

Überblick zu Kapitel 5

Die Voraussetzung für eine systemtheoretische Untersuchung von Digitalsystemen oder für eine Computersimulation ist eine geeignete **zeitdiskrete Signalbeschreibung**. Dieses fünfte Kapitel verdeutlicht den mathematischen Übergang von zeitkontinuierlichen auf zeitdiskrete Signale, wobei von der Fouriertransformation und der Fourierrücktransformation entsprechend Kapitel 3 ausgegangen wird. Das Kapitel beinhaltet im Einzelnen:

- die *Zeit- und Frequenzbereichsdarstellung* zeitdiskreter Signale,
- das *Abtasttheorem*, das bei der Zeitdiskretisierung unbedingt zu beachten ist,
- die *Rekonstruktion* des Analogsignals aus der zeitdiskreten Repräsentation,
- die *Diskrete Fouriertransformation* (DFT) und deren Inverse (IDFT),
- die *Fehlermöglichkeiten* bei Anwendung von DFT und IDFT,
- die Anwendung der *Spektralanalyse* zur Verbesserung messtechnischer Verfahren, und
- den für eine Rechnerimplementierung besonders geeignete *FFT-Algorithmus*.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 36 Bildschirmseiten mit Gleichungen, Bildern und Beispielen verdeutlicht. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel noch 46 Grafiken, fünf Aufgaben und fünf Zusatzaufgaben mit insgesamt 50 Teilaufgaben, ein Lernvideo (LV) sowie zwei Interaktionsmodule (IM), nämlich:

- **Abtastung analoger Signale und Signalrekonstruktion** (IM zu Kapitel 5.1)
- **Diskrete Fouriertransformation** (IM zu Kapitel 5.2)
- **Fehlermöglichkeiten bei Anwendung der DFT** (LV zu Kap. 5.3, Dauer 7:26)

Literatur: [Ach95] – [CT65] – [Duh86] – [GRS01] – [KJ02] – [KK10] – [Mar94] – [Söd93] – [Sto15] – [VHH98] – [WS93b]

Weitere Informationen zum Thema sowie Aufgaben, Simulationen und Programmierübungen finden Sie in Kapitel 7, 8 und 12 des Praktikums *Simulationsmethoden in der Nachrichtentechnik*, das an der TU München von Prof. Günter Söder angeboten wurde. Diese LNT-Lehrveranstaltung basiert auf den 24 DOS-Programmen des Lehrsoftwarepakets *LNTsim*:

- Kapitel 7: *Diskrete Fouriertransformation*, Programm *dft*
- Kapitel 8: *Spektralanalyse*, Programm *spa*
- Kapitel 12: *Pulscodemodulation*, Programm *pcm*

Hinweise zum Herunterladen des Programmpakets *LNTsim* und der Versuchsanleitung:

Lehrsoftwarepaket LNTsim (Zip-Version, mehr als 50 MB)

Praktikumsanleitung – Teil A (PDF-Version, ca. 8.5 MB, inklusive Kapitel 7 und 8)

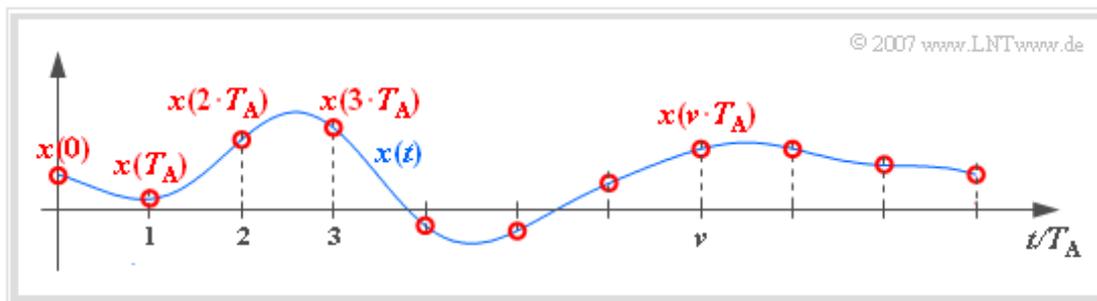
Praktikumsanleitung – Teil B (PDF-Version, ca. 9.5 MB, inklusive Kapitel 12)

Prinzip und Motivation

Die meisten Quellensignale von Nachrichtensystemen sind analog und damit **zeitkontinuierlich** und gleichzeitig **wertkontinuierlich**. Soll ein solches Analogsignal mittels eines Digitalsystems übertragen werden, so sind folgende Vorverarbeitungsschritte erforderlich:

- die **Abtastung** des zeitkontinuierlichen Nachrichtensignals $x(t)$, die zweckmäßigerweise – aber nicht notwendigerweise – zu äquidistanten Zeitpunkten erfolgt.
- die **Quantisierung** mit dem Ziel, die wertkontinuierlichen Abtastwerte zu diskretisieren und so die Anzahl M der möglichen Werte auf einen endlichen Wert zu begrenzen.

Die Quantisierung wird erst im **Kapitel 4.1** des Buches „Modulationsverfahren“ behandelt.



Im Folgenden beschreiben wir die Abtastung in mathematisch exakter Weise, wobei wir folgende Nomenklatur verwenden:

- Das zeitkontinuierliche Signal sei $x(t)$.
- Das in äquidistanten Abständen T_A abgetastete zeitdiskretisierte Signal sei $x_A(t)$.
- Außerhalb der Abtastzeitpunkte $\nu \cdot T_A$ gilt stets $x_A(t) = 0$.
- Dagegen ergibt sich zu den äquidistanten Abtastzeitpunkten mit der Konstanten K :

$$x_A(\nu \cdot T_A) = K \cdot x(\nu \cdot T_A).$$

- Die Konstante hängt von der Art der Zeitdiskretisierung ab. Für die obige Skizze gilt $K = 1$.

Zeitbereichsdarstellung

Im gesamten Lerntutorial soll unter „Abtastung“ die Multiplikation des zeitkontinuierlichen Signals $x(t)$ mit dem Diracpuls $p_\delta(t)$ verstanden werden:

$$x_A(t) = x(t) \cdot p_\delta(t).$$

Anzumerken ist, dass in der Literatur auch andere Beschreibungsformen gefunden werden. Den Autoren erscheint jedoch die hier gewählte Form im Hinblick auf die Spektraldarstellung und die Herleitung der Diskreten Fouriertransformation im Abschnitt 5.2 als am besten geeignet.

Definition: Der **Diracpuls** (im Zeitbereich) besteht aus unendlich vielen Diracimpulsen, jeweils im gleichen Abstand T_A und alle mit gleichem Impulsgewicht T_A :

$$p_\delta(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} T_A \cdot \delta(t - \nu \cdot T_A).$$

Aufgrund dieser Definition ergeben sich für das abgetastete Signal folgende Eigenschaften:

- Das abgetastete Signal zum betrachteten Zeitpunkt ($\nu \cdot T_A$) ist gleich $T_A \cdot x(\nu \cdot T_A) \cdot \delta(0)$.
- Da die Diracfunktion zur Zeit $t = 0$ unendlich ist, sind eigentlich alle Signalwerte $x_A(\nu \cdot T_A)$ ebenfalls unendlich groß.
- Somit ist auch der auf der letzten Seite eingeführte Faktor K eigentlich unendlich groß.
- Trotzdem unterscheiden sich zwei Abtastwerte – beispielsweise $x_A(\nu_1 \cdot T_A)$ und $x_A(\nu_2 \cdot T_A)$ – im gleichen Verhältnis wie die Signalwerte $x(\nu_1 \cdot T_A)$ und $x(\nu_2 \cdot T_A)$.
- Die Abtastwerte von $x(t)$ erscheinen in den Impulsgewichten der Diracfunktionen:

$$x_A(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} T_A \cdot x(\nu \cdot T_A) \cdot \delta(t - \nu \cdot T_A).$$

- Die zusätzliche Multiplikation mit T_A ist erforderlich, damit $x(t)$ und $x_A(t)$ gleiche Einheit besitzen. Beachten Sie hierbei, dass $\delta(t)$ selbst die Einheit „1/s“ aufweist.

Die folgenden Seiten werden zeigen, dass diese gewöhnungsbedürftigen Gleichungen durchaus zu sinnvollen Ergebnissen führen, wenn man sie konsequent und richtig anwendet.

Diracpuls im Zeit- und Frequenzbereich (1)

Entwickelt man den **Diracpuls** in eine Fourierreihe und transformiert diese unter Anwendung des Verschiebungssatzes in den Frequenzbereich, so ergibt sich folgende Korrespondenz:

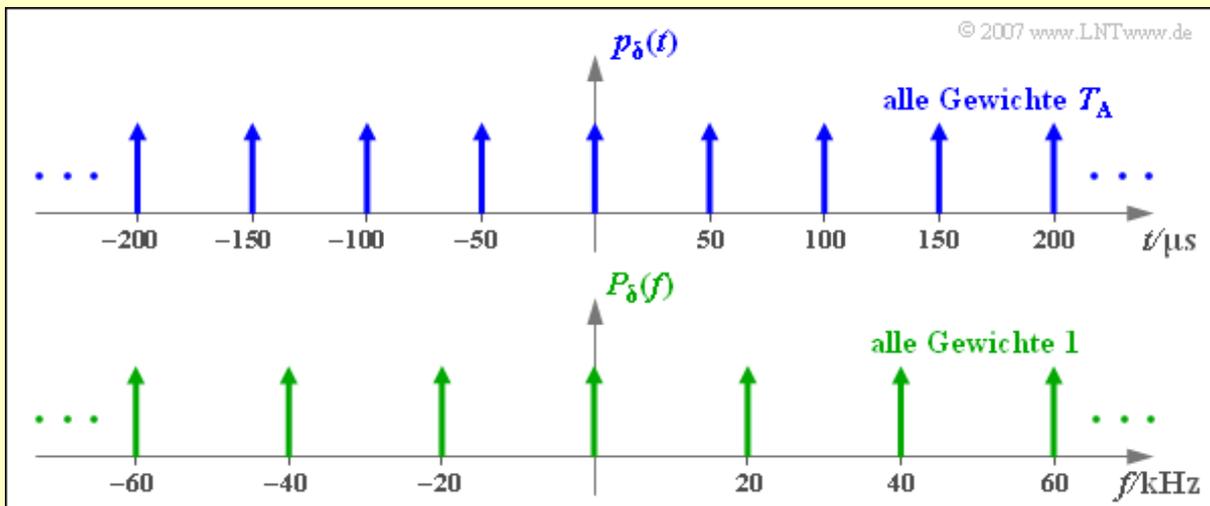
$$p_{\delta}(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} T_A \cdot \delta(t - \nu \cdot T_A) \quad \longleftrightarrow \quad P_{\delta}(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \mu \cdot f_A).$$

Hierbei gibt $f_A = 1/T_A$ den Abstand zweier benachbarter Diraclinien im Frequenzbereich an. Die Herleitung dieser wichtigen Beziehung folgt auf **der nächsten Seite**.

Das Ergebnis besagt:

- Die Fouriertransformierte eines Diracpulses $p_{\delta}(t)$ ergibt wiederum einen Diracpuls, aber nun im Frequenzbereich $\Rightarrow P_{\delta}(f)$.
- Die Abstände der Diraclinien in der Zeit- und Frequenzbereichsdarstellung folgen dem **Reziprozitätsgesetz**:
 $T_A \cdot f_A = 1.$
- Die Gewichte der einzelnen Diraclinien von $P_{\delta}(f)$ sind einheitlich gleich 1.

Beispiel: Die Grafik verdeutlicht die obigen Aussagen für $T_A = 50 \mu\text{s}$ und $f_A = 1/T_A = 20 \text{ kHz}$.



Man erkennt aus dieser Skizze auch die unterschiedlichen Impulsgewichte von $p_{\delta}(t)$ und $P_{\delta}(f)$.

Diracpuls im Zeit- und Frequenzbereich (2)

Beweis der folgenden Fourierkorrespondenz:

$$p_{\delta}(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} T_A \cdot \delta(t - \nu \cdot T_A) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad P_{\delta}(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \mu \cdot f_A).$$

Die Herleitung der hier angegebenen Spektralfunktion $P_{\delta}(f)$ geschieht in mehreren Schritten:

- Da $p_{\delta}(t)$ periodisch mit dem konstanten Abstand T_A zwischen zwei Diraclinien ist, kann die **(komplexe) Fourierreihendarstellung** angewendet werden:

$$p_{\delta}(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} D_{\mu} \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot t / T_A} \quad \text{mit} \quad D_{\mu} = \frac{1}{T_A} \cdot \int_{-T_A/2}^{+T_A/2} p_{\delta}(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot t / T_A} dt.$$

- Im Integrationsbereich von $-T_A/2$ bis $+T_A/2$ gilt aber für den Diracpuls im Zeitbereich: $p_{\delta}(t) = T_A \cdot \delta(t)$. Damit kann für die komplexen Fourierkoeffizienten geschrieben werden:

$$D_{\mu} = \int_{-T_A/2}^{+T_A/2} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot t / T_A} dt.$$

- Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass für $t \neq 0$ der Diracimpuls gleich 0 ist und für $t = 0$ der komplexe Drehfaktor gleich 1, gilt weiter:

$$D_{\mu} = \int_{-T_A/2}^{+T_A/2} \delta(t) dt = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{\delta}(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot t / T_A}.$$

- Der Verschiebungssatz im Frequenzbereich lautet mit $f_A = 1/T_A$:

$$e^{j \cdot 2\pi \cdot \mu \cdot f_A \cdot t} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \delta(f - \mu \cdot f_A).$$

- Wendet man das Ergebnis auf jeden einzelnen Summanden an, so erhält man schließlich:

$$P_{\delta}(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \mu \cdot f_A).$$

q.e.d.

Das bedeutet:

- Der Diracpuls $p_{\delta}(t)$ im Zeitbereich besteht aus unendlich vielen Diracimpulsen, jeweils im gleichen Abstand T_A und alle mit gleichem Impulsgewicht T_A .
- Auch der Diracpuls $P_{\delta}(f)$ im Frequenzbereich besteht aus unendlich vielen Diracimpulsen, nun aber im jeweiligen Abstand $f_A = 1/T_A$ und alle mit dem Impulsgewicht 1.

Frequenzbereichsdarstellung

Zum Spektrum von $x_A(t)$ kommt man durch Anwendung des **Faltungssatzes**. Dieser besagt, dass der Multiplikation im Zeitbereich die Faltungsoperation im Spektralbereich entspricht:

$$x_A(t) = x(t) \cdot p_\delta(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad X_A(f) = X(f) \star P_\delta(f).$$

Aus dem Spektrum $X(f)$ wird durch Faltung mit der um $\mu \cdot f_A$ verschobenen Diraclinie:

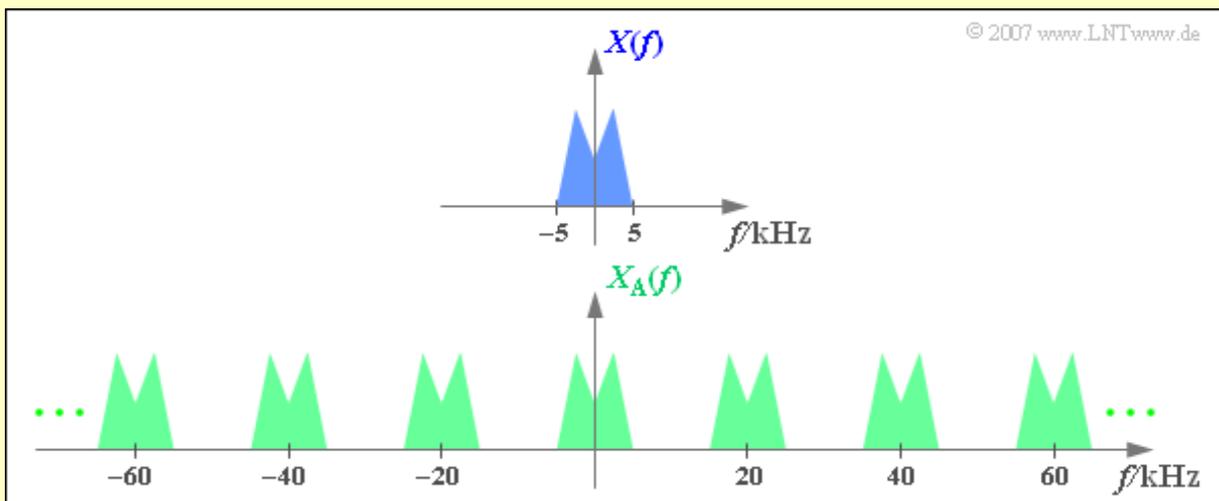
$$X(f) \star \delta(f - \mu \cdot f_A) = X(f - \mu \cdot f_A).$$

Wendet man dieses Ergebnis auf alle Diraclinien des Diracpulses an, so erhält man schließlich:

$$X_A(f) = X(f) \star \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \mu \cdot f_A) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} X(f - \mu \cdot f_A).$$

Das heißt: Die Abtastung des analogen Zeitsignals $x(t)$ in äquidistanten Abständen T_A führt im Spektralbereich zu einer **periodischen Fortsetzung** von $X(f)$ mit dem Frequenzabstand $f_A = 1/T_A$.

Beispiel: Die obere Grafik zeigt schematisch das Spektrum $X(f)$ eines analogen Signals $x(t)$, das Frequenzen bis 5 kHz beinhaltet.



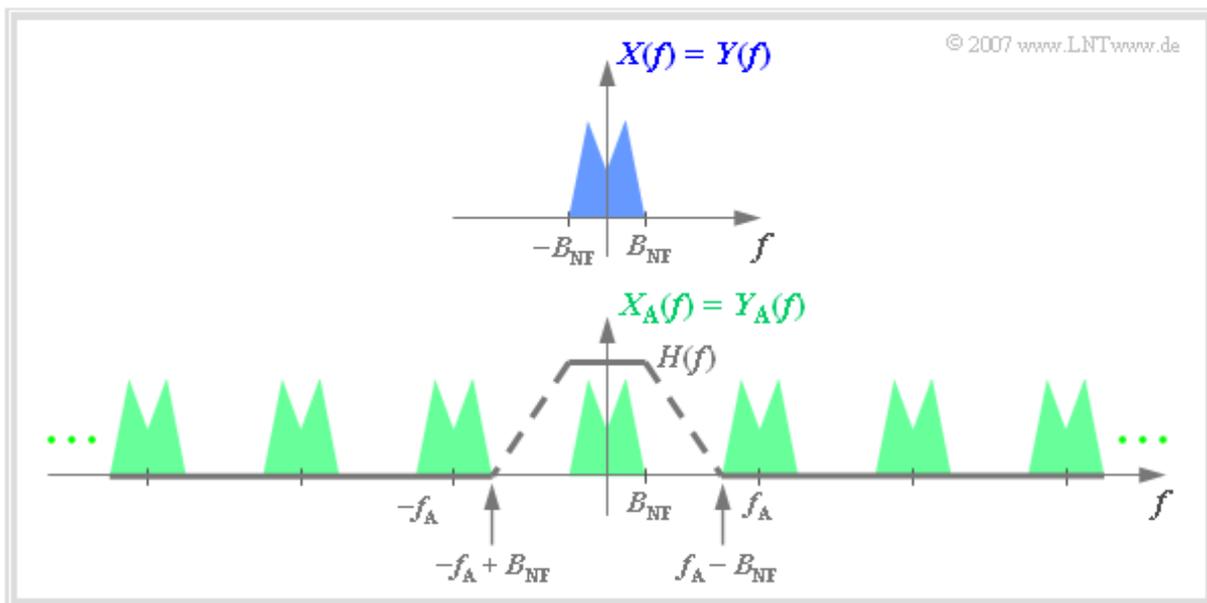
Tastet man das Signal mit der Abtastrate $f_A = 20$ kHz, also im jeweiligen Abstand $T_A = 50 \mu\text{s}$, ab, so erhält man das unten skizzierte periodische Spektrum $X_A(f)$. Da die Diracfunktionen unendlich schmal sind, beinhaltet $x_A(t)$ auch beliebig hochfrequente Anteile. Dementsprechend ist die Spektralfunktion $X_A(f)$ des abgetasteten Signals bis ins Unendliche ausgedehnt.

Signalrekonstruktion

Die Signalabtastung ist bei einem digitalen Nachrichtenübertragungssystem kein Selbstzweck, sondern sie muss irgendwann wieder rückgängig gemacht werden. Betrachten wir zum Beispiel das folgende System:



Das Analogsignal $x(t)$ mit Bandbreite B_{NF} wird wie oben beschrieben abgetastet. Am Ausgang eines idealen Übertragungssystems liegt das ebenfalls zeitdiskrete Signal $y_A(t) = x_A(t)$ vor. Die Frage ist nun, wie der Block **Signalrekonstruktion** zu gestalten ist, damit auch $y(t) = x(t)$ gilt.



Die Lösung ist relativ einfach, wenn man die Spektralfunktionen betrachtet. Man erhält aus $Y_A(f)$ das Spektrum $Y(f) = X(f)$ durch einen Tiefpass mit dem **Frequenzgang** $H(f)$, der

- die tiefen Frequenzen unverfälscht durchlässt:

$$H(f) = 1 \quad \text{für} \quad |f| \leq B_{NF},$$

- die hohen Frequenzen vollständig unterdrückt:

$$H(f) = 0 \quad \text{für} \quad |f| \geq f_A - B_{NF}.$$

Weiter ist aus der Grafik zu erkennen, dass der Frequenzgang $H(f)$ im Bereich von B_{NF} bis $f_A - B_{NF}$ beliebig geformt sein kann, beispielsweise linear abfallend (gestrichelter Verlauf) oder auch rechteckförmig, solange die zwei oben genannten Bedingungen erfüllt sind.

Das Abtasttheorem

Die vollständige Rekonstruktion des Analogsignals $y(t)$ aus dem abgetasteten Signal $y_A(t) = x_A(t)$ ist nur möglich, wenn die Abtastrate f_A entsprechend der Bandbreite B_{NF} des Nachrichtensignals richtig gewählt wurde. Aus der **Grafik der letzten Seite** erkennt man, dass folgende Bedingung erfüllt sein muss:

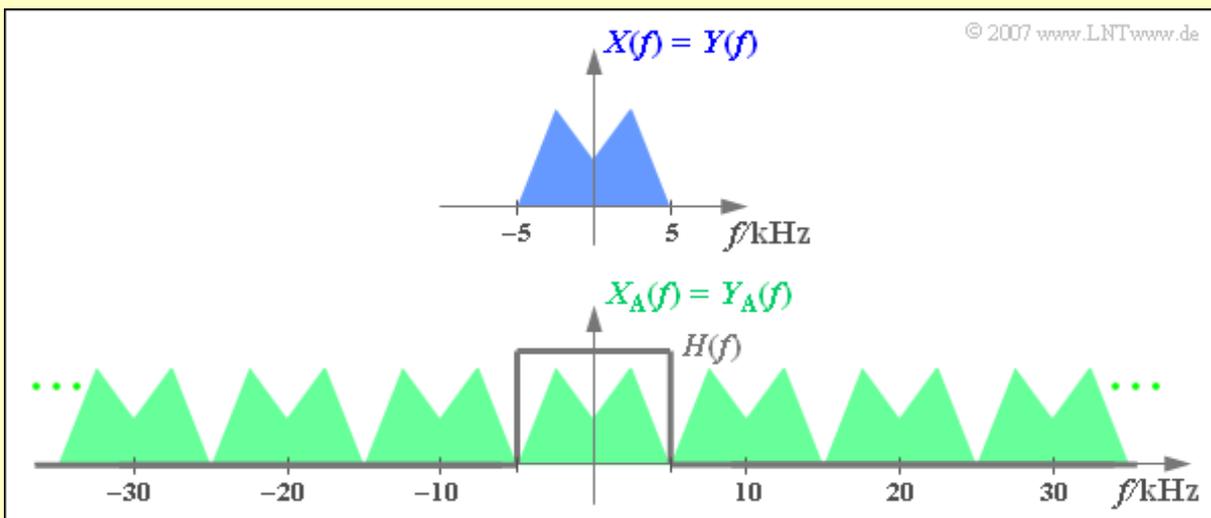
$$f_A - B_{NF} > B_{NF} \Rightarrow f_A > 2 \cdot B_{NF}.$$

Abtasttheorem: Besitzt ein Analogsignal $x(t)$ nur Spektralanteile im Bereich $|f| < B_{NF}$, so kann dieses aus seinem abgetasteten Signal nur dann vollständig rekonstruiert werden, wenn die Abtastrate $f_A \geq 2 \cdot B_{NF}$ beträgt. Für den Abstand zweier Abtastwerte muss demnach gelten:

$$T_A \leq \frac{1}{2 \cdot B_{NF}}.$$

Wird bei der Abtastung der größtmögliche Wert $\Rightarrow T_A = 1/(2B_{NF})$ herangezogen, so muss zur Signalrekonstruktion des Analogsignals aus seinen Abtastwerten ein idealer, rechteckförmiger Tiefpass mit der Grenzfrequenz $f_G = f_A/2 = 1/(2T_A)$ verwendet werden.

Beispiel: Die Grafik zeigt oben das auf ± 5 kHz begrenzte Spektrum $X(f)$ eines Analogsignals, unten das Spektrum $X_A(f)$ des im Abstand $T_A = 100 \mu s$ abgetasteten Signals $\Rightarrow f_A = 10$ kHz. Zusätzlich eingezeichnet ist der Frequenzgang $H(f)$ des Tiefpasses zur Signalrekonstruktion, dessen Grenzfrequenz $f_G = f_A/2 = 5$ kHz betragen muss. Mit jedem anderen f_G -Wert ergibt sich $Y(f) \neq X(f)$. Bei $f_G < 5$ kHz fehlen die oberen $X(f)$ -Anteile, während es bei $f_G > 5$ kHz aufgrund von Faltungsprodukten zu unerwünschten Spektralanteilen in $Y(f)$ kommt.



Wäre die Abtastung beim Sender mit einer Abtastrate $f_A < 10$ kHz erfolgt $\Rightarrow T_A > 100 \mu s$, so wäre das Analogsignal $y(t)$ aus den Abtastwerten $y_A(t)$ auf keinen Fall rekonstruierbar.

Hinweis: Zu der im Kapitel 5 behandelten Thematik gibt es ein Interaktionsmodul:
Abtastung analoger Signale und Signalrekonstruktion

Argumente für die diskrete Realisierung der Fourierintegrale

Die **Fouriertransformation** gemäß der bisherigen Beschreibung in **Kapitel 3.1** weist aufgrund der unbegrenzten Ausdehnung des Integrationsintervalls eine unendlich hohe Selektivität auf und ist deshalb ein ideales theoretisches Hilfsmittel der Spektralanalyse.

Sollen die Spektralanteile $X(f)$ einer Zeitfunktion $x(t)$ numerisch ermittelt werden, so sind die allgemeinen Transformationsgleichungen

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi f t} dt \Rightarrow \text{Hintransformation,}$$
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{+j \cdot 2\pi f t} df \Rightarrow \text{Rücktransformation}$$

aus zwei Gründen ungeeignet:

- Die Gleichungen gelten ausschließlich für zeitkontinuierliche Signale. Mit Digitalrechnern oder Signalprozessoren können jedoch nur zeitdiskrete Signale verarbeitet werden.
- Für eine numerische Auswertung der beiden Fourierintegrale ist es erforderlich, das jeweilige Integrationsintervall auf einen endlichen Wert zu begrenzen.

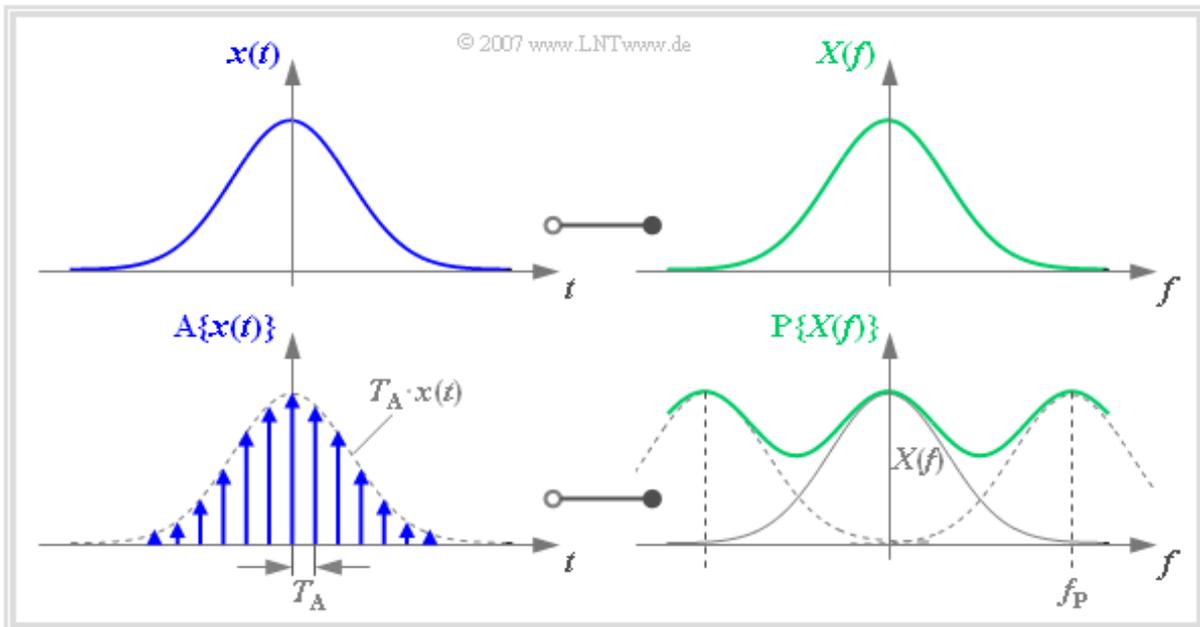
Daraus ergibt sich folgende Konsequenz: Ein kontinuierliches Signal muss vor der numerischen Bestimmung seiner Spektraleigenschaften zwei Prozesse durchlaufen, nämlich

- den der **Abtastung** zur Diskretisierung, und
- den der **Fensterung** zur Begrenzung des Integrationsintervalls.

Im Folgenden wird ausgehend von einer aperiodischen Zeitfunktion $x(t)$ und dem dazugehörigen Fourierspektrum $X(f)$ eine für die Rechnerverarbeitung geeignete zeit- und frequenzdiskrete Beschreibung schrittweise entwickelt.

Zeitdiskretisierung – Periodifizierung im Frequenzbereich

Die folgenden Grafiken zeigen einheitlich links den Zeitbereich und rechts den Frequenzbereich. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit sind $x(t)$ und $X(f)$ jeweils reell und gaußförmig.



Entsprechend Abschnitt 5.1 kann man die Abtastung des Zeitsignals $x(t)$ durch die Multiplikation mit einem Diracpuls $p_\delta(t)$ beschreiben. Es ergibt sich das im Abstand T_A abgetastete Zeitsignal

$$A\{x(t)\} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} T_A \cdot x(\nu \cdot T_A) \cdot \delta(t - \nu \cdot T_A).$$

$A\{x(t)\}$ transformieren wir nun in den Frequenzbereich. Der Multiplikation des Diracpulses $p_\delta(t)$ mit $x(t)$ entspricht im Frequenzbereich die Faltung von $P_\delta(f)$ mit $X(f)$. Es ergibt sich das periodifizierte Spektrum $P\{X(f)\}$, wobei f_P die Frequenzperiode der Funktion $P\{X(f)\}$ angibt:

$$A\{x(t)\} \circ \bullet P\{X(f)\} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} X(f - \mu \cdot f_P) \quad \text{mit} \quad f_P = 1/T_A.$$

Dieser Zusammenhang wurde ebenfalls bereits in Abschnitt 5.1 hergeleitet, jedoch mit etwas anderer Nomenklatur. Diese Nomenklaturänderung wird auf den nachfolgenden Seiten begründet:

- $A\{x(t)\}$ anstelle von $x_A(t)$,
- $f_P = 1/T_A$ anstelle von $f_A = 1/T_A$,

Die Grafik zeigt den hier beschriebenen Funktionalzusammenhang. Hierzu ist anzumerken:

- Die **Frequenzperiode** f_P wurde hier aus Darstellungsgründen bewusst klein gewählt, so dass die Überlappung der zu summierenden Spektren deutlich zu erkennen ist.
- In der Praxis sollte f_P aufgrund des Abtasttheorems mindestens doppelt so groß sein wie die größte im Signal $x(t)$ enthaltene Frequenz.
- Ist dies nicht erfüllt, so muss mit **Aliasing** gerechnet werden – siehe **Kapitel 5.3**.

Frequenzdiskretisierung – Periodifizierung im Zeitbereich

Die Diskretisierung von $X(f)$ lässt sich ebenfalls durch eine Multiplikation mit einem Diracpuls beschreiben. Es ergibt sich das im Abstand f_A abgetastete Spektrum:

$$A\{X(f)\} = X(f) \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} f_A \cdot \delta(f - \mu \cdot f_A) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} f_A \cdot X(\mu \cdot f_A) \cdot \delta(f - \mu \cdot f_A).$$

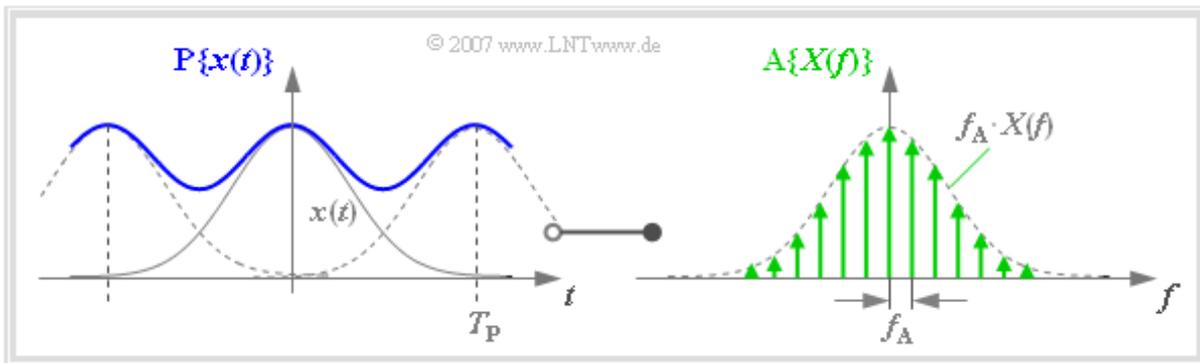
Transformiert man den hier verwendeten Frequenz-Diracpuls (mit Impulsgewichten f_A) in den Zeitbereich, so erhält man mit $T_P = 1/f_A$:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} f_A \cdot \delta(f - \mu \cdot f_A) \bullet \text{---} \circ \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \nu \cdot T_P).$$

Die Multiplikation mit $X(f)$ entspricht im Zeitbereich der Faltung mit $x(t)$. Man erhält also das im Abstand T_P periodifizierte Signal $P\{x(t)\}$:

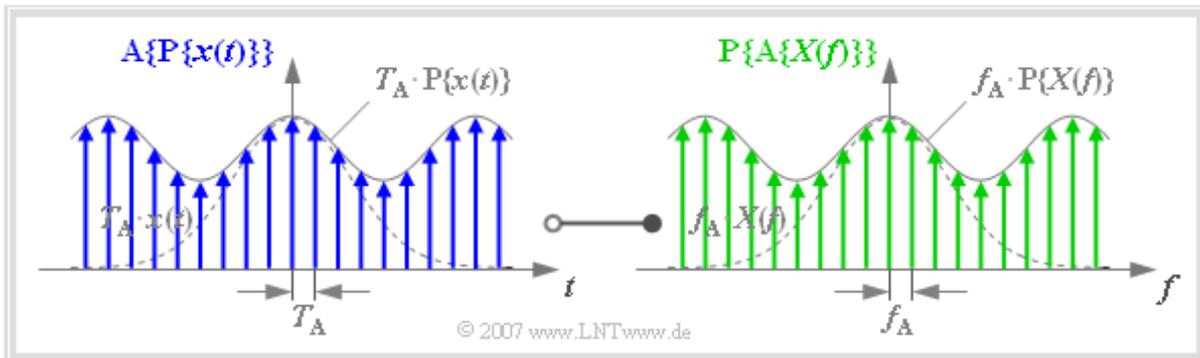
$$A\{X(f)\} \bullet \text{---} \circ P\{x(t)\} = x(t) \star \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta(t - \nu \cdot T_P) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} x(t - \nu \cdot T_P).$$

Dieser Zusammenhang ist in der Grafik veranschaulicht. Aufgrund der groben Frequenzrastrerung ergibt sich in diesem Beispiel für die Zeitperiode T_P ein relativ kleiner Wert, so dass sich das periodifizierte Zeitsignal $P\{x(t)\}$ aufgrund von Überlappungen deutlich von $x(t)$ unterscheidet.



Finite Signaldarstellung

Zur **finiten Signaldarstellung** kommt man, wenn sowohl die Zeitfunktion $x(t)$ wie auch die Spektralfunktion $X(f)$ ausschließlich durch ihre Abtastwerte angegeben werden.



Diese Grafik ist wie folgt zu interpretieren:

- Im linken Bild blau eingezeichnet ist die Funktion $A\{P\{x(t)\}\}$. Diese ergibt sich durch Abtastung der periodifizierten Zeitfunktion $P\{x(t)\}$ mit äquidistanten Diracimpulsen im Abstand $T_A = 1/f_p$.
- Im rechten Bild grün eingezeichnet ist die Funktion $P\{A\{X(f)\}\}$. Diese ergibt sich durch Periodifizierung (mit f_p) der abgetasteten Spektralfunktion. Zwischen dem blauen finiten Signal und dem grünen finiten Signal besteht eine Fourierkorrespondenz:

$$A\{P\{x(t)\}\} \circ \text{---} \bullet P\{A\{X(f)\}\}.$$

- Die Diraclinien der periodischen Fortsetzung $P\{A\{X(f)\}\}$ der abgetasteten Spektralfunktion fallen allerdings nur dann in das gleiche Frequenzraster wie diejenigen von $A\{X(f)\}$, wenn die Frequenzperiode f_p ein ganzzahliges Vielfaches (N) des Frequenzabtastabstandes f_A ist.
- Deshalb muss bei Anwendung der finiten Signaldarstellung stets gelten, wobei für die natürliche Zahl N in der Praxis meist eine Zweierpotenz verwendet wird:

$$f_p = N \cdot f_A \quad \Rightarrow \quad 1/T_A = N \cdot f_A \quad \Rightarrow \quad N \cdot f_A \cdot T_A = 1.$$

Hinweis: Der obigen Grafik liegt der Wert $N = 8$ zugrunde.

Bei Einhaltung der Bedingung $N \cdot f_A \cdot T_A = 1$ ist die Reihenfolge von Periodifizierung und Abtastung vertauschbar. Somit gilt:

$$A\{P\{x(t)\}\} = P\{A\{x(t)\}\} \circ \text{---} \bullet P\{A\{X(f)\}\} = A\{P\{X(f)\}\}.$$

Die Zeitfunktion $P\{A\{x(t)\}\}$ besitzt die Periode $T_p = N \cdot T_A$ und die Periode im Frequenzbereich beträgt $f_p = N \cdot f_A$. Zur Beschreibung des diskretisierten Zeit- und Frequenzverlaufs reichen somit jeweils **N komplexe Zahlenwerte** in Form von Impulsgewichten aus.

Beispiel: Es liegt ein impulsartiges Signal $x(t)$ in abgetasteter Form vor; der Abstand zweier Abtastwerte beträgt $T_A = 1 \mu\text{s}$ beträgt. Nach einer diskreten Fouriertransformation mit $N = 512$ liegt das Spektrum $X(f)$ in Form von Abtastwerten im Abstand $f_A = (N \cdot T_A)^{-1} \approx 1.953 \text{ kHz}$ vor. Vergrößert man N auf 2048, so ergibt sich ein feineres Frequenzraster mit $f_A \approx 488 \text{ Hz}$.

Von der kontinuierlichen zur diskreten Fouriertransformation

Aus dem herkömmlichen ersten Fourierintegral

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi f t} dt$$

entsteht durch Diskretisierung ($dt \rightarrow T_A$, $t \rightarrow v \cdot T_A$, $f \rightarrow \mu \cdot f_A$, $T_A \cdot f_A = 1/N$) die Summe

$$P\{X(\mu \cdot f_A)\} = T_A \cdot \sum_{\nu=0}^{N-1} P\{x(\nu \cdot T_A)\} \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \nu \cdot \mu / N}.$$

Es ist berücksichtigt, dass aufgrund der Diskretisierung jeweils die periodifizierten Funktionen einzusetzen sind. Aus Gründen einer vereinfachten Schreibweise nehmen wir nun die folgenden Substitutionen vor:

- Die N **Zeitbereichskoeffizienten** seien mit der Laufvariablen $\nu = 0, \dots, N-1$:

$$d(\nu) = P\{x(t)\} |_{t=\nu \cdot T_A}.$$

- Die N **Frequenzbereichskoeffizienten** seien mit der Laufvariablen $\mu = 0, \dots, N-1$:

$$D(\mu) = f_A \cdot P\{X(f)\} |_{f=\mu \cdot f_A}.$$

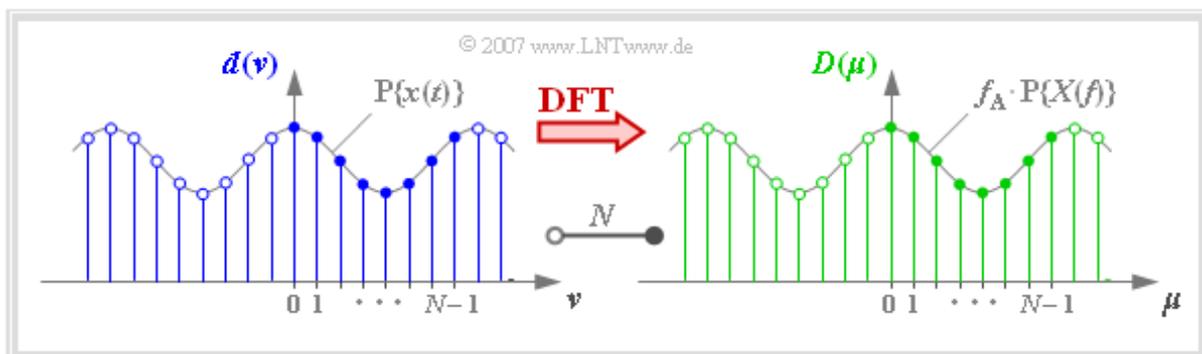
- Abkürzend wird für den **komplexen Drehfaktor** – der von N abhängt – geschrieben:

$$w = e^{-j \cdot 2\pi / N} = \cos(2\pi / N) - j \cdot \sin(2\pi / N).$$

Definition: Die Gleichung der **Diskreten Fouriertransformation** (kurz DFT) lautet:

$$D(\mu) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=0}^{N-1} d(\nu) \cdot w^{\nu \cdot \mu}.$$

Oder in Worten: Unter dem Begriff *Diskrete Fouriertransformation* versteht man die Berechnung der N Spektralkoeffizienten $D(\mu)$ aus den N Signalkoeffizienten $d(\nu)$.



In der Grafik erkennt man die $N = 8$ Signalkoeffizienten $d(\nu)$ an der blauen Füllung und die $N = 8$ Spektralkoeffizienten $D(\mu)$ an der grünen Füllung.

Inverse Diskrete Fouriertransformation

Die *Inverse Diskrete Fouriertransformation* (IDFT) beschreibt das zweite Fourierintegral

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j \cdot 2\pi f t} df$$

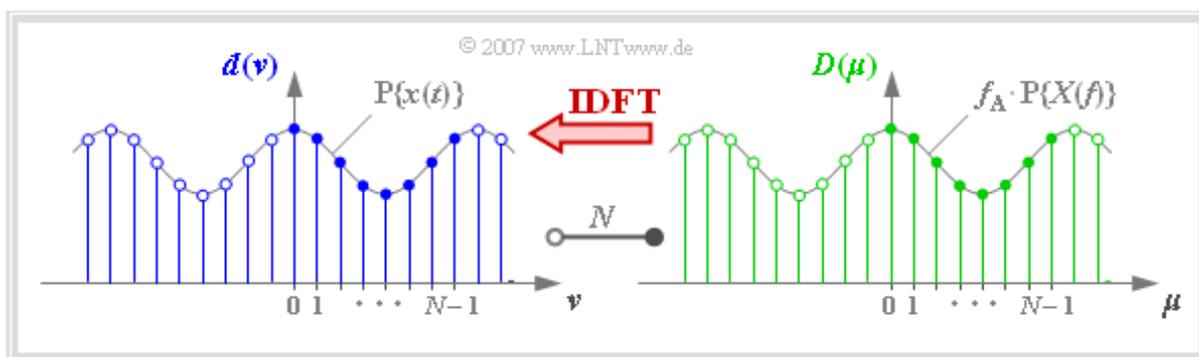
in diskretisierter Form. Man erhält mit dem Übergang $df \rightarrow f_A$:

$$d(\nu) = P \{x(t)\} |_{t=\nu \cdot T_A}, \quad \nu = 0, \dots, N - 1,$$

Definition: Die Gleichung der **Inversen Diskreten Fouriertransformation** (kurz IDFT) lautet:

$$d(\nu) = \sum_{\mu=0}^{N-1} D(\mu) \cdot w^{-\nu \cdot \mu}.$$

In anderen Worten: Unter dem Begriff *Inverse Diskrete Fouriertransformation* versteht man die Berechnung der Signalkoeffizienten $d(\nu)$ aus den Spektralkoeffizienten $D(\mu)$.



Es gelten auch hier die Definitionen:

$$d(\nu) = P \{x(t)\} |_{t=\nu \cdot T_A}, \quad \nu = 0, \dots, N - 1,$$

$$D(\mu) = f_A \cdot P \{X(f)\} |_{f=\mu \cdot f_A}, \quad \mu = 0, \dots, N - 1,$$

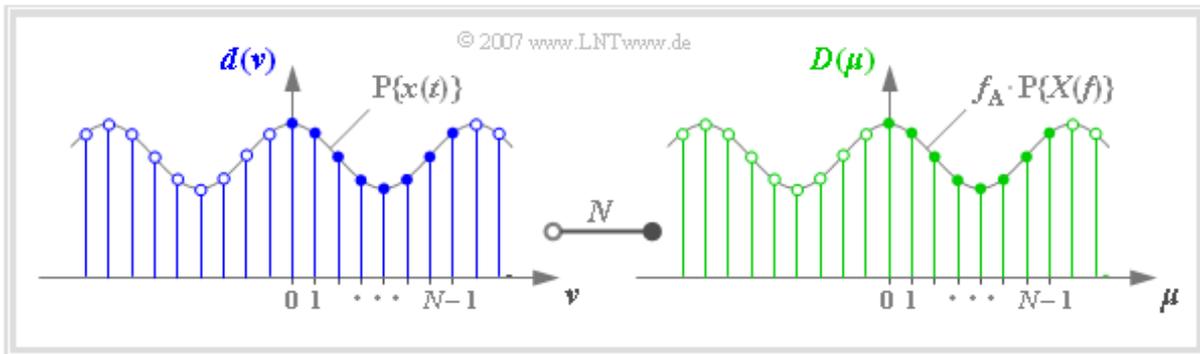
$$w = e^{-j \cdot 2\pi / N}.$$

Ein Vergleich zwischen der **DFT** und IDFT zeigt, dass genau der gleiche Algorithmus verwendet werden kann. Die einzigen Unterschiede der IDFT gegenüber der DFT sind:

- Der Exponent des Drehfaktors ist mit unterschiedlichem Vorzeichen anzusetzen.
- Bei der IDFT entfällt die Division durch N .

Interpretation von DFT und IDFT (1)

Die folgende Grafik zeigt nochmals die diskreten Koeffizienten im Zeit- und Frequenzbereich zusammen mit den periodifizierten zeitkontinuierlichen Funktionen.



Bei Anwendung von DFT bzw. IDFT ist zu beachten:

- Nach obigen Definitionen besitzen die DFT-Koeffizienten $d(v)$ und $D(\mu)$ stets die Einheit der Zeitfunktion. Dividiert man $D(\mu)$ durch f_A , so erhält man den Spektralwert $X(\mu \cdot f_A)$.
- Die Spektralkoeffizienten $D(\mu)$ müssen stets komplex angesetzt werden, um auch ungerade Zeitfunktionen berücksichtigen zu können.
- Aus Symmetriegründen verwendet man meist komplexe Zeitkoeffizienten $d(v)$, um auch Bandpass-Signale im äquivalenten Tiefpassbereich transformieren zu können.
- Als Grundintervall für v und μ definiert man meist – wie in obiger Grafik – den Bereich von 0 bis $N - 1$. Mit den komplexwertigen Zahlenfolgen

$$\langle d(v) \rangle = \langle d(0), \dots, d(N - 1) \rangle \text{ sowie } \langle D(\mu) \rangle = \langle D(0), \dots, D(N - 1) \rangle$$

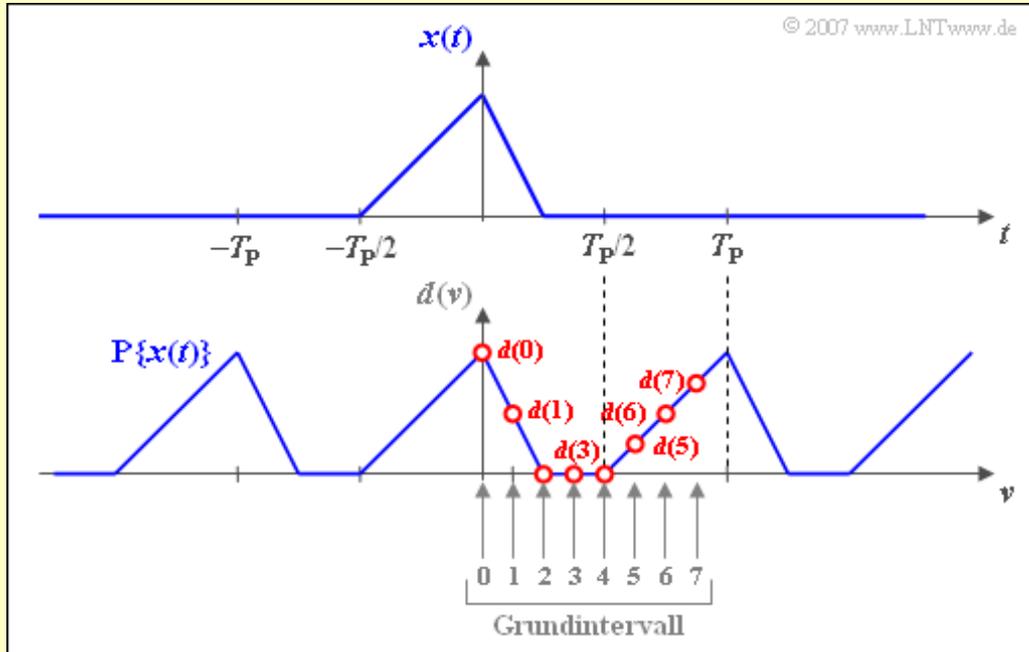
werden DFT und IDFT ähnlich wie die herkömmliche Fouriertransformation symbolisiert:

$$\langle D(\mu) \rangle \bullet \text{---} (N) \text{---} \circ \langle d(v) \rangle.$$

- Ist die Zeitfunktion $x(t)$ bereits auf den Bereich $0 \leq t < N \cdot T_A$ begrenzt, dann geben die Zeitkoeffizienten direkt die Abtastwerte der Zeitfunktion an $\Rightarrow d(v) = x(v \cdot T)$.
- Ist das Zeitsignal $x(t)$ gegenüber dem Grundintervall verschoben, so muss man die auf der nächsten Seite gezeigte Zuordnung zwischen $x(t)$ und den Koeffizienten $d(v)$ wählen.

Interpretation von DFT und IDFT (2)

Beispiel: Die obere Grafik zeigt den unsymmetrischen Dreieckimpuls $x(t)$, dessen absolute Breite kleiner ist als $T_P = N \cdot T_A$. Die untere Skizze zeigt die zugeordneten DFT-Koeffizienten für das Beispiel $N = 8$.



Für die Zeitindizes $v = 0, \dots, N/2 = 4$ gilt $d(v) = x(v \cdot T_A)$.

$$d(0) = x(0), \quad d(1) = x(T_A), \quad d(2) = x(2T_A), \quad d(3) = x(3T_A), \quad d(4) = x(4T_A).$$

Dagegen sind die Koeffizienten $d(5)$, $d(6)$ und $d(7)$ wie folgt zu setzen:

$$d(v) = x((v - N) \cdot T_A) \Rightarrow d(5) = x(-3T_A), \quad d(6) = x(-2T_A), \quad d(7) = x(-T_A).$$

Der mittlere quadratische Fehler als Qualitätskriterium (1)

Im Folgenden werden einige Fehlermöglichkeiten bei Anwendung der DFT kurz diskutiert, wobei wir uns auf die Transformation vom Zeit- in den Frequenzbereich beschränken. Auch in seinen Abtastwerten wird sich im Allgemeinen das über die DFT ermittelte Spektrum $D(\mu)/f_A$ vom tatsächlichen Spektrum $X(\mu \cdot f_A)$ unterscheiden, was auf zwei Prozesse zurückzuführen ist:

- die Abtastung, also die Reduzierung der Information über $x(t)$ auf N Zahlenwerte,
- die Fensterung, die das Signal $x(t)$ eventuell fälschlicherweise begrenzt.

Ein Gütekriterium, das beide Fehlerarten berücksichtigt, ist der **mittlere quadratische Fehler**:

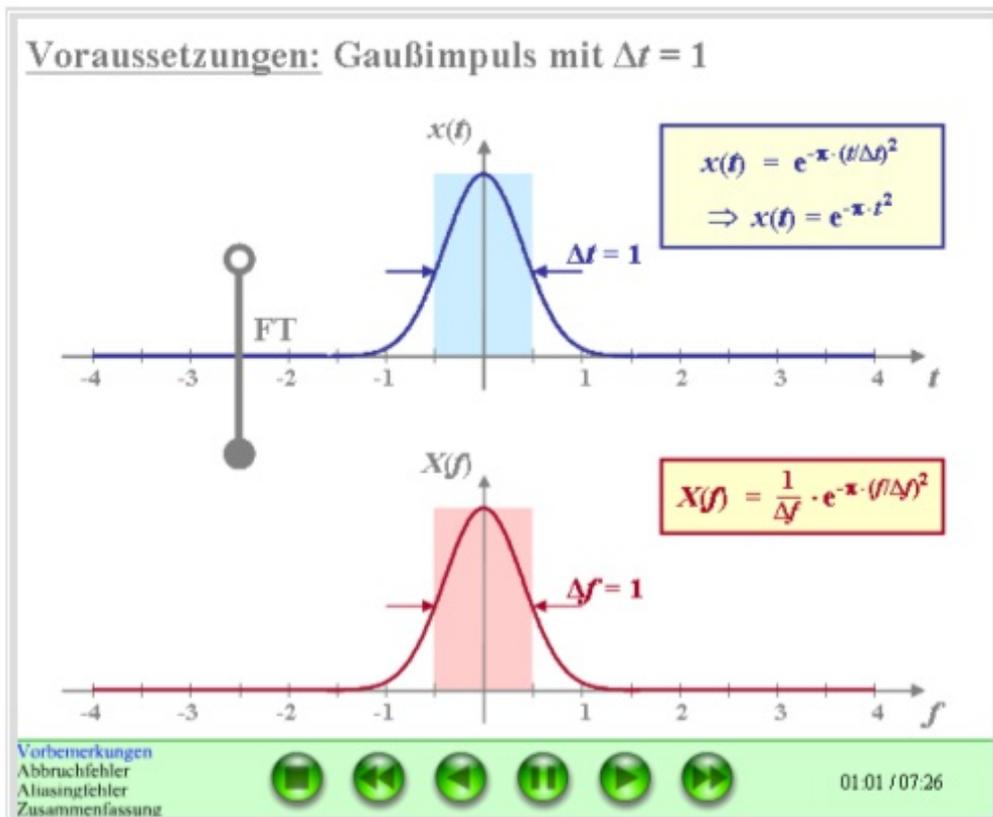
$$\text{MQF} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\mu=0}^{N-1} \left| X(\mu \cdot f_A) - \frac{D(\mu)}{f_A} \right|^2.$$

Dieser ist stets ungleich 0. Die Größe von MQF hängt von folgenden Parametern ab:

- den Eigenschaften der vorliegenden Zeitfunktion $x(t)$ bzw. des Spektrums $X(f)$,
- dem DFT-Parameter N ; je größer N gewählt wird, umso kleiner wird MQF,
- einem der vier weiteren DFT-Parameter, zum Beispiel f_A . Die weiteren Parameter sind über die Gleichungen $f_p = N \cdot f_A$, $T_p = 1/f_A$ und $T_A = T_p/N$ festgelegt.

Wir möchten Sie bereits hier auf ein Lernvideo hinweisen, das den Inhalt dieses Kapitels 5.3 verdeutlicht. Unten sehen Sie ein Einzelbild dieses Videos:

Fehlermöglichkeiten bei Anwendung der DFT (Dauer 7:26)

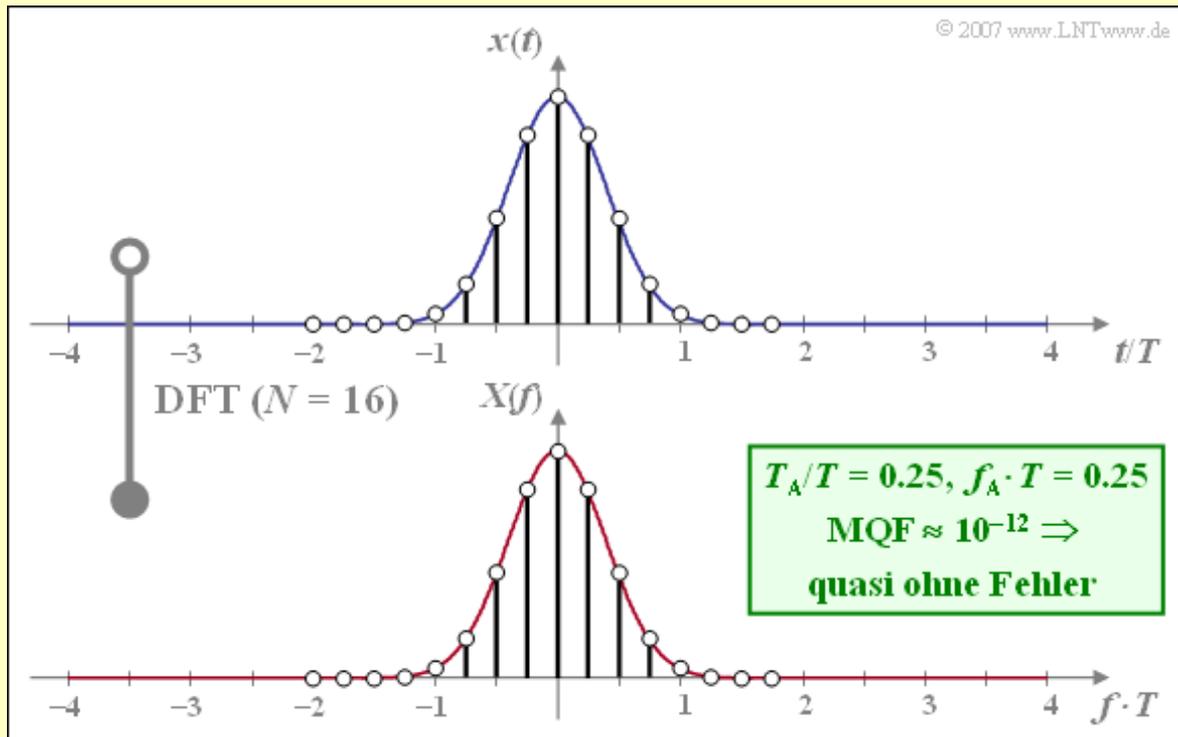


Der mittlere quadratische Fehler als Qualitätskriterium (2)

Beispiel: Wir betrachten beispielhaft einen Gaußimpuls mit $\Delta t = T$ (äquivalente Impulsdauer):

$$x(t) = e^{-\pi(t/T)^2}.$$

Der Gaußimpuls eignet sich aufgrund des schnellen, exponentiellen Abklingens sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich sehr gut für die Anwendung der DFT. Die folgende Grafik zeigt das Ergebnis der DFT für $N = 16$ und $T_A/T = 0.25$. Damit gilt auch: $f_A \cdot T = 0.25$.



Zu dieser Darstellung ist Folgendes anzumerken:

- Die berücksichtigten Abtastwerte von $x(t)$ liegen im Bereich $|t/T| \leq 2$. Da $x(\pm 2T)$ sehr klein ist, führt die Periodifizierung im Zeitbereich zu keinen gravierenden Fehlern.
- Mit $f_A \cdot T = 0.25$ sowie $N = 16$ ergibt sich der (normierte) DFT-Parameter $f_p \cdot T = 4$. Die diskreten Spektrallinien der DFT liegen somit im Bereich $-2 \leq f \cdot T < +2$.
- Der mittlere quadratische Fehler ist mit $MQF \approx 10^{-12}$ relativ klein, was auf die günstige Wahl von $f_A \cdot T = 0.25$ (bei gegebenem $N = 16$) zurückzuführen ist.
- Die DFT-Genauigkeit kann durch Vergrößerung von N verbessert werden. Für $N = 1024$ erhält man den kleinstmöglichen Wert $MQF \approx 8 \cdot 10^{-17}$, wenn $f_A \cdot T = 0.125$ gewählt wird. Für die anderen DFT-Parameter gilt dann $f_p \cdot T = 128$, $T_A/T = 1/128$ und $T_p/T = 8$.

DFT-Verfälschung durch Fensterung – Abbruchfehler (1)

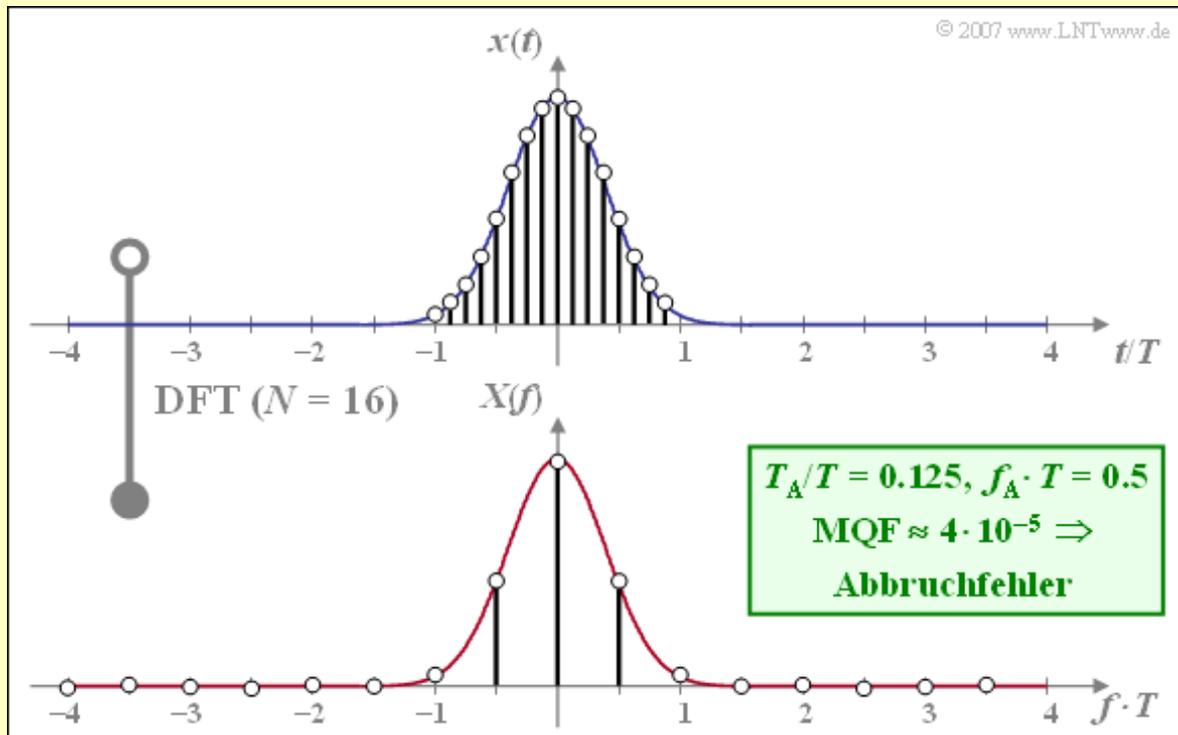
Ein typischer Fehler bei Anwendung der DFT ist auf die **Fensterung** zurückzuführen. Diese als Abbruchfehler bekannte Verfälschung lässt sich folgendermaßen erklären:

- Die im DFT-Algorithmus impliziert enthaltene Fensterung entspricht der Multiplikation des Signals $x(t)$ mit einer Rechteckfunktion der Höhe 1 und der Dauer $T_P = N \cdot T_A$.
- Ist das Zeitsignal $x(t)$ nicht auf T_P begrenzt, so stimmt das DFT-Ergebnis nicht mit dem tatsächlichen Spektrum $X(f)$ überein, sondern ergibt sich aus diesem durch Faltung mit der Spektralfunktion $T_P \cdot \text{si}(\pi f T_P)$.
- Im Grenzfall $T_P \rightarrow \infty$, was bei gegebenem Abstand T_A der Abtastwerte auch eine unendlich große Stützstellenzahl N bedeuten würde, entartet $T_P \cdot \text{si}(\pi f T_P)$ zu einer Diracfunktion und das Originalspektrum $X(f)$ bliebe erhalten.
- Die DFT eines zeitlich unbegrenzten Signals – zum Beispiel eines periodischen Signals – wird immer einen Abbruchfehler hervorrufen, der nur durch besondere Maßnahmen in Grenzen gehalten werden kann. Hierauf wird in **Kapitel 5.4** noch näher eingegangen.
- Bei zeitlich begrenzten, impulsartigen Signalen lässt sich der Abbruchfehler vermeiden, wenn man T_P hinreichend groß wählt. Durch weitere Vergrößerung des Fensters in Bereiche mit $x(t) \approx 0$ ergibt sich kein zusätzlicher Informationsgewinn \Rightarrow MQF wird nicht kleiner.
- Durch dieses Anfügen von Nullen (**zero-padding**) treten nun die Abtastwerte von $X(f)$ in kleinerem Abstand $f_A = 1/T_A$ auf. Durch T_P -Verdopplung erreicht man eine Interpolation der Frequenzabtastwerte genau in der Mitte zwischen zwei vorherigen Stützstellen.

Das folgende Beispiel zeigt einen Abbruchfehler aufgrund ungünstig gewählter DFT-Parameter.

DFT-Verfälschung durch Fensterung – Abbruchfehler (2)

Beispiel: Die Grafik zeigt das Ergebnis der DFT für gleiches $x(t)$ und $X(f)$ wie auf der letzten Seite, aber nun mit den DFT-Parametern $N = 16$ und $T_A/T = 0.125$.



Aus dem Vergleich mit der **vorherigen Grafik** (gültig für $T_A/T = 0.25$) erkennt man:

- Die Frequenzabtastrwerte treten nun mit doppelt so großem Abstand auf: $f_A \cdot T = 0.5$.
- Gleichzeitig verringert sich T_p/T von 4 auf 2.
- Damit werden nun nur noch die Signalanteile im Bereich $|t| < T$ durch die DFT erfasst.

Mit diesen DFT-Parametern entsteht ein **Abbruchfehler**, durch den der mittlere quadratische Fehler (MQF) signifikant von 10^{-12} auf $4 \cdot 10^{-5}$ vergrößert wird.

DFT-Verfälschung durch Abtastung – Aliasingfehler (1)

Auch durch eine ungeeignete Abtastung der Zeitfunktion $x(t)$ kann es zu einer Verfälschung des DFT-Ergebnisses kommen. Dieser so genannte **Aliasingfehler** lässt sich wie folgt erklären:

- Die Abtastung von $x(t)$ im Abstand T_A bewirkt eine periodische Fortsetzung des Spektrums bei ganzzahligen Vielfachen der Periodisierungsfrequenz $f_p = 1/T_A$.
- Besitzt das Spektrum $X(f)$ auch Spektralanteile bei $|f| > f_p/2$, so ist das Abtasttheorem nicht erfüllt; es kommt zu Überlappungen der zu addierenden, verschobenen Frequenzanteile.
- Nur bei bandbegrenztem Signal kann der Aliasingfehler durch geeignete DFT-Parameter vermieden werden. Dagegen ist bei zeitlich begrenzten, impulsartigen Signalen dieser Fehler unvermeidbar, da zeitbegrenzte Signale nicht gleichzeitig bandbegrenzt sein können.
- Der Aliasingfehler wird durch eine feinere Abtastung (also: kleineres $T_A = 1/f_p$) kleiner. Dies erreicht man bei gleichbleibendem T_p – um den Abbruchfehler nicht anwachsen zu lassen – allerdings nur durch ein größeres N und damit einen größeren Rechenaufwand.

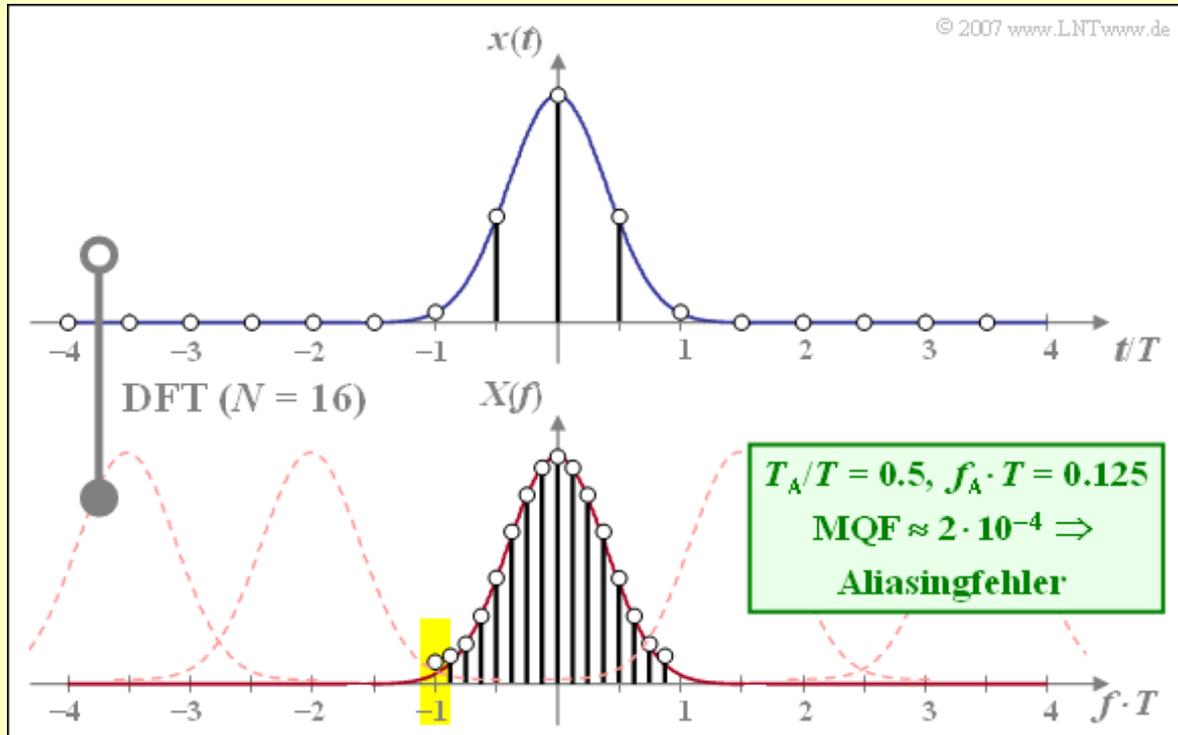
Wir weisen Sie nochmals auf unser Lernvideo hin:

Fehlermöglichkeiten bei Anwendung der DFT (Dauer 7:26)

Das Beispiel auf der nächsten Seite zeigt einen solchen Aliasingfehler aufgrund falsch gewählter DFT-Parameter (T_A zu groß, f_A zu klein).

DFT-Verfälschung durch Abtastung – Aliasingfehler (2)

Beispiel: Die folgende Grafik verdeutlicht den Aliasingfehler bei gaußförmigem $x(t)$ bzw. $X(f)$. Es gelten die DFT-Parameter $N = 16$ und $f_A \cdot T = 0.125$. Vergleichen Sie das DFT-Ergebnis mit der Grafik bei günstigerer Frequenzauflösung ($f_A \cdot T = 0.25$, ebenfalls für $N = 16$).



Mit $N = 16$ und $f_A \cdot T = 0.125$ gilt für die anderen DFT-Parametern:

- $f_p \cdot T = 2$ (vorher: $f_p \cdot T = 4$),
- $T_p/T = 8$ (vorher: $T_p/T = 4$),
- $T_A/T = 0.5$ (vorher: $T_A/T = 0.25$).

Daraus ergeben sich folgende Konsequenzen:

- Der Abbruchfehler spielt wegen $T_p/T = 8$ keine Rolle (schon $T_p/T = 4$ war ausreichend).
- Wegen $f_p \cdot T = 2$ entsteht nun allerdings Aliasing, weil die DFT von der Summe vieler Gaußfunktionen im Abstand $f_p \cdot T = 2$ ausgeht (gestrichelten Kurven in der Grafik).
- Somit ergibt sich hier mit $MQF \approx 2 \cdot 10^{-4}$ ein noch größerer Fehlerwert als durch den Abbruchfehler im letzten Beispiel.

Die einzelnen DFT-Koeffizienten werden unterschiedlich verfälscht:

- Der mittlere DFT-Koeffizient (für die Frequenz $f = 0$) ist nahezu richtig, während zu den Rändern hin die Fehler der DFT-Koeffizienten deutlich zunehmen.
- Der DFT-Koeffizient für $f \cdot T = -1$ ist beispielsweise doppelt so groß als er sein sollte, da die Gaußfunktion mit dem Zentrum bei $f \cdot T = -2$ den gleichen Beitrag liefert wie die eigentliche Gaußfunktion um $f \cdot T = 0$ (siehe gelbe Hinterlegung).

Spektraler Leckeffekt (1)

Die Verfälschung des Spektrums eines periodischen und damit zeitlich unbegrenzten Signals aufgrund der impliziten Zeitbegrenzung der DFT bezeichnet man als den **spektralen Leckeffekt**. Dadurch werden zum Beispiel von einem Spektrumanalyser

- im Zeitsignal nicht vorhandene Frequenzanteile vorgetäuscht, und/oder
- tatsächlich vorhandene Spektralkomponenten durch Seitenkeulen verdeckt.

Das nachfolgende Beispiel wird zeigen, dass bei einem periodischen Signal die Anwendung der Diskreten Fouriertransformation (DFT) ohne Zusatzmaßnahmen nicht sinnvoll ist. Die Güte der Spektralanalyse – das heißt die Richtigkeit des gefundenen Spektrums – wird hier hauptsächlich durch die (mehr oder weniger geglückte) Anpassung der DFT-Parameter an die vorliegenden Signalparameter bestimmt.

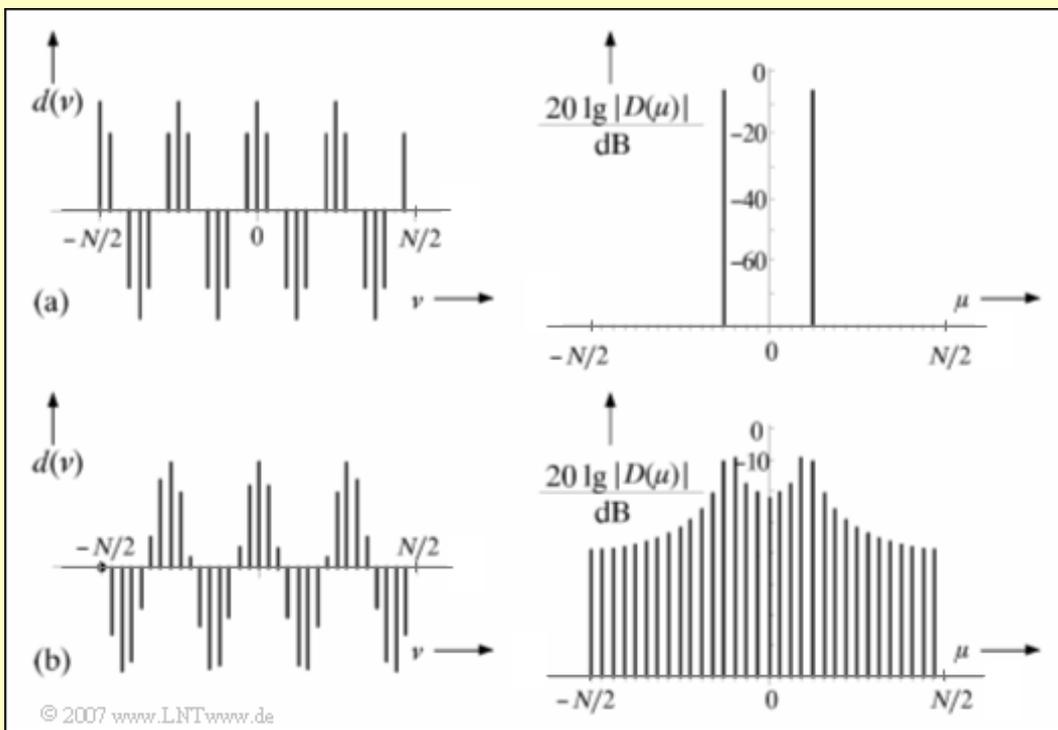
- Ist zum Beispiel die Periodendauer T_0 des Signals $x(t)$ bekannt, so sollte die Dauer T_P des für die DFT verwendeten Signalausschnittes ein ganzzahliges Vielfaches von T_0 betragen.
- Aufgabe der Spektralanalyse ist aber gerade das Auffinden beliebiger Signalanteile, so dass die Kenntnis von T_0 im Allgemeinen nicht vorausgesetzt werden kann.
- Eine Maßnahme zur Verbesserung des Spektralanalyseergebnisses ist die **Fensterung** mit einer „geeigneten“ Zeitfunktion $w(t)$. Analysiert wird dann das Produktsignal $x(t) \cdot w(t)$.
- Aus der Literatur sind eine Vielzahl solcher Fensterfunktionen $w(t)$ bekannt, die je nach Aufgabenstellung zu guten oder weniger befriedigenden Ergebnissen führen.

Auf den nächsten Seiten wird der spektrale Leckeffekt an Beispielen verdeutlicht und es wird auf die Vorteile und Nachteile der verschiedenen Fensterfunktionen eingegangen. So viel vorneweg: Es gibt keine „beste“ Fensterfunktion für alle Anwendungen.

Spektraler Leckeffekt (2)

Beispiel: Die obere Grafik zeigt das zeitdiskrete Signal $d(v)$ einer harmonischen Schwingung mit der Frequenz $f_0 = 125$ kHz. Demzufolge beträgt die Periodendauer $T_0 = 8$ μ s. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Zeitabstastwerte ist bei diesem Beispiel zu $T_A = 1$ μ s gewählt.

Rechts ist in logarithmierter Form (in dB) das frequenzdiskrete Spektrum $|D(\mu)|$ nach einer DFT mit $N = 32$ Abtastwerten dargestellt, woraus sich die weiteren DFT-Parameter zu $T_P = 32$ μ s (Dauer des Zeitausschnitts) und $f_A = 1/T_P = 31.25$ kHz (Rasterung der Frequenzachse) ergeben. Da durch die Intervallbreite T_P ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer T_0 erfasst wird, liefert die DFT das richtige Ergebnis. Die beiden Diracfunktionen liegen genau bei $\pm 4f_A$.

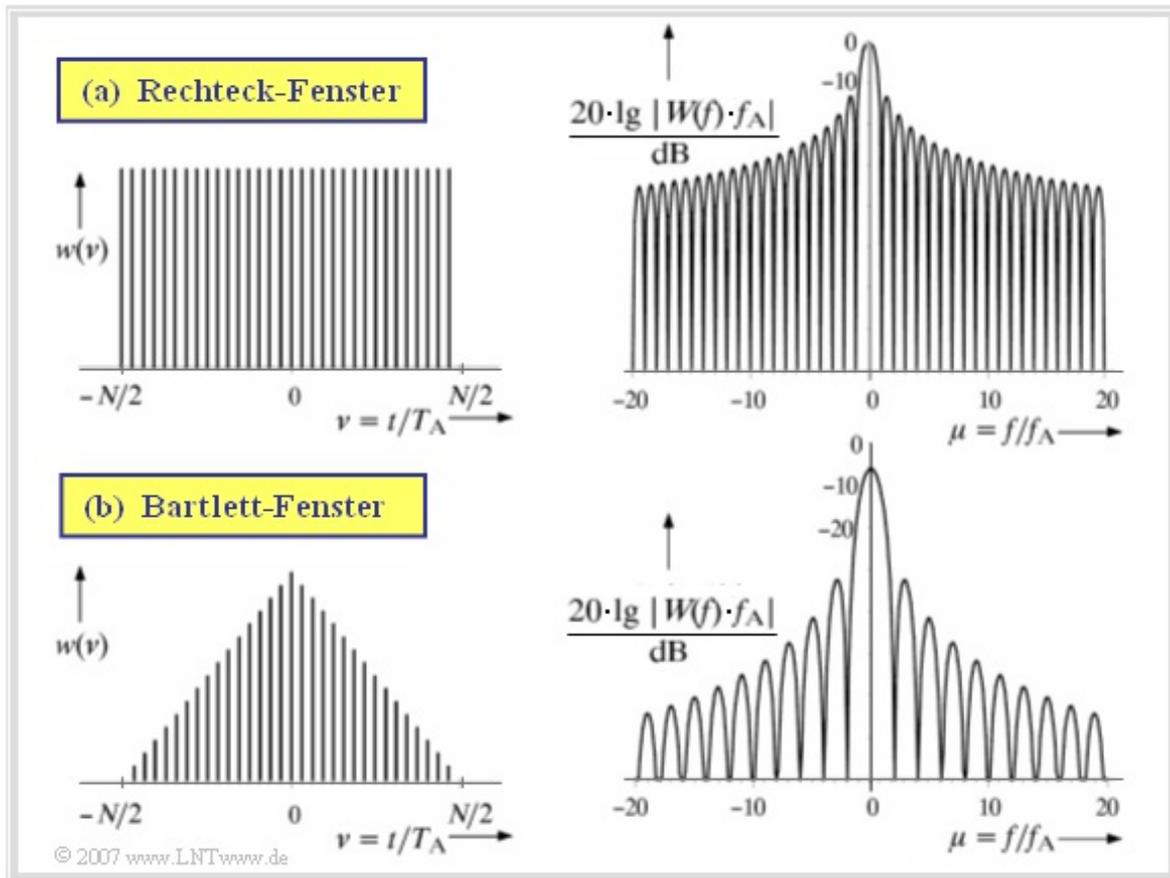


Vermisst man mit der gleichen Anordnung eine Schwingung der Frequenz $f_0 = 109.375$ kHz (das heißt: $T_0 \approx 9.14$ μ s) entsprechend der unteren Grafik (b), so kommt es zu signifikanten Verfälschungen des Spektrums. Da nun $T_P/T_0 = 3.5$ nicht mehr ganzzahlig ist, entstehen durch die periodische Fortsetzung des Zeitausschnittes Phasensprünge, in unserem Beispiel um π .

Der Spektralbereich besteht nun nicht mehr aus zwei Diracfunktionen wie im Beispiel (a), sondern aus einer annähernd „kontinuierlichen“ Frequenzfunktion mit dem Maximum in der Nähe der tatsächlichen Signalfrequenz und einer Reihe weiterer Anteile, die man **Seitenkeulen** (englisch: *Side Lobes*) nennt.

Systemtheoretische Beschreibung der Fensterung (1)

Das Zustandekommen solcher unerwünschter Seitenkeulen soll nun anhand der nachfolgenden Grafik systemtheoretisch erklärt werden.



Betrachten Sie zunächst die obere Grafik (a) für das **Rechteckfenster**.

- Die in der DFT implizit enthaltene Zeitbegrenzung entspricht der Multiplikation des Signals $x(t)$ mit einer rechteckförmigen Fensterfunktion $w(t)$ der Höhe 1 und der Dauer T_P . Das linke obere Bild zeigt die zeitdiskrete Darstellung der Rechteckfunktion mit $v = t/T_A$:

$$w(v) = \begin{cases} 1 & \text{für } -N/2 \leq v < N/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Aus der Multiplikation $y(t) = x(t) \cdot w(t)$ der beiden Signale folgt für die Spektralfunktion $Y(f) = X(f) * W(f)$, wobei bei rechteckförmiger Fensterfunktion mit $f_A = 1/T_P$ gilt:

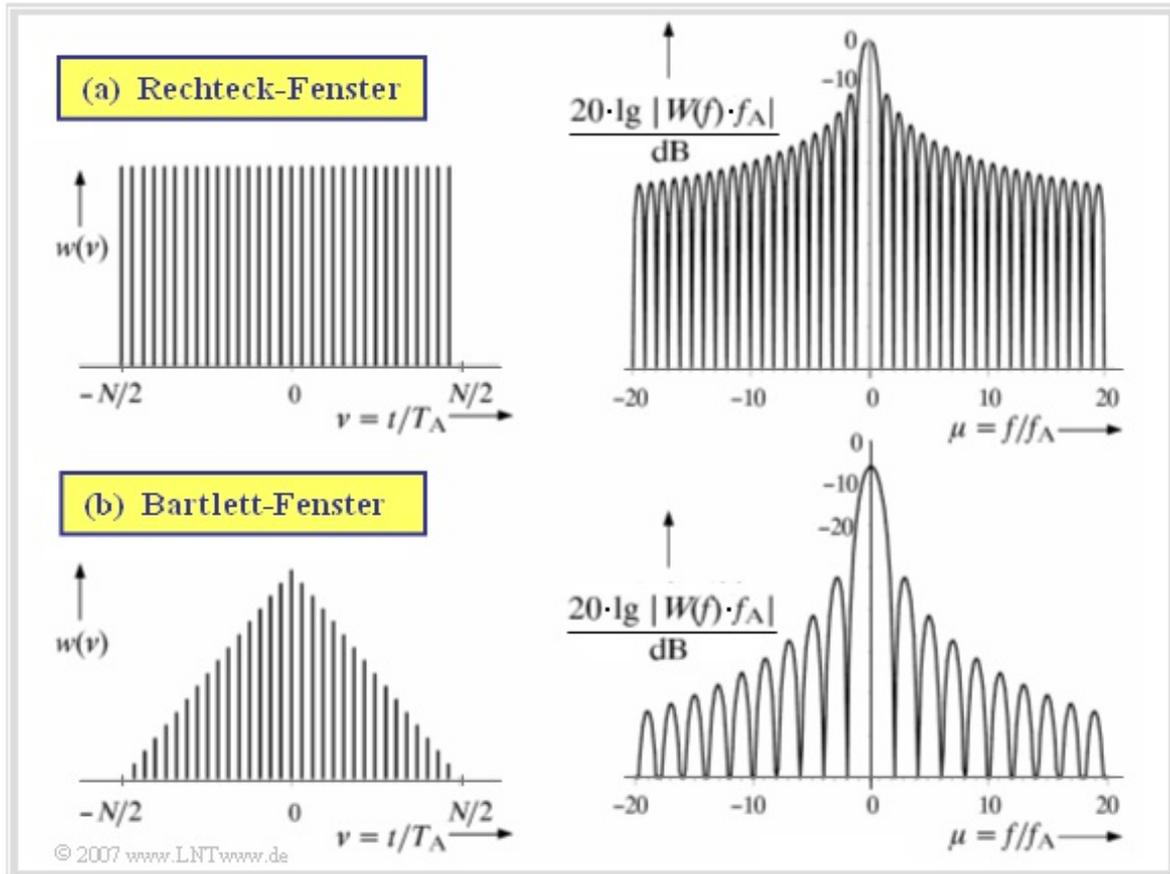
$$W(f) = T_P \cdot \text{si}(\pi \cdot f \cdot T_P) = 1/f_A \cdot \text{si}(\pi \cdot f/f_A).$$

Diese Funktion ist in der rechten oberen Grafik in logarithmierter Form dargestellt.

- Liegen alle Spektralanteile des zu analysierenden Signals $x(t)$ im Frequenzraster $\mu \cdot f_A$, so bleiben die frequenzdiskreten Spektralwerte $D(\mu)$ durch die Faltung mit $W(f)$ unverändert. Andernfalls führt die Faltungsoperation mit $W(f)$ zu Verfälschungen, da die Nullstellen der si-Funktion nun nicht mehr zu den diskreten Werten des Eingangsspektrums passen.

Systemtheoretische Beschreibung der Fensterung (2)

Die durch Begrenzung und periodische Fortsetzung entstehenden Unstetigkeiten im Zeitbereich werden vermindert, wenn statt der konstanten Eins-Bewertung durch das Rechteck die beiden Randbereiche des Fensters schwächer gewichtet werden als die Mitte.



Betrachten Sie die untere Grafik (b) für das **Bartlett-Fenster** – auch Dreieckfenster genannt:

- Die zeitdiskrete Beschreibung des Bartlett-Fensters lautet mit $v = t/T_A$:

$$w(v) = \begin{cases} 1 - 2 \cdot |v|/N & \text{für } -N/2 \leq v < N/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

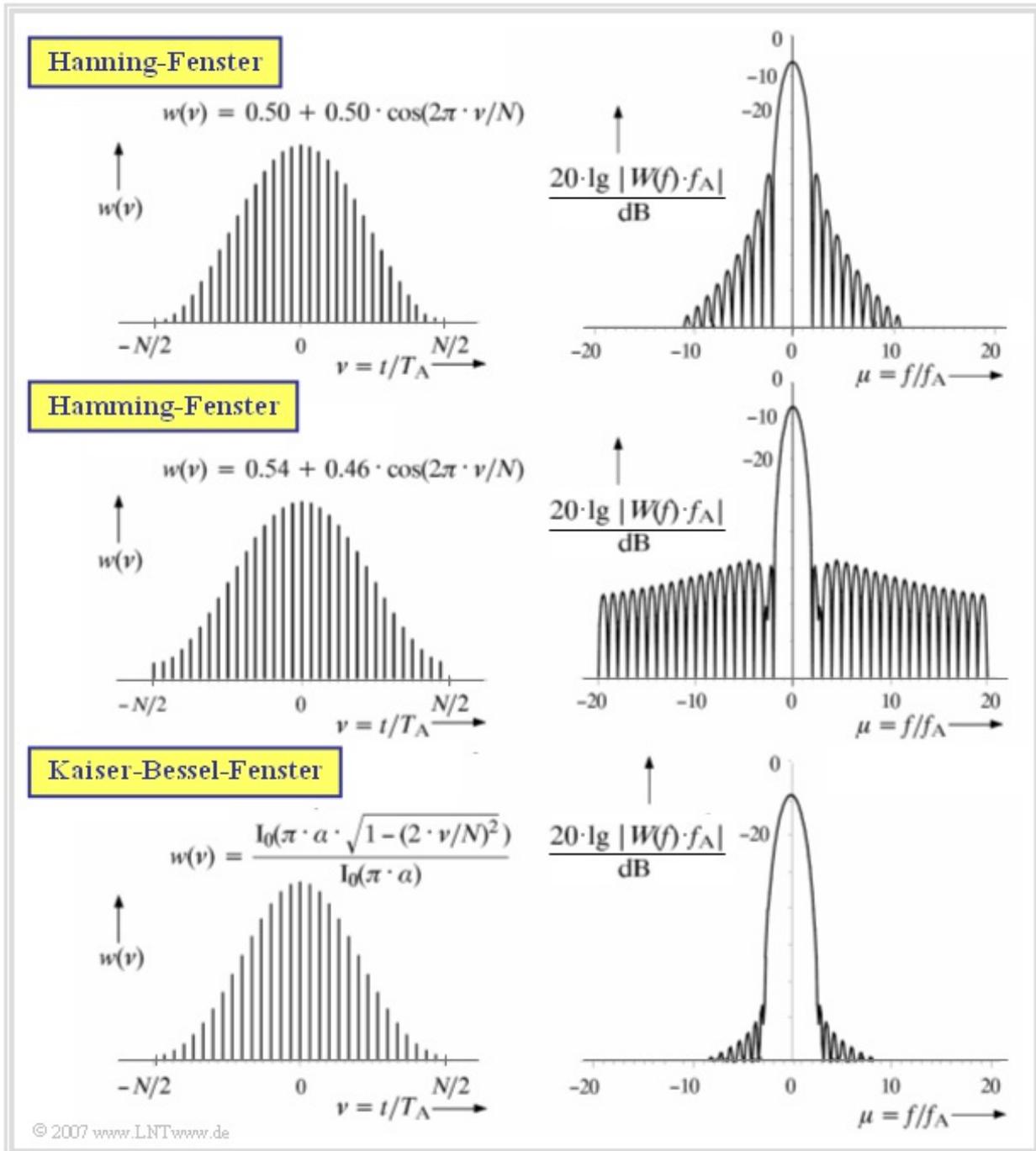
Daraus folgt für die zeitkontinuierliche Fensterfunktion und die Spektraldarstellung:

$$w(t) = \begin{cases} 1 - |t|/(T_P/2) & |t| \leq T_P/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \circ \bullet \quad W(f) = 1/(2f_A) \cdot \text{si}^2(\pi \cdot f/(2f_A)).$$

- Durch die geringere Bewertung der bei unbegrenzten Signalen besonders problematischen Randbereiche hat das (logarithmisch gezeichnete) Spektrum $W(f)$ geringere Seitenschwinger als die si-Funktion im obigen Bild, was zu geringeren Leckkomponenten führt.
- Die bessere Unterdrückung der Seitenkeulen geht allerdings auf Kosten einer merklichen Verkleinerung und Verbreiterung der Hauptkeule, wodurch das Auflösungsvermögen des Bartlett-Fensters gegenüber der Rechteck-Fensterung eingeschränkt wird.

Spezielle Fensterfunktionen

Nun werden einige häufig eingesetzten Fensterfunktionen – nämlich das Hanning-, Hamming- und das Kaiser-Bessel-Fenster – anhand von Grafiken und Gleichungen beschrieben, wobei für die Laufvariable im Zeitbereich stets $-N/2 \leq v < N/2$ gilt. Die Eignung dieser Fensterfunktionen für verschiedenartige Aufgaben der Spektralanalyse nennen wir auf der nächsten Seite.



- Beim Kaiser-Bessel-Fenster sind die Funktionen im Zeit- und Frequenzbereich jeweils für $\alpha = 3.5$ dargestellt. $I_0(\cdot)$ bezeichnet die Besselfunktion nullter Ordnung.
- Weitere Fensterfunktionen wie das Blackman-Harris-Fenster, das Cosinus-Rolloff-Fenster (auch Tukey-Fenster genannt) und noch viele Andere mehr finden Sie in [Söd93].

Gütekriterien von Fensterfunktionen (1)

Die Tabelle gibt Gütekriterien für die auf den letzten Seiten beschriebenen Fensterfunktionen wieder. Die detaillierte Beschreibung dieser Gütekriterien folgt auf der nächsten Seite.

Die Auswahl einer geeigneten Fensterfunktion sollte nach folgenden Gesichtspunkten erfolgen:

- Der **minimale Abstand zwischen Hauptkeule und Seitenkeulen** sollte groß sein, um den Einfluss des Leckeffektes gering zu halten und die Amplitudenaufösung zu verbessern.
- Aus Gründen einer guten Frequenzselektivität sollte die **6dB-Bandbreite** gering sein. Ist diese zu groß, so überdeckt eine dominante Spektrallinie kleinere Anteile in der Umgebung.
- Der **maximale Prozessverlust** (in dB) beinhaltet den maximalen Skalierungsfehler und die äquivalente Rauschbandbreite. Diese Größe sollte auf keinen Fall 3.7 dB überschreiten.

Diese wichtigsten Gütekriterien sind in der folgenden Tabelle durch rote Schrift hervorgehoben.

Gütekriterium	Rechteck-Fenster	Dreieck-Fenster (Bartlett-Fenster)	Hanning-Fenster	Hamming-Fenster	Blackman-Harris-Fenster 4. Ordnung	Cos-Rolloff-Fenster ($r = 0.5$)	Kaiser-Bessel-Fenster ($\alpha = 3.5$)
Minimaler Abstand von Haupt- und Seitenkeulen	13 dB	26 dB	32 dB	43 dB	92 dB	15 dB	82 dB
Seitenkeulenabfall pro Oktave	6 dB	12 dB	18 dB	6 dB	6 dB	18 dB	6 dB
6 dB-Bandbreite, normiert auf f_A	1.21	1.78	2.00	1.81	2.72	1.57	2.57
Fensterfläche $W(0)$, normiert auf T_p	1.00	0.50	0.50	0.54	0.36	0.75	0.37
Maximaler Skalierungsfehler	3.92 dB	1.82 dB	1.42 dB	1.78 dB	0.87 dB	2.24 dB	0.89 dB
normierte äquivalente Rauschbandbreite $\square f_w$	1.00	1.33	1.50	1.36	2.00	1.22	1.93
Maximaler Prozessverlust V_p	3.92 dB	3.06 dB	3.18 dB	3.10 dB	3.88 dB	3.11 dB	3.74 dB

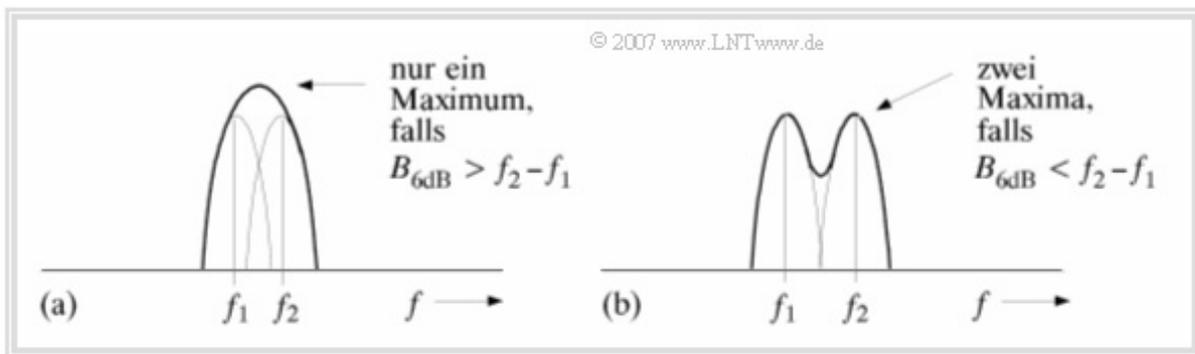
In jeder Zeile sind eher günstige Fensterfunktionen grün und eher ungünstigste grau hinterlegt. Aus der Verteilung der grünen und grauen Flächen ist bereits ersichtlich, dass es die optimale Fensterfunktion nicht gibt.

- Ein guter Kompromiss ist das **Hanning-Fenster** (in der Tabelle blau hervorgehoben), das bezüglich der drei Hauptkriterien (rote Markierungen) nie mit „Grau“ abschneidet.
- Das *Hamming-Fenster* unterscheidet sich hiervon im Zeitbereich nur geringfügig, aber im Spektralbereich beträchtlich. So beträgt der Seitenkeulenabfall pro Oktave nur mehr 6 dB.

Gütekriterien von Fensterfunktionen (2)

Nun werden die in der Tabelle angegebenen Gütekriterien detailliert beschrieben.

- Je größer der **minimale Haupt-zu-Seitenkeulen-Abstand** \Rightarrow Verhältnis der Hauptkeule zur höchsten Seitenkeule, desto besser ist die Amplitudenauflösung einer Fensterfunktion. Beim Rechteck ist dieser Abstand erwartungsgemäß am kleinsten (13 dB). Das beste Ergebnis liefert mit 92 dB das Blackman-Harris-Fenster vierter Ordnung.
- Da jedoch nicht nur die höchste, sondern auch alle weiteren Seitenkeulen zum Leckeffekt beitragen, ist der **Seitenkeulenabfall** ein weiteres Maß für das Auflösungsvermögen. Von den angegebenen Fensterfunktionen weisen diesbezüglich das Hanning-Fenster sowie das Cosinus-Rolloff-Fenster mit Rolloff $r = 0.5$ die günstigsten Werte auf (18 dB/Oktave).
- Die **6dB-Bandbreite**, die aus der logarithmierten Spektralfunktion abgelesen werden kann, ist ein wichtiges Maß für das Frequenzauflösungsvermögen. Zwei im Signal vorhandene Spektralanteile bei f_1 und f_2 können nur dann aufgelöst werden, wenn die Differenz $f_2 - f_1$ größer als die 6dB-Bandbreite der verwendeten Fensterfunktion ist (siehe rechte Grafik).



- Die **Fensterfläche** der Funktion $w(t)$ gibt zugleich die Höhe $W(0)$ im Spektralbereich an. Bei allen Fenstern mit Ausnahme des Rechtecks ergibt sich aufgrund der Unterdrückung der äußeren Abtastwerte eine Fensterfläche kleiner 1 und damit ein Fehler in der Amplitude des DFT-Ergebnisses, der jedoch bei Kenntnis von $w(t)$ vollständig korrigierbar ist.

Maximaler Prozessverlust

Dieses kombinierte Gütekriterium berücksichtigt den **maximalen Skalierungsfehler** ebenso wie die (normierte) **äquivalente Rauschbandbreite**. Es wird meist in dB angegeben:

$$10 \cdot \lg V_P \text{ (in dB)} = 20 \cdot \lg \frac{|W(f=0)|}{|W(f=f_A/2)|} + 10 \cdot \lg \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2 df}{f_A \cdot |W(f=0)|^2}.$$

Aus der **Ergebnistabelle** erkennt man, dass V_P für die betrachteten Fensterfunktionen stets Werte zwischen 3 dB und 4 dB annimmt, wobei Fensterfunktionen mit $V_P > 3.7$ dB (Rechteck, Blackman–Harris, Kaiser–Bessel) nicht verwendet werden sollten. Gerade diese sind aber bezüglich des Haupt–zu–Seitenkeulen–Abstands am besten. Die beiden Anteile sind wie folgt zu interpretieren:

- Der **maximale Skalierungsfehler** ist das Verhältnis, um das sich die mit der DFT ermittelte Amplitude von der tatsächlichen Signalamplitude unterscheidet. Der Amplitudenfehler aufgrund einer Fensterfläche kleiner als 1 wird dabei als korrigiert vorausgesetzt.
- Der Fehler ist am größten, wenn die Frequenz f_0 einer harmonischen Schwingung in der Mitte zwischen zwei DFT–Stützstellen liegt \Rightarrow Quotient $|W(f=0)| / |W(f=f_A/2)|$. Je breiter die Hauptkeule der Fensterfunktion ist, um so kleiner ist dieser Skalierungsfehler.
- Die **äquivalente Rauschbreite** der verwendeten Fensterfunktion – berechenbar als Breite des flächengleichen Rechtecks bezüglich dem Betragsquadrat $|W(f)|^2$ der Spektralfunktion – erfasst den störenden Einfluss von weißem Rauschen und sollte möglichst gering sein.
- Die kleinste Rauschbandbreite ergibt sich für das Rechteck. Alle anderen Fensterfunktionen besitzen eine größere Rauschbandbreite und damit bei Vorhandensein von Rauschstörungen auch ein (deutlich) ungünstigeres Signal–zu–Rausch–Leistungsverhältnis.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Eine ideale Fensterfunktion gibt es nicht. Je nach Aufgabenstellung (gute Amplituden– bzw. Frequenzauflösung) liefern unterschiedliche Fenster das jeweils beste Ergebnis.
- Ein tragbarer Kompromiss hinsichtlich aller Kriterien ist das **Hamming–Fenster**, das lediglich beim Seitenkeulenabfall (nur 6 dB pro Oktave) einen ungünstigen Wert liefert.
- Obwohl sich das **Hanning–Fenster** im Zeitbereich vom Hamming–Fenster nur marginal unterscheidet, ist im Spektralbereich der Unterschied zwischen beiden beträchtlich.
- Zu empfehlen ist, dass man zur Spektralanalyse stets mehrere Fensterfunktionen heranzieht oder zumindest eine Fensterfunktion mit verschiedenen Parametern verwendet.

Rechenaufwand von DFT bzw. IDFT

Ein Nachteil der direkten Berechnung der (im Allgemeinen komplexen) DFT-Zahlenfolgen

$$\langle D(\mu) \rangle \bullet \text{---}(N) \text{---} \circ \langle d(\nu) \rangle$$

gemäß den in **Kapitel 5.2** angegebenen Gleichungen ist der große Rechenaufwand. Zum Beispiel kann dieser Aufwand für die Diskrete Fouriertransformation (DFT)

$$\begin{aligned} N \cdot D(\mu) &= \sum_{\nu=0}^{N-1} d(\nu) \cdot w^{\nu \cdot \mu} = \\ &= d(0) \cdot w^0 + d(1) \cdot w^\mu + d(2) \cdot w^{2\mu} + \dots + d(N-1) \cdot w^{(N-1) \cdot \mu} \end{aligned}$$

wie folgt abgeschätzt werden:

- Wir gehen davon aus, dass die Potenzen des komplexen Drehfaktors $w = \exp(-j2\pi/N)$ bereits in Real- und Imaginärteilform in einer Lookup-Tabelle vorliegen.
- Zur Berechnung eines einzelnen Koeffizienten benötigt man dann $N-1$ komplexe Multiplikationen und ebenso viele komplexe Additionen.
- Jede komplexe Addition erfordert zwei reelle Additionen:

$$(R_1 + j \cdot I_1) + (R_2 + j \cdot I_2) = (R_1 + R_2) + j \cdot (I_1 + I_2).$$

- Jede komplexe Multiplikation erfordert vier reelle Multiplikationen und zwei reelle Additionen (eine Subtraktion wird wie eine Addition behandelt):

$$(R_1 + j \cdot I_1)(R_2 + j \cdot I_2) = (R_1 \cdot R_2 - I_1 \cdot I_2) + j \cdot (R_1 \cdot I_2 + R_2 \cdot I_1).$$

- Somit sind zur Berechnung aller N Koeffizienten insgesamt die folgende Anzahl M reeller Multiplikationen und die Anzahl A reeller Additionen erforderlich:

$$M = 4 \cdot N \cdot (N - 1), \quad A = 2 \cdot N \cdot (N - 1) + 2 \cdot N \cdot (N - 1) = M.$$

- In heutigen Rechnern benötigen Multiplikationen und Additionen/Subtraktionen etwa die gleiche Rechenzeit. Es genügt, die Gesamtzahl $O = M + A$ aller Operationen zu betrachten:

$$O = 8 \cdot N \cdot (N - 1) \approx 8 \cdot N^2.$$

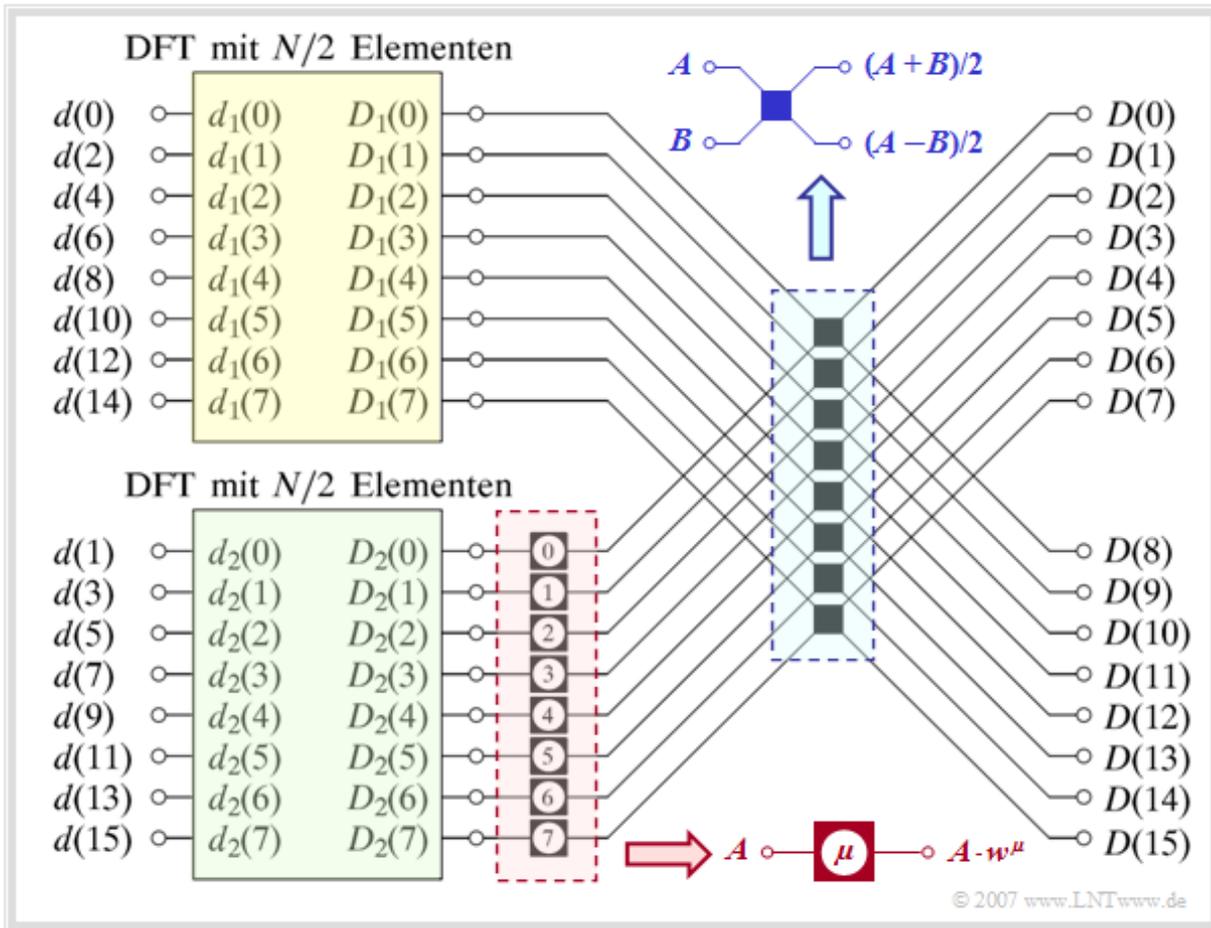
- Daraus folgt: Man benötigt bereits für eine DFT (oder eine IDFT) mit $N = 1000$ knapp acht Millionen Rechenoperationen. Für $N = 16$ sind noch 1920 Rechenoperationen erforderlich.

Ist der Parameter N eine Potenz zur Basis 2, so können rechenzeitgünstigere Algorithmen angewendet werden. Die Vielzahl solcher aus der Literatur bekannten Verfahren werden unter dem Sammelbegriff **Fast-Fouriertransformation** – abgekürzt FFT – zusammengefasst. Alle diese Methoden basieren auf dem Überlagerungssatz der DFT.

Literatur: [Ach95] – [CT65] – [Duh86] – [Heu82] – [Mar94] – [Mil00] – [Pap62] – [VHH98]

Überlagerungssatz der DFT (1)

Die Grafik verdeutlicht den so genannten **Überlagerungssatz** der DFT am Beispiel $N = 16$.



Der dadurch beschriebene Algorithmus ist durch folgende Schritte gekennzeichnet:

- Die Folge $\langle d(v) \rangle$ der Länge N wird in zwei Teilfolgen $\langle d_1(v) \rangle$ und $\langle d_2(v) \rangle$ jeweils halber Länge separiert (gelb bzw. grün hinterlegt). Mit $0 \leq v < N/2$ erhält man die Folgeelemente $d_1(v) = d(2v)$, $d_2(v) = d(2v + 1)$.

- Die Ausgangsfolgen $\langle D_1(\mu) \rangle$ und $\langle D_2(\mu) \rangle$ der beiden Teilblöcke ergeben sich daraus jeweils durch eine eigene DFT, aber nun nur noch mit halber Länge $N/2 = 8$:

$$\langle D_1(\mu) \rangle \bullet \text{---} (N/2) \text{---} \circ \langle d_1(v) \rangle, \quad \langle D_2(\mu) \rangle \bullet \text{---} (N/2) \text{---} \circ \langle d_2(v) \rangle.$$

- Die Ausgangswerte $D_2(\mu)$ der unteren (grünen) DFT (mit $0 \leq \mu < N/2$) werden danach im rot umrandeten Block durch komplexe Drehfaktoren hinsichtlich Phasenlage verändert:

$$D_2(\mu) \Rightarrow D_2(\mu) \cdot w^\mu, \quad \text{wobei } w = e^{-j \cdot 2\pi/N}.$$

- Jeder einzelne **Butterfly** im blau umrandeten Block liefert durch Addition bzw. Subtraktion zwei Elemente der gesuchten Ausgangsfolge. Mit $0 \leq \mu < N/2$ gilt dabei:

$$\begin{aligned} D(\mu) &= 1/2 \cdot [D_1(\mu) + D_2(\mu) \cdot w^\mu], \\ D(\mu + N/2) &= 1/2 \cdot [D_1(\mu) - D_2(\mu) \cdot w^\mu]. \end{aligned}$$

Durch diese erste Anwendung des Überlagerungssatzes halbiert sich in etwa der Rechenaufwand.

Überlagerungssatz der DFT (2)

Beispiel: Die DFT-Koeffizienten $d(v)$ zur Beschreibung des Zeitverlaufs seien entsprechend der Zeile 2 der folgenden Tabelle „dreieckförmig“ belegt. Beachten Sie hierbei die periodische Fortsetzung der DFT, so dass der lineare Anstieg für $t < 0$ durch die Koeffizienten $d(9) \dots d(15)$ ausgedrückt wird.

Durch Anwendung des DFT-Algorithmus mit $N = 16$ erhält man die in der ebenfalls blau hinterlegten Zeile 3 angegebenen Spektralkoeffizienten $D(\mu)$, die bei Vernachlässigung des Aliasingfehlers gleich $D(\mu) = 4 \cdot \text{si}^2(\pi \cdot \mu/2)$ wären. Man erkennt, dass sich der Aliasingfehler nur auf die ungeradzahigen Koeffizienten auswirkt (schraffierte Felder). Beispielsweise müsste $D(1) = 16/\pi^2 \approx 1.621 \neq 1.642$ sein.

v bzw. μ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$d(v)$	8.0	7.0	6.0	5.0	4.0	3.0	2.0	1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
$D(\mu)$	4.000	1.642	0.000	0.202	0.000	0.090	0.000	0.066	0.000	0.066	0.000	0.090	0.000	0.202	0.000	1.642
$d_1'(v)$	8.0	0.0	6.0	0.0	4.0	0.0	2.0	0.0	0.0	0.0	2.0	0.0	4.0	0.0	6.0	0.0
$D_1'(\mu)$	2.000	0.854	0.000	0.146	0.000	0.146	0.000	0.854	2.000	0.854	0.000	0.146	0.000	0.146	0.000	0.854
$d_2'(v)$	0.0	7.0	0.0	5.0	0.0	3.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	3.0	0.0	5.0	0.0	7.0
$D_2'(\mu)$	2.000	0.788	0.000	0.056	0.000	-0.056	0.000	-0.788	-2.000	-0.788	0.000	-0.056	0.000	0.056	0.000	0.788

Spaltet man die Gesamtfolge $\langle d(v) \rangle$ in zwei Teilfolgen $\langle d_1'(v) \rangle$ und $\langle d_2'(v) \rangle$ auf, und zwar derart, dass die erste (gelb hinterlegte) Teilfolge nur geradzahige Koeffizienten ($v = 0, 2, \dots, N-2$) und die zweite (grün hinterlegt) nur ungeradzahige Koeffizienten ($v = 1, 3, \dots, N-1$) beinhalten und alle anderen zu 0 gesetzt sind, so erhält man die zugehörigen Folgen im Spektralbereich:

$$\langle D_1'(\mu) \rangle \bullet \text{---} (N) \text{---} \circ \langle d_1'(v) \rangle, \quad \langle D_2'(\mu) \rangle \bullet \text{---} (N) \text{---} \circ \langle d_2'(v) \rangle.$$

In den gelb bzw. grün hinterlegten Zeilen 4 ... 7 erkennt man:

- Wegen $d(v) = d_1'(v) + d_2'(v)$ gilt auch $D(\mu) = D_1'(\mu) + D_2'(\mu)$. Dies lässt sich zum Beispiel mit dem Additionstheorem linearer Systeme begründen.
- Die Periode der Folge $\langle D_1'(\mu) \rangle$ beträgt aufgrund des Nullsetzens eines jeden zweiten Zeitkoeffizienten nun $N/2$ im Gegensatz zur Periode N der Ursprungsfolge $\langle D(\mu) \rangle$:

$$D_1'(\mu + N/2) = D_1'(\mu).$$

- $\langle D_2'(\mu) \rangle$ beinhaltet zusätzlich einen Phasenfaktor (Verschiebung um einen Abtastwert), der einen Vorzeichenwechsel zweier um $N/2$ auseinanderliegender Koeffizienten bewirkt:

$$D_2'(\mu + N/2) = -D_2'(\mu).$$

- Die Berechnung von $\langle D_1'(\mu) \rangle$ und $\langle D_2'(\mu) \rangle$ ist aber jeweils ebenso aufwändig wie die Bestimmung von $\langle D(\mu) \rangle$, da $\langle d_1'(v) \rangle$ und $\langle d_2'(v) \rangle$ ebenfalls aus N Elementen bestehen, auch wenn einige 0 sind.
- Das Beispiel wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.*

Überlagerungssatz der DFT (3)

Beispiel (Fortsetzung):

Verzichtet man auf die Koeffizienten $d_1'(v) = 0$ mit ungeraden sowie auf $d_2'(v) = 0$ mit geraden Indizes, so kommt man zu den Teilfolgen $\langle d_1(v) \rangle$ und $\langle d_2(v) \rangle \Rightarrow$ Zeilen 9 und 11. Man erkennt:

- Die beiden Zeitfolgen $\langle d_1(v) \rangle$ und $\langle d_2(v) \rangle$ weisen damit ebenso wie die dazugehörigen Spektralfolgen $\langle D_1(\mu) \rangle$ und $\langle D_2(\mu) \rangle$ nur noch die Dimension $N/2$ auf.
- Ein Vergleich der Zeilen 5, 7, 10 und 12 zeigt für $0 \leq \mu < N/2$ folgenden Zusammenhang:

$$D_1'(\mu) = 1/2 \cdot D_1(\mu), \quad D_2'(\mu) = 1/2 \cdot D_2(\mu) \cdot w^\mu.$$

- Entsprechend erhält man für $N/2 \leq \mu < N$:

$$D_1'(\mu) = 1/2 \cdot D_1(\mu - N/2),$$

$$D_2'(\mu) = 1/2 \cdot D_2(\mu - N/2) \cdot w^\mu = -1/2 \cdot D_2(\mu - N/2) \cdot w^{\mu - N/2}.$$

- Zum Beispiel erhält man mit $N = 16 \Rightarrow w = \exp(-j \cdot \pi/8)$ für die Indizes $\mu = 1$ bzw. $\mu = 9$:

$$D_1'(1) = 1.708/2 = 0.854, \quad D_2'(1) = 1/2 \cdot (1.456 + j0.603) \cdot e^{-j \cdot \pi/8} = 0.788$$

$$\Rightarrow D(1) = D_1'(1) + D_2'(1) = 1.642.$$

$$D_9'(1) = 1.708/2 = 0.854, \quad D_2'(9) = -1/2 \cdot (1.456 + j0.603) \cdot e^{-j \cdot \pi/8} = -0.788$$

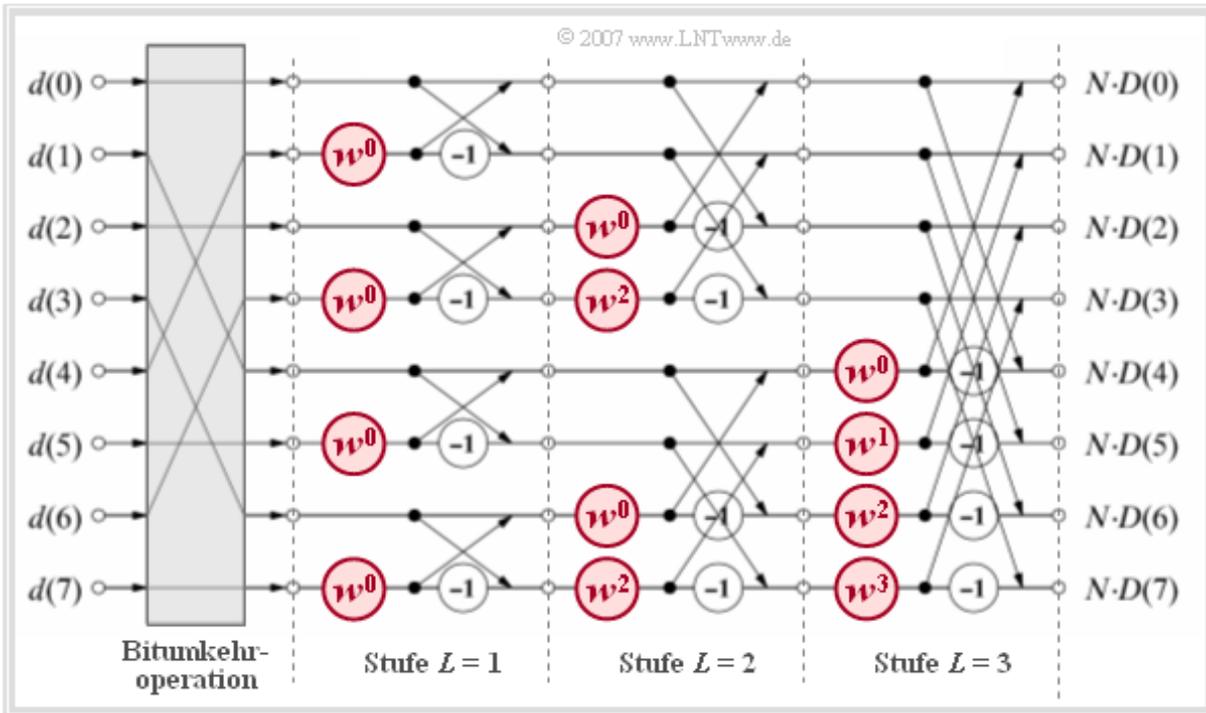
$$\Rightarrow D(9) = D_1'(9) + D_2'(9) = 0.066.$$

v bzw. μ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$d(v)$	8.0	7.0	6.0	5.0	4.0	3.0	2.0	1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
$D(\mu)$	4.000	1.642	0.000	0.202	0.000	0.090	0.000	0.066	0.000	0.066	0.000	0.090	0.000	0.202	0.000	1.642
$d_1'(v)$	8.0	0.0	6.0	0.0	4.0	0.0	2.0	0.0	0.0	0.0	2.0	0.0	4.0	0.0	6.0	0.0
$D_1'(\mu)$	2.000	0.854	0.000	0.146	0.000	0.146	0.000	0.854	2.000	0.854	0.000	0.146	0.000	0.146	0.000	0.854
$d_2'(v)$	0.0	7.0	0.0	5.0	0.0	3.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	3.0	0.0	5.0	0.0	7.0
$D_2'(\mu)$	2.000	0.788	0.000	0.056	0.000	-0.056	0.000	-0.788	-2.000	-0.788	0.000	-0.056	0.000	0.056	0.000	0.788
v bzw. μ	0	1	2	3	4	5	6	7								
$d_1(v)$	8.0	6.0	4.0	2.0	0.0	2.0	4.0	6.0								
$D_1(\mu)$	4.000	1.708	0.000	0.292	0.000	0.292	0.000	1.708								
$d_2(v)$	7.0	5.0	3.0	1.0	1.0	3.0	5.0	7.0								
$D_2(\mu)$	4.000	1.456 + j - 0.603	0.000	0.043 + j - 0.103	0.000	0.043 - j - 0.103	0.000	1.456 - j - 0.603								

Durch diese erste Anwendung des Überlagerungssatzes halbiert sich nahezu der Rechenaufwand. Statt $O = 1920$ benötigt man nur $O = 2 \cdot 448 + 8 \cdot (4+2) + 16 \cdot 2 = 976$ reelle Operationen. Der erste Summand berücksichtigt die beiden DFT-Berechnungen mit $N/2 = 8$, der Rest die acht komplexen Multiplikationen und die 16 komplexen Additionen bzw. Subtraktionen.

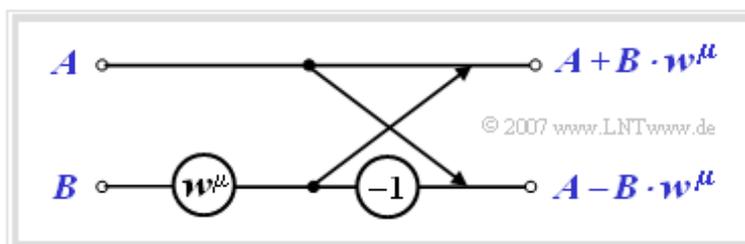
Radix-2-Algorithmus nach Cooley und Tukey (1)

Ebenso wie andere FFT- Algorithmen baut das hier vorgestellte Verfahren von Cooley und Tukey auf dem Überlagerungssatz der DFT auf. Es funktioniert nur dann, wenn die Stützstellenzahl N eine Zweierpotenz ist. Das folgende Bild verdeutlicht den Algorithmus – siehe auch [CT65] – für das Beispiel $N = 8$, wobei die Transformation vom Zeit- in den Frequenzbereich dargestellt ist.



Vor dem eigentlichen FFT-Algorithmus müssen die Eingangswerte $d(0), \dots, d(N-1)$ im grauen Block **Bitumkehroperation** umsortiert werden. Weiter erkennt man aus obiger Darstellung:

- Die Berechnung erfolgt in $\log_2 N = 3$ Stufen, wobei in jeder Stufe genau $N/2 = 4$ prinzipiell gleiche Berechnungen mit unterschiedlichem μ (= Exponent des komplexen Drehfaktors) ausgeführt werden. Eine solche Basisoperation bezeichnet man auch als **Butterfly**.
- Jeder Butterfly berechnet aus zwei (im Allgemeinen komplexen) Eingangsgrößen A und B die beiden Ausgangsgrößen $A + B \cdot w^\mu$ sowie $A - B \cdot w^\mu$ entsprechend folgender Skizze:



- Die komplexen Spektralkoeffizienten $D(0), \dots, D(N-1)$ erhält man am Ausgang der letzten Stufe nach Division durch N . Wie in **Aufgabe Z5.5** gezeigt wird, ergibt sich gegenüber der DFT eine deutlich kürzere Rechenzeit – z.B. für $N = 1024$ um mehr als den Faktor 150.

Die **inverse DFT** zur Berechnung der Zeitkoeffizienten aus den Spektralkoeffizienten lässt sich mit dem gleichen Algorithmus und nur geringfügigen Modifizierungen bewerkstelligen.

Radix-2-Algorithmus nach Cooley und Tukey (2)

Nachfolgend sehen Sie das C-Programm `fft(N, Re, Im)` gemäß dem oben beschriebenen Radix-2-Algorithmus:

```

1: # include <math.h>
2: # define pi 3.141592654
3: void fft(int N, float Re[], float Im[]);
4: long N; float Re[], Im[];
5: { void bitumkehr(), stufe();
6:   long i, ldl, L;
7:   bitumkehr(N, Re, Im);
8:   ldl=(log((double)N)/log(2.) + .5);
9:   for (L=1; L<=ldl; L++)
10:    stufe(L, N, Re, Im);
11:   for (i=0; i<N; i++)
12:     { Re[i] /= (N); Im[i] /= (N); }
13: }
14:
15: void stufe(L, N, Re, Im)
16: long L, N; float Re[], Im[];
17: { long i, k, m, mu;
18:   float arg, ReW, ImW, ReX, ImX;
19:   i = pow(2., L-1);
20:   for (mu=0; mu<i; mu++)
21:     { arg = pi*(double)mu/(double)i;
22:       ReW = cos(arg);
23:       ImW = -sin(arg);
24:       for (k=mu; k<N; k+=2*i)
25:         { m = k+i;
26:           ReX = ReW*Re[m] - ImW*Im[m];
27:           ImX = ReW*Im[m] + ImW*Re[m];
28:           Re[m] = Re[k] - ReX;
29:           Im[m] = Im[k] - ImX;
30:           Re[k] += ReX;
31:           Im[k] += ImX;
32:         }
33:     }
34: }
    
```

Mathematische Bibliothek
 Definition der Zahl pi
 Unterprogramm FFT
 Übergabeparameter
 Verwendete Unterprogramme
 Interne Variable

Bitumkehroperation
 Logarithmus dualis von N
 Insgesamt $\log_2 N$ mal:
 Berechnungen für eine Stufe
 Für alle $2^i N$ Koeffizienten:
Division durch N

Berechnungen der L -ten Stufe
 Übergabeparameter von „FFT“
 Interne Long-Variable
 Interne Float-Variable
 $i = 2^{L-1}$ Phasenfaktoren
Äußere Schleife – i mal durchlaufen
 Argument des Drehfaktors w
 Realteil von w
 Imaginärteil von w
Innere Schleife – $N/2^i$ mal durchlaufen
 Verknüpfung von Index k und m
 Hilfsgrößen aus $[m]$ und w

Differenz ins Element $[m]$
 Summe ins Element $[k]$

© 2007 www.LNTwww.de

- Beim Aufruf beinhalten die beiden Float-Arrays „Re“ und „Im“ die jeweils N Real- und Imaginärteile der komplexen Zeitkoeffizienten $d(0), \dots, d(N-1)$.
- In den gleichen Feldern „Re“ und „Im“ werden die N komplexen Spektralkoeffizienten $D(0), \dots, D(N-1)$ am Programmende an das aufrufende Programm zurückgegeben.
- Aufgrund dieser „In-Place“-Programmierung reichen für diesen Algorithmus N komplexe Speicherplätze aus, allerdings nur, wenn zu Beginn die Eingangswerte umsortiert werden.
- Dies geschieht durch das Programm „bitumkehr“, wobei die Inhalte von $\text{Re}(v)$ und $\text{Im}(v)$ in die Elemente $\text{Re}(\kappa)$ und $\text{Im}(\kappa)$ eingetragen werden. Die folgende Tabelle gilt für $N = 8$.

v	0	1	2	3	4	5	6	7
v als Dualzahl	000	001	010	011	100	101	110	111
Bitumkehrung	000	100	010	110	001	101	001	111
κ	0	4	2	6	1	5	3	7

© 2007 www.LNTwww.de

Schreibt man den Index v als Dualzahl und stellt die $\log_2 N$ Bits in umgekehrter Reihenfolge dar, so ergibt sich der neue Index κ . Beispielsweise wird so aus $v = 3$ der neue Index $\kappa = 6$.