  gilt für das äquivalente TP-Signal:

$$x_{\text{TP}}(t = t_0) = 2 \text{ V} \cdot e^{-j60^\circ} = 2 \text{ V} \cdot \cos(60^\circ) - j \cdot 2 \text{ V} \cdot \sin(60^\circ) = 1 \text{ V} - j \cdot 1.733 \text{ V}.$$

⇒ Inphasekomponente  $x_{\text{I}}(t = t_0) = 1 \text{ V}$ , Quadraturkomponente  $x_{\text{Q}}(t = t_0) = -1.733 \text{ V}$ .



Durch Anwendung einfacher trigonometrischer Umformungen kann gezeigt werden, dass das physikalische, reelle BP-Signal auch in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_{\text{T}} \cdot t + \phi(t)) = \\ &= x_{\text{I}}(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_{\text{T}} \cdot t) - x_{\text{Q}}(t) \cdot \sin(2\pi \cdot f_{\text{T}} \cdot t). \end{aligned}$$

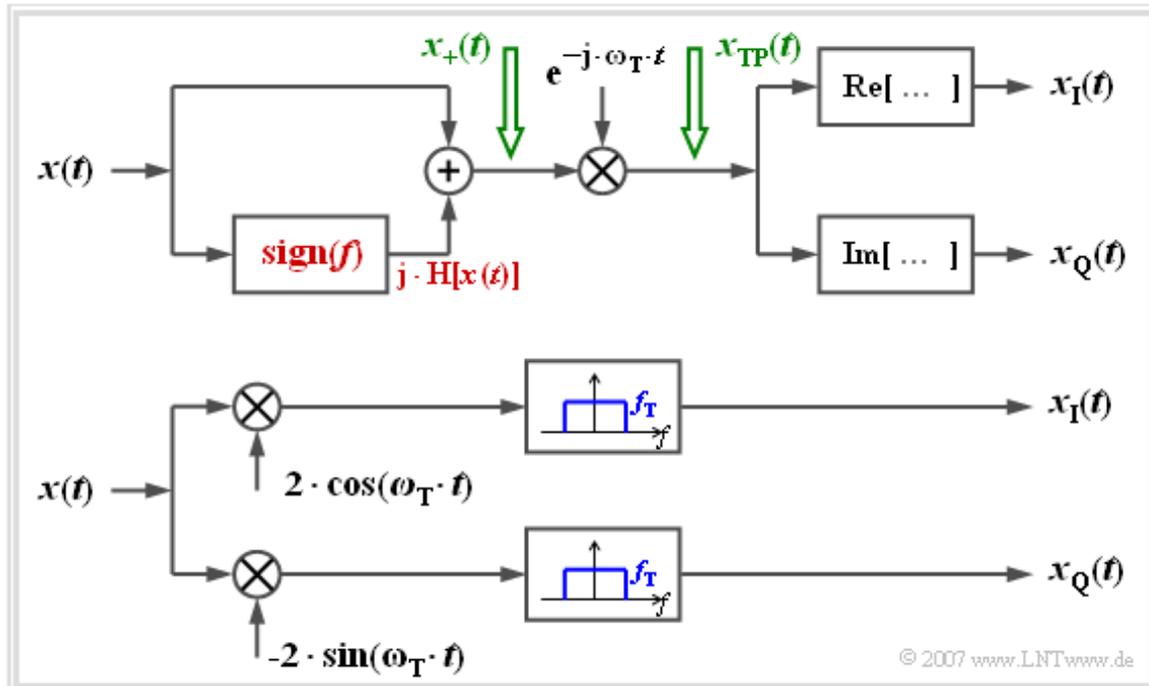
Das Minuszeichen ergibt sich wegen der Verwendung der Phasenfunktion  $\phi(t)$ . Ein Vergleich mit der Seite **Darstellung mit Cosinus- und Sinusanteil** im Kapitel 2.3 zeigt, dass sich die Summe ergibt, wenn man sich auf  $\varphi(t) = -\phi(t)$  bezieht. Angepasst auf unser Beispiel erhält man dann:

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_{\text{T}} \cdot t - \varphi(t)) = \\ &= x_{\text{I}}(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_{\text{T}} \cdot t) + x_{\text{Q}}(t) \cdot \sin(2\pi \cdot f_{\text{T}} \cdot t). \end{aligned}$$

Die Quadraturkomponente unterscheidet sich gegenüber der oberen Gleichung im Vorzeichen.

## Darstellung nach Real- und Imaginärteil (2)

Die folgende Grafik zeigt zwei Anordnungen, um aus dem reellen Bandpass-Signal  $x(t)$  das komplexe Tiefpass-Signal aufgespalten nach Inphase- und Quadraturkomponente zu ermitteln, beispielsweise zur Darstellung auf einem Oszilloskop.



Im oberen Modell wird zunächst durch Hinzufügen der Hilberttransformierten das analytische Signal  $x_+(t)$  erzeugt  $\Rightarrow$  „Modell (B)“ der verlinkten Grafik aus Kapitel 4.2. Durch Multiplikation mit der komplexen Exponentialfunktion (negativer Exponent!) kommt man zum äquivalenten Tiefpass-Signal  $x_{TP}(t)$ . Die gesuchten Komponenten  $x_I(t)$  und  $x_Q(t)$  erhält man dann durch Real- bzw. Imaginärteildbildung.

Bei der unteren, der eher praxisrelevanten Anordnung erhält man für den oberen bzw. unteren Zweig nach den jeweiligen Multiplikationen:

$$\begin{aligned} a(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \phi(t)) \cdot 2 \cdot \cos(\omega_T \cdot t) &= a(t) \cdot \cos(\phi(t)) + \varepsilon_{\text{oben}}(t), \\ a(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \phi(t)) \cdot (-2) \cdot \sin(\omega_T \cdot t) &= a(t) \cdot \sin(\phi(t)) + \varepsilon_{\text{unten}}(t). \end{aligned}$$

Die jeweils zweiten Anteile liegen um die doppelte Trägerfrequenz und werden durch die Tiefpässe mit jeweiliger Grenzfrequenz  $f_T$  entfernt:

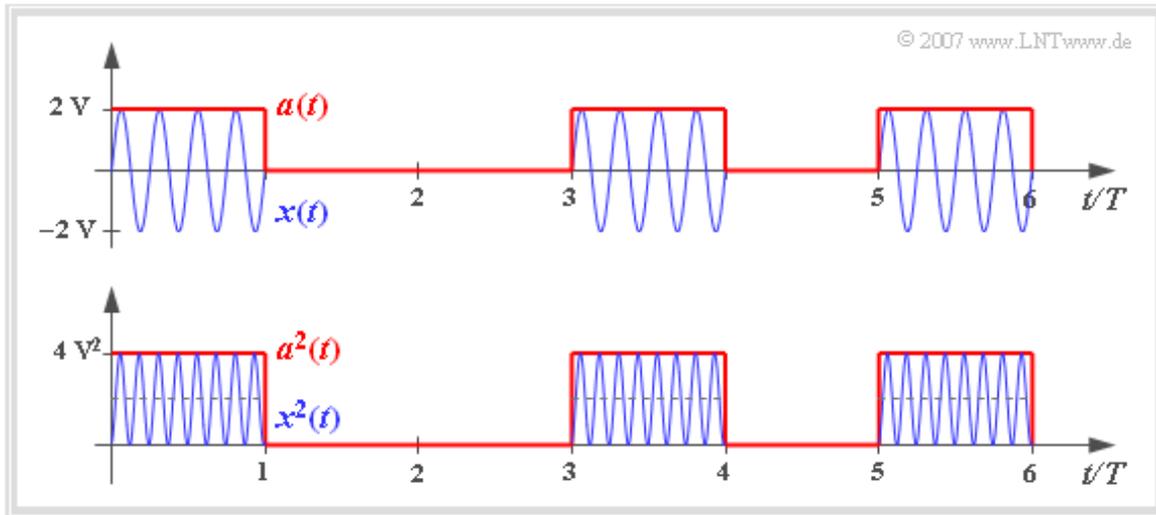
$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{oben}}(t) &= a(t) \cdot \cos(2\omega_T \cdot t + \phi(t)), \\ \varepsilon_{\text{unten}}(t) &= -a(t) \cdot \sin(2\omega_T \cdot t + \phi(t)). \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der letzten Seite zeigt, dass am Ausgang genau die gewünschten Komponenten  $x_I(t)$  und  $x_Q(t)$  abgegriffen werden können:

$$\begin{aligned} x_I(t) &= a(t) \cdot \cos(\phi(t)), \\ x_Q(t) &= a(t) \cdot \sin(\phi(t)). \end{aligned}$$

## Leistung und Energie eines Bandpass-Signals (1)

Wir betrachten das Signal  $x(t)$  gemäß der Grafik, das sich zum Beispiel bei **On-Off-Keying** – auch bekannt als binäres *Amplitude Shift Keying* – ergibt.  $x(t)$  ist ein BP-Signal.



Die auf  $1 \Omega$  bezogene Signalleistung ergibt sich nach den Ausführungen in **Kapitel 1.2** zu

$$P_x = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x^2(t) dt.$$

Sind die binären Nullen und Einsen gleichwahrscheinlich sind, so kann man auf den unendlichen Integrationsbereich und den Grenzübergang verzichten, und man erhält für obiges Mustersignal:

$$P_x = \frac{1}{2T} \cdot \int_0^{2T} x^2(t) dt = \frac{4V^2}{2T} \cdot \int_0^T \cos^2(\omega_T \cdot t) dt = 1 V^2.$$

Aus der unteren Skizze ist zu erkennen, dass man durch Mittelung über die quadrierte Hüllkurve  $a^2(t)$  – also über das Betragsquadrat des äquivalenten Tiefpass-Signals  $x_{TP}(t)$  – ein um den Faktor 2 größeres Ergebnis erhält. Deshalb gilt in gleicher Weise:

$$P_x = \frac{1}{2} \cdot \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{T_M/2} |x_{TP}(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{T_M/2} a^2(t) dt.$$

Dieses Resultat lässt sich verallgemeinern und es auch auf energiebegrenzte Signale anwenden. In diesem Fall gilt für die Energie entsprechend **Kapitel 1.2** :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x_{TP}(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} a^2(t) dt.$$

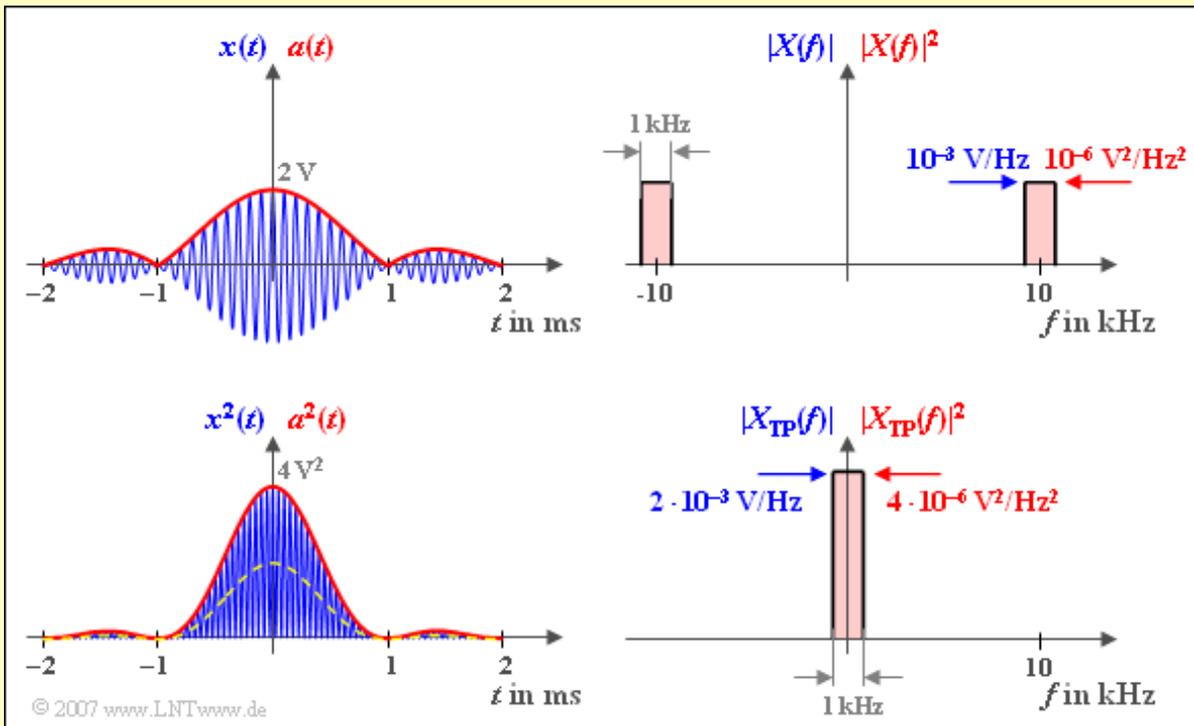
Diese Gleichung gilt allerdings nur dann exakt, wenn die zugrunde liegende Trägerfrequenz  $f_T$  sehr viel größer als die BP-Bandbreite ( $B_{BP}$ ) ist.

## Leistung und Energie eines Bandpass-Signals (2)

**Beispiel:** Wir betrachten das Bandpass-Signal  $x(t)$  mit  $A = 2\text{V}$ ,  $B = 1\text{ kHz}$  und  $f_T = 10\text{ kHz}$ :

$$x(t) = A \cdot \text{si}(\pi \cdot B \cdot t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t + \phi(t)),$$

Oben dargestellt ist das Signal  $x(t)$  und das in der Bandbreite  $B$  konstante Betragsspektrum  $|X(f)| = A/(2B) = 10^{-3}\text{ V/Hz}$ .  $X(f)$  setzt sich also aus zwei Rechtecken um  $\pm f_T$  zusammen.



Die Energie dieses BP-Signals könnte prinzipiell nach folgender Gleichung berechnet werden:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cdot \frac{\text{si}^2(\pi \cdot B \cdot t)}{(\pi \cdot B \cdot t)^2} \cdot \cos^2(2\pi \cdot f_T \cdot t + \phi(t)) dt.$$

Entsprechend der letzten Seite gilt mit der Hüllkurve  $a(t)$  von  $x(t)$  aber auch:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} a^2(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |A \cdot \text{si}(\pi \cdot B \cdot t)|^2 dt = \\ &= A^2 \cdot \int_0^{+\infty} \text{si}^2(\pi \cdot B \cdot t) dt = A^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\pi B} = \frac{A^2}{2B} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ V}^2/\text{Hz}. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Signalenergie  $E_x$  unabhängig von der Trägerphase  $\phi$  ist.

Eine zweite Lösungsmöglichkeit mit gleichem Ergebnis bietet der **Satz von Parseval**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |A(f)|^2 df \Rightarrow E_x = 1/2 \cdot (A/B)^2 \cdot B = A^2/(2B).$$

Es gilt  $|A(f)| = |X_{\text{TP}}(f)|$ . Innerhalb der Bandbreite  $B$  um die Frequenz  $f = 0$  ist  $X_{\text{TP}}(f)$  doppelt so groß wie  $X(f)$  um die Frequenz  $f = f_T$ , nämlich  $A/B$ . Dies hängt mit der Definition des Spektrums  $X_+(f)$  zusammen, aus dem  $X_{\text{TP}}(f)$  durch Verschiebung entsteht.