

Überblick zu Kapitel 1 des Buches „LZI–Systeme“

Im Buch „Signal darstellung“ wurden Sie mit der mathematischen Beschreibung deterministischer Signale im Zeit- und Frequenzbereich vertraut gemacht. Dieses Buch beschreibt nun, welche Veränderungen ein Signal bzw. dessen Spektrum durch ein Nachrichtensystem erfährt und wie diese Veränderungen mathematisch erfasst werden können. Das „System“ kann sowohl eine einfache Schaltung als auch ein vollständiges, hochkompliziertes Übertragungssystem mit einer Vielzahl von Komponenten sein. Es wird hier lediglich vorausgesetzt, dass das System die beiden Eigenschaften **linear** und **zeitinvariant** aufweist.

Im ersten Kapitel werden die Grundlagen der so genannten **Systemtheorie** genannt, die eine einheitliche und einfache Beschreibung solcher Systeme erlaubt. Dieses Kapitel beinhaltet im Einzelnen:

- die Systembeschreibung im Frequenzbereich durch die *Übertragungsfunktion*,
- die Klassifizierung der Systeme als *Tiefpass*, *Hochpass*, *Bandpass* oder *Bandsperr*,
- die Systembeschreibung im Zeitbereich durch die *Impulsantwort* oder die *Sprungantwort*,
- eine Wiederholung der *Gesetzmäßigkeiten* der Fouriertransformation, und schließlich
- spezielle *systemtheoretische Tiefpassfunktionen*: Rechteck–, Spalt– und Gaußtiefpass.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 24 Bildschirmseiten mit Gleichungen, Beispielen und 45 Bildern verdeutlicht. Außerdem beinhaltet dieses erste Kapitel noch acht Aufgaben und acht Zusatzaufgaben mit 72 Teilaufgaben sowie vier Lernvideos (LV) und zwei Interaktionsmodule (IM), nämlich:

- **Einige Anmerkungen zur Übertragungsfunktion** (LV zu Kapitel 1.1, Dauer 9:08)
- **Eigenschaften des Übertragungskanal** (LV zu Kapitel 1.1, Dauer 5:50)
- **Eigenschaften von Tiefpass– und Bandpass–Signalen** (LV zu Kap. 1.1, Dauer 5:16)
- **Gesetze der Fouriertransformation** (LV zu Kap. 1.2, 2–tlg: Dauer 5:57 – 5:55)
- **Zur Verdeutlichung der grafischen Faltung** (IM zu Kapitel 1.2)
- **Tiefpässe im Frequenz– und Zeitbereich** (IM zu Kapitel 1.3)

Literatur: [Eic03] – [Fli91] – [GRS03] – [Han05] – [Hof85] – [KK10] – [Küp74] – [Lük04] – [Mar94] – [Schü91a] – [Schü91b] – [Söd00] – [Unb90]

Die in diesem Kapitel behandelte Thematik wird mit dem Programm „*ft*“ des Lehrsoftwarepakets *LNTsim* verdeutlicht. *LNTsim* beinhaltet 24 Grafikprogramme zur Darstellung wichtiger Themen der Nachrichtentechnik.

Hinweise zum Herunterladen des Programmpakets *LNTsim* und der Versuchsanleitung:

Lehrsoftwarepaket LNTsim (Zip–Version, mehr als 50 MB)

Das Ursachen-Wirkungs-Prinzip

Wir betrachten in diesem Kapitel stets das folgende einfache Modell:



Diese Anordnung ist wie folgt zu interpretieren:

- Im Mittelpunkt steht das sog. **System**, das in seiner Funktion weitestgehend abstrahiert ist („Black Box“). Über die Realisierung des Systems ist nichts Genaues bekannt.
- Die auf dieses System einwirkende zeitabhängige Eingangsgröße $x(t)$ bezeichnen wir im Folgenden auch als die **Ursachenfunktion**.
- Am Ausgang des Systems erscheint dann die **Wirkungsfunktion** $y(t)$ – quasi als Antwort des Systems auf die Eingangsfunktion $x(t)$.

Anmerkung: Das System kann im Allgemeinen von beliebiger Art sein und ist nicht allein auf die Nachrichtentechnik beschränkt. Vielmehr wird auch in anderen Wissenschaftsgebieten wie zum Beispiel den Naturwissenschaften, der Volkswirtschaft und der Betriebswirtschaft, der Soziologie und Politologie versucht, Kausalzusammenhänge zwischen verschiedenen Größen durch das **Ursachen-Wirkungs-Prinzip** zu erfassen und zu beschreiben.

Die für diese phänomenologischen Systemtheorien angewandten Methoden unterscheiden sich aber deutlich von der Vorgehensweise in der Nachrichtentechnik, die in diesem ersten Kapitel des Buches „Lineare zeitinvariante Systeme“ dargelegt wird.

Anwendung in der Nachrichtentechnik

Das Ursachen–Wirkungs–Prinzip lässt sich auch in der Nachrichtentechnik anwenden, beispielsweise zur Beschreibung von Zweipolen. Hier kann man den Stromverlauf $i(t)$ als Ursachen- und die Spannung $u(t)$ als Wirkungsfunktion betrachten. Durch Beobachten der I/U–Beziehungen lassen sich so Rückschlüsse über die Eigenschaften des eigentlich unbekanntes Zweipols ziehen.

Karl Küpfmüller hat den Begriff „Systemtheorie“ 1949 erstmals (in Deutschland) eingeführt. Er versteht darunter eine Methode zur Beschreibung komplexer Kausalzusammenhänge in Naturwissenschaften und Technik, basierend auf einer Spektraltransformation – beispielsweise der im Buch „Signaldarstellung“ dargelegten Fouriertransformation.

Man kann ein ganzes Nachrichtensystem systemtheoretisch beschreiben. In diesem Fall ist

- die Ursachenfunktion das Eingangssignal $x(t)$ bzw. dessen Spektrum $X(f)$, und
- die Wirkungsfunktion das Ausgangssignal $y(t)$ oder die dazugehörige Spektralfunktion $Y(f)$.



Auch in den nachfolgenden Bildern werden die Eingangsgrößen meist blau, die Ausgangsgrößen rot und Systemgrößen grün gezeichnet.

Beispiel: Beschreibt das „Nachrichtensystem“ eine vorgegebene lineare Schaltung, so kann bei bekanntem Eingangssignal $x(t)$ das Ausgangssignal $y(t)$ mit Hilfe der Systemtheorie exakt vorhergesagt werden. Eine zweite Aufgabe der Systemtheorie besteht darin, durch Messung von $y(t)$ bei Kenntnis von $x(t)$ das Nachrichtensystem zu klassifizieren, ohne dieses im Detail zu kennen.

Beschreibt beispielsweise

- $x(t)$ die Stimme eines Anrufers aus Hamburg, und
- $y(t)$ die Aufzeichnung eines Anrufbeantworters in München,

dann besteht das „Nachrichtensystem“ aus folgenden Komponenten:

Mikrofon – Telefon – elektrische Leitung – Signalumsetzer – Glasfaserkabel – optischer Verstärker – Signalmrücksetzer – Empfangsfilter (Entzerrer, Rauschbegrenzung) – ... – elektromagnetischer Wandler.

Voraussetzungen für die Anwendung der Systemtheorie

Das auf der letzten Seite angegebene Modell eines Nachrichtensystems gilt allgemein und unabhängig von Randbedingungen. Die Anwendung der Systemtheorie erfordert jedoch zusätzlich einige einschränkende Voraussetzungen. Für das Folgende gilt stets, wenn nicht explizit etwas anderes angegeben ist:

- Sowohl $x(t)$ als auch $y(t)$ sind deterministische Signale. Andernfalls muss man gemäß dem Kapitel **Stochastische Systemtheorie** im Buch „Stochastische Signaltheorie“ vorgehen.
- Das System ist **linear**. Dies erkennt man zum Beispiel daran, dass eine harmonische Schwingung $x(t)$ am Eingang auch eine harmonische Schwingung $y(t)$ gleicher Frequenz am Ausgang zur Folge hat:

$$x(t) = A_x \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi_x) \Rightarrow y(t) = A_y \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi_y).$$

- Neue Frequenzen entstehen nicht. Lediglich Amplitude und Phase der harmonischen Schwingung können verändert werden. Nichtlineare Systeme werden im **Kapitel 2.2** dieses Buches behandelt.
- Aufgrund der Linearität ist auch das **Superpositionsprinzip** anwendbar. Dieses besagt, dass aus $x_1(t) \Rightarrow y_1(t)$ und $x_2(t) \Rightarrow y_2(t)$ auch zwingend die folgende Zuordnung gilt:

$$x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_1(t) + y_2(t).$$

- Das System ist **zeitinvariant**. Das bedeutet, dass ein um τ verschobenes Eingangssignal genau das gleiche Ausgangssignal zur Folge hat – aber ebenfalls um τ verzögert ist:

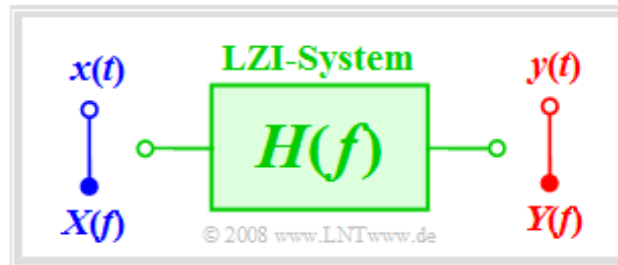
$$x(t - \tau) \Rightarrow y(t - \tau) \quad \text{falls} \quad x(t) \Rightarrow y(t).$$

Zeitvariante Systeme werden im Buch „Mobile Kommunikation“ behandelt.

Sind die beiden hier genannten Voraussetzungen erfüllt, so spricht man von einem **linearen zeitinvarianten System**, abgekürzt LZI-System. In der englischsprachigen Literatur ist hierfür die Abkürzung LTI (*Linear Time-Invariant*) gebräuchlich.

Übertragungsfunktion - Frequenzgang

Wir setzen ein LZI-System voraus, dessen Eingangs- und Ausgangsspektrum $X(f)$ bzw. $Y(f)$ bekannt sind oder aus den Zeitsignalen $x(t)$ und $y(t)$ durch Fouriertransformation berechnet werden können.

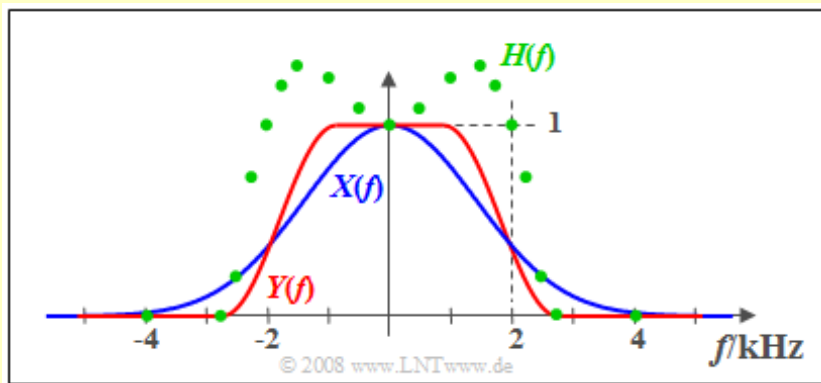


Definition: Das Übertragungsverhalten eines Nachrichtensystems wird im Frequenzbereich durch die **Übertragungsfunktion** beschrieben:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\text{Wirkungsfunktion}}{\text{Ursachenfunktion}}.$$

Weitere Bezeichnungen für $H(f)$ sind **Systemfunktion** und **Frequenzgang**. Im Folgenden werden wir vorwiegend den letzten Begriff verwenden.

Beispiel: Am Eingang eines LZI-Systems liegt das Signal $x(t)$ mit dem rein reellen Spektrum $X(f)$ an (blaue Kurve). Das gemessene Ausgangsspektrum $Y(f)$ – in der unteren Grafik rot markiert – ist bei Frequenzen kleiner als 2 kHz größer als $X(f)$ und besitzt im Bereich um 2 kHz eine steilere Flanke. Oberhalb von 2.8 kHz hat das Signal $y(t)$ keine Spektralanteile.



Die grünen Kreise markieren einige Messpunkte des ebenfalls reellen Frequenzgangs $H(f) = Y(f)/X(f)$. Bei niedrigen Frequenzen ist $H(f) > 1$, das heißt, in diesem Bereich wirkt das LZI-System verstärkend. Der Flankenabfall von $H(f)$ verläuft ähnlich wie der von $Y(f)$, ist aber nicht identisch mit diesem.

Eigenschaften des Frequenzgangs

Der Frequenzgang $H(f)$ ist eine zentrale Größe bei der Beschreibung nachrichtentechnischer Systeme. Nachfolgend werden wichtige Eigenschaften von $H(f)$ aufgezählt.

- Der Frequenzgang beschreibt allein das System. Er ist zum Beispiel aus den linearen Bauelementen eines **elektrischen Netzwerks** berechenbar. Bei anderem Eingangssignal $x(t)$, das natürlich auch ein anderes Ausgangssignal $y(t)$ zur Folge hat, ergibt sich der genau gleiche Frequenzgang $H(f)$.
- $H(f)$ kann im Allgemeinen eine **Einheit** besitzen. Betrachtet man beispielsweise bei einem Zweipol den Spannungsverlauf $u(t)$ als Ursache und den Strom $i(t)$ als Wirkung, so hat der Frequenzgang $H(f) = I(f)/U(f)$ die Einheit A/V. $I(f)$ und $U(f)$ sind die Fouriertransformierten von $i(t)$ bzw. $u(t)$.
- Im Folgenden betrachten wir (fast) ausschließlich **Vierpole**. Zudem setzen wir ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit meist voraus, dass $x(t)$ und $y(t)$ jeweils Spannungen seien. In diesem Fall ist somit $H(f)$ stets dimensionslos.
- Da die Spektren $X(f)$ und $Y(f)$ im Allgemeinen **komplex** sind, ist auch der Frequenzgang $H(f)$ eine komplexe Funktion. Man bezeichnet den Betrag $|H(f)|$ als **Amplitudengang**. Dieser wird auch oft in logarithmierter Form dargestellt und als **Dämpfungsverlauf** bezeichnet:

$$a(f) = -\ln |H(f)| = -20 \cdot \lg |H(f)|.$$

Je nachdem, ob der natürliche oder der dekadische Logarithmus verwendet wird, ist die Pseudoeinheit Neper (Np) bzw. Dezibel (dB) hinzuzufügen.

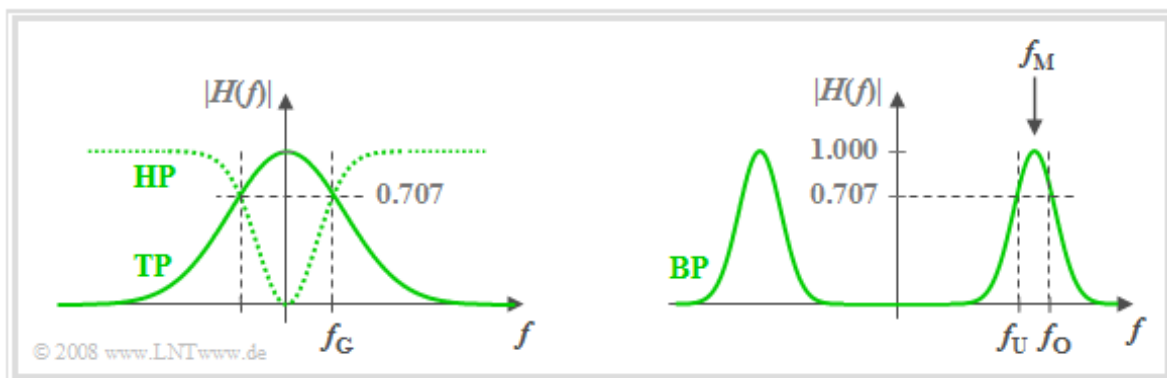
- Der **Phasengang** ist aus $H(f)$ in folgender Weise berechenbar:
- $$b(f) = -\arg H(f) \text{ in Radian (rad).}$$
- Damit kann der gesamte **Frequenzgang** auch wie folgt dargestellt werden:

$$H(f) = |H(f)| \cdot e^{-j \cdot b(f)} = e^{-a(f)} \cdot e^{-j \cdot b(f)}.$$

Tiefpass, Hochpass, Bandpass und Bandsperre

Nach dem Amplitudengang $|H(f)|$ unterscheidet man zwischen

- **Tiefpass:** Signalanteile werden mit zunehmender Frequenz immer stärker gedämpft.
- **Hochpass:** Hier werden hochfrequente Signalanteile weniger gedämpft als niederfrequente. Ein Gleichsignal ($f = 0$) kann über einen Hochpass nicht übertragen werden.
- **Bandpass:** Es gibt eine bevorzugte Frequenz, die so genannte Mittenfrequenz f_M . Je weiter die Frequenz eines Signalanteils von f_M entfernt ist, um so stärker wird dieser gedämpft.
- **Bandsperre:** Dies ist das Gegenstück zum Bandpass und es gilt $|H(f_M)| \approx 0$. Sehr niederfrequente und sehr hochfrequente Signalanteile werden dagegen gut durchgelassen.



Die Grafik zeigt die Amplitudengänge der Filtertypen TP, HP und BP. Ebenfalls eingezeichnet sind die Grenzfrequenzen f_G (bei Tiefpass und Hochpass) bzw. f_U und f_O (beim Bandpass). Diese sind hier stets 3dB-Grenzfrequenzen, beispielsweise entsprechend nachfolgender Definition:

Definition: Die **3dB-Grenzfrequenz** eines Tiefpasses ist diejenige Frequenz f_G , für die gilt:

$$|H(f = f_G)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |H(f = 0)| \quad \Rightarrow \quad |H(f = f_G)|^2 = \frac{1}{2} \cdot |H(f = 0)|^2.$$

Anzumerken ist, dass es auch andere Definitionen für Grenzfrequenzen gibt (vgl. **Kapitel 1.3**).

Testsignale zur Messung von $H(f)$

Zur messtechnischen Erfassung des Frequenzgangs eignet sich jedes beliebige Eingangssignal $x(t)$ mit Spektrum $X(f)$, solange $X(f)$ keine Nullstellen aufweist. Der Frequenzgang $H(f)$ lässt sich so durch Messung des Ausgangsspektrums $Y(f)$ ermitteln:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}.$$

Insbesondere eignen sich folgende Eingangssignale:

- **Diracimpuls** $x(t) = K \cdot \delta(t) \Rightarrow$ Spektrum $X(f) = K$:
Somit ist der Frequenzgang nach Betrag und Phase formgleich mit dem Ausgangsspektrum $Y(f)$ und es gilt $H(f) = 1/K \cdot Y(f)$. Approximiert man den Diracimpuls durch ein schmales Rechteck gleicher Fläche K , so muss $H(f)$ mit Hilfe einer $\sin(x)/x$ -Funktion korrigiert werden.
- **Diracpuls** – unendliche Summe gleichgewichteter Diracimpulse im zeitlichen Abstand T_A :
Dieser führt nach den Aussagen von **Kapitel 5.1** im Buch „Signaldarstellung“ zu einem Diracpuls im Frequenzbereich mit Frequenzabstand $1/T_A$. Damit ist auch eine frequenzdiskrete Messung von $H(f)$ möglich. Die spektralen Abtastwerte ergeben sich ebenfalls im Abstand $f_A = 1/T_A$.
- **Harmonische Schwingung** $x(t) = A_x \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi_x) \Rightarrow$ diracförmiges Spektrum:
Das Ausgangssignal $y(t) = A_y \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi_y)$ ist dann ebenfalls eine harmonische Schwingung mit gleicher Frequenz. Der Frequenzgang bei positiver Frequenz f_0 lautet:

$$H(f_0) = \frac{Y(f_0)}{X(f_0)} = \frac{A_y}{A_x} \cdot e^{j \cdot (\varphi_x - \varphi_y)}.$$

Um den gesamten frequenzkontinuierlichen Frequenzgang $H(f)$ zu ermitteln, sind jedoch (unendlich) viele Messungen mit unterschiedlichen Frequenzen f_0 erforderlich.

Impulsantwort

Im **Kapitel 3** von Buch „Signaldarstellung“ wurde dargelegt, dass für jedes deterministische Signal $x(t)$ mit Hilfe der Fouriertransformation eine Spektralfunktion $X(f)$ angegeben werden kann. Oft bezeichnet man $X(f)$ auch kurz als das Spektrum.

Alle Informationen über die Spektralfunktion sind in der Zeitbereichsdarstellung ebenfalls erhalten, wenn auch nicht immer sofort erkennbar. Der gleiche Sachverhalt trifft für lineare zeitinvariante Systeme zu.

Definition: Die wichtigste Beschreibungsgröße eines linearen zeitinvarianten Systems im Zeitbereich ist die **Impulsantwort** $h(t)$. Diese ist die Fourierrücktransformierte von $H(f)$:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot e^{j2\pi ft} df.$$

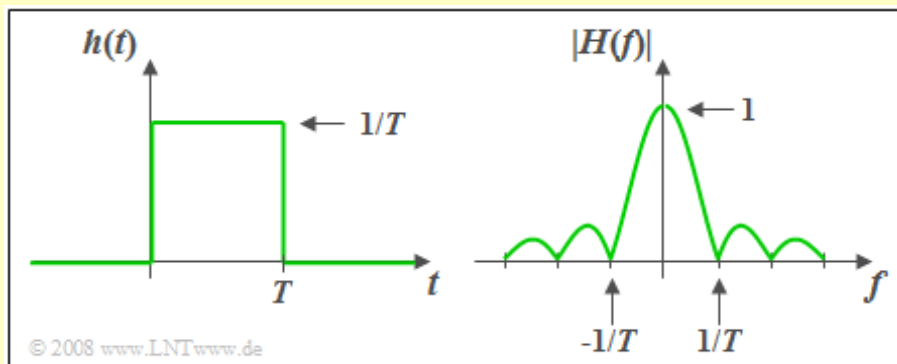
Hierzu ist Folgendes anzumerken:

- Der Frequenzgang $H(f)$ und die Impulsantwort $h(t)$ sind äquivalente Beschreibungsgrößen, die genau die gleichen Informationen über das LZI-System beinhalten.
- Verwendet man das diracförmige Eingangssignal $x(t) = \delta(t)$, so ist $X(f) = 1$, und es gilt $Y(f) = H(f)$ bzw. $y(t) = h(t)$. Die Bezeichnung Impulsantwort spiegelt diese Aussage wieder.
- Obige Definition lässt erkennen, dass jede Impulsantwort die Einheit $\text{Hz} = 1/\text{s}$ besitzt.

Beispiel: Die Impulsantwort $h(t)$ des so genannten Spalt-Tiefpasses ist über eine Zeitdauer T hinweg konstant und außerhalb dieses Intervalls gleich 0. Der dazugehörige Amplitudengang als der Betrag des Frequenzgangs ist $|H(f)| = |\text{sinc}(\pi f T)|$. Der Phasenverlauf ergibt sich damit zu

$$b(f) = \begin{cases} \pi/T & \text{für } |f| > 0, \\ -\pi/T & \text{für } |f| < 0. \end{cases}$$

Wäre $h(t)$ symmetrisch um $t = 0$ und damit akausal, so würde $b(f) = 0$ gelten.



Die Fläche über die Impulsantwort ist gleich $H(f = 0) = 1$. Daraus folgt, dass die Impulsantwort im Bereich von 0 bis T gleich $1/T$ sein muss.

Einige Gesetze der Fourier–Transformation

Im Buch „Signaldarstellung“, **Kapitel 3.3** wurden die Gesetze der Fouriertransformation ausführlich dargelegt. Hier folgt eine kurze Zusammenfassung, wobei $H(f)$ den Frequenzgang eines LZI–Systems beschreibt. Dessen Fourierrücktransformierte $h(t)$ ist die Impulsantwort.

Bei allen folgenden Gleichungen wird das Kurzsymbol der Fouriertransformation benutzt. Der ausgefüllte Kreis kennzeichnet stets den Spektralbereich und der weiße Kreis den Zeitbereich.

- **Multiplikation** mit einem konstanten Faktor:

$$k \cdot H(f) \bullet \text{---} \circ k \cdot h(t).$$

Bei $k < 1$ spricht man von einer Dämpfung, während $k > 1$ für eine Verstärkung steht.

- **Ähnlichkeitssatz:**

$$H(f/k) \bullet \text{---} \circ |k| \cdot h(k \cdot t).$$

Dies besagt: Eine Stauchung ($k < 1$) des Frequenzgangs führt zu einer breiteren und niedrigeren Impulsantwort. Durch Streckung ($k > 1$) von $H(f)$ wird $h(t)$ schmaler und höher.

- **Verschiebungssatz** im Frequenz- und Zeitbereich:

$$H(f - f_0) \bullet \text{---} \circ h(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t},$$

$$H(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0} \bullet \text{---} \circ h(t - t_0).$$

Eine Verschiebung um t_0 (Laufzeit) führt im Frequenzbereich zur Multiplikation mit einer komplexen Exponentialfunktion. Der Amplitudengang $|H(f)|$ wird dadurch nicht verändert.

- **Differentiationsatz** im Frequenz- und Zeitbereich:

$$\frac{1}{j2\pi} \cdot \frac{dH(f)}{df} \bullet \text{---} \circ -t \cdot h(t),$$

$$j \cdot 2\pi f \cdot H(f) \bullet \text{---} \circ \frac{dh(t)}{dt}.$$

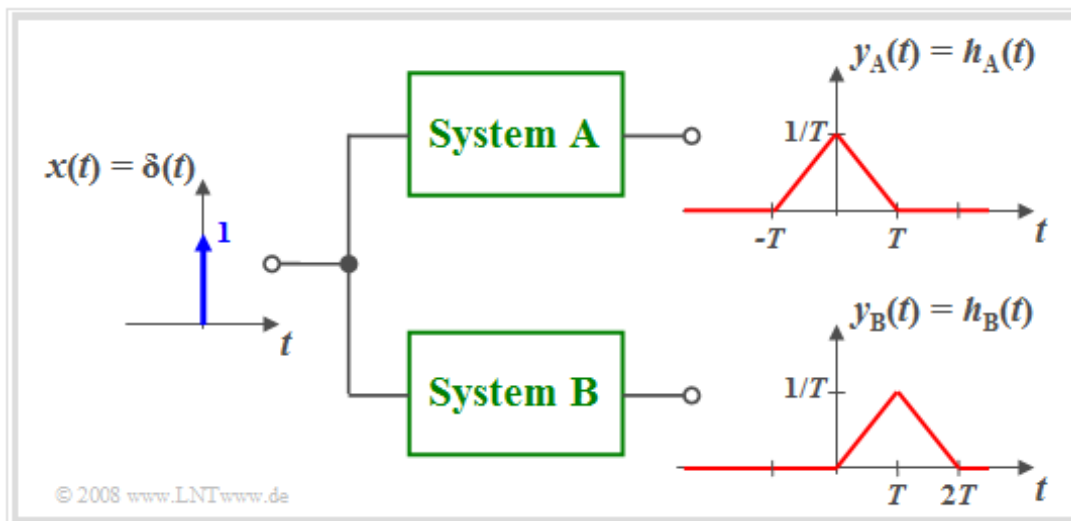
Ein differenzierendes Element im LZI–System (bezüglich t) führt im Frequenzbereich zu einer Multiplikation mit $j2\pi f$ und damit unter Anderem zu einer Phasendrehung um 90° .

Die Gesetzmäßigkeiten werden in den Aufgaben zu Kapitel 1.2 und 1.3 häufiger angewendet. Im folgenden Lernvideo werden die Gesetze der Fouriertransformation an Beispielen verdeutlicht:

Gesetzmäßigkeiten der Fouriertransformation (Kapitel 1.2, 2-teilig: Dauer 5:57 – 2.89 MB)

Kausale Systeme

Die Grafik verdeutlicht den Unterschied zwischen einem akausalen und einem kausalen System.



Definition: Ein LZI-System bezeichnet man dann als **kausal**, wenn die Impulsantwort $h(t)$ – also die Fourierreücktransformierte des Frequenzgangs $H(f)$ – folgende Bedingung erfüllt:

$$h(t) = 0 \text{ für } t < 0.$$

Das obige Bild lässt erkennen, dass nach dieser Definition das System B kausal ist im Gegensatz zum System A. Weiter ist anzumerken:

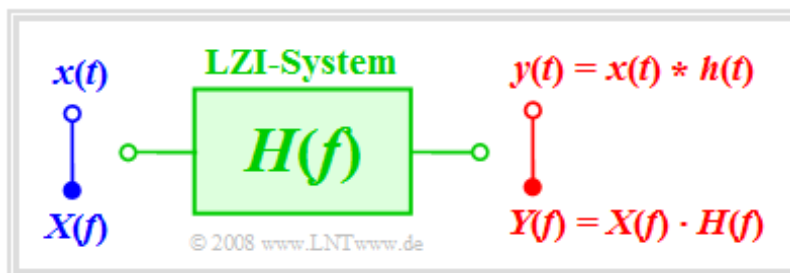
- Jedes realisierbare System ist kausal. Beim akausalen System A beginnt die Wirkung früher (bei $t = -T$) als die Ursache (Diracfunktion bei $t = 0$), was in der Praxis nicht möglich ist.
- Fast alle akausalen Systeme können unter Verwendung einer Laufzeit τ in ein realisierbares kausales System übergeführt werden. Zum Beispiel gilt mit $\tau = T$:

$$h_B(t) = h_A(t - T).$$

- Für kausale Systeme gelten alle in diesem Kapitel getroffenen Aussagen ebenso wie für akausale Systeme. Zur Beschreibung kausaler Systeme lassen sich jedoch einige spezifische Eigenschaften nutzen, wie im **Kapitel 3** dieses Buches ausgeführt wird.
- In diesem und dem nächsten Kapitel betrachten wir vorwiegend akausale Systeme, da deren mathematische Beschreibung anschaulicher ist. So ist der Frequenzgang $H_A(f)$ reell, während für $H_B(f)$ der zusätzliche Term $\exp(-j2\pi fT)$ zu berücksichtigen ist.

Berechnung des Ausgangssignals

Wir betrachten die folgende Aufgabenstellung: Bekannt sei das Eingangssignal $x(t)$ und der Frequenzgang $H(f)$. Gesucht ist das Ausgangssignal $y(t)$.



Bei Lösung im Frequenzbereich muss zunächst aus dem gegebenen Eingangssignal $x(t)$ durch **Fouriertransformation** das Spektrum $X(f)$ ermittelt und mit dem Frequenzgang $H(f)$ multipliziert werden. Durch **Fourierrücktransformation** des Produktes kommt man zum Ausgangssignal $y(t)$:

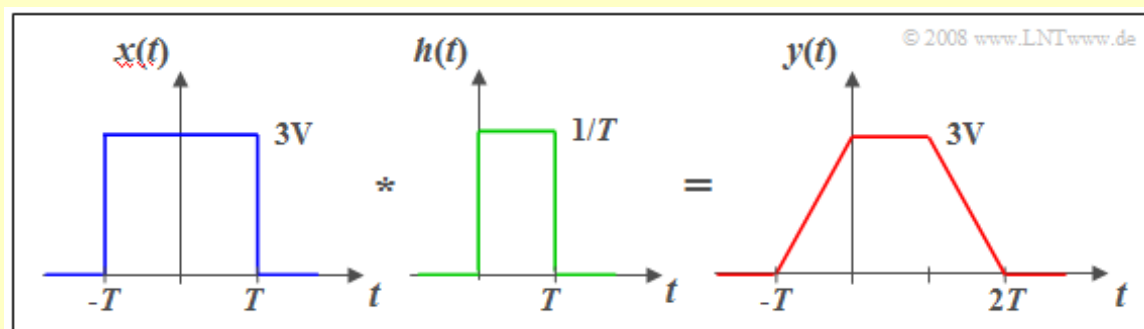
1. Schritt : $X(f) \bullet \text{---} \circ x(t)$ Eingangsspektrum,
2. Schritt : $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$ Ausgangsspektrum,
3. Schritt : $y(t) \circ \text{---} \bullet Y(f)$ Ausgangssignal.

Zum gleichen Ergebnis kommt man nach der Berechnung im Zeitbereich, indem man zunächst aus dem Frequenzgang $H(f)$ mittels Fourierreücktransformation die Impulsantwort $h(t)$ berechnet und anschließend die Faltungsoperation anwendet:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau.$$

Die Ergebnisse sind bei beiden Vorgehensweisen identisch. Zweckmäßigerweise sollte man dasjenige Verfahren auswählen, das mit weniger Rechenaufwand zum Ziel führt.

Beispiel: Am Eingang eines Spalt-Tiefpasses (siehe **Beispiel** auf der ersten Kapitelseite) mit rechteckförmiger Impulsantwort der Breite T liegt ein Rechteckimpuls $x(t)$ der Dauer $2T$ an.



In diesem Fall ist die direkte Berechnung im Zeitbereich günstiger: Die Faltung zweier unterschiedlich breiter Rechtecke $x(t)$ und $h(t)$ führt zum trapezförmigen Ausgangsimpuls $y(t)$:

- Man erkennt die Tiefpasseigenschaft des Filters $H(f)$ an der endlichen Flankensteilheit von $y(t)$.
- Die Impulshöhe 3 V bleibt in diesem Beispiel erhalten, weil $H(f=0) = 1/T \cdot T = 1$ ist.

Sprungantwort (1)

Eine in der Praxis oft verwendete Eingangsfunktion $x(t)$ zur messtechnischen Erfassung von $H(f)$ ist die Sprungfunktion $\gamma(t)$ entsprechend folgender Gleichung:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| < 0, \\ 0.5 & \text{für } |t| = 0, \\ 1 & \text{für } |t| > 0. \end{cases}$$

Definition: Die **Sprungantwort** $\sigma(t)$ ist die Antwort des Systems, wenn man an den Eingang die Sprungfunktion $\gamma(t)$ anlegt:

$$x(t) = \gamma(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sigma(t).$$

Die Berechnung der Sprungantwort im Frequenzbereich ist etwas umständlich. Man muss in diesem Fall folgende Gleichung anwenden:

$$\sigma(t) \circ \bullet X(f) \cdot H(f) = \left(\frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j \cdot 2\pi f} \right) \cdot H(f).$$

Die Berechnung im Zeitbereich führt dagegen direkt zum Ergebnis:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) \, d\tau.$$

Bei kausalen Systemen gilt $h(\tau) = 0$ für $\tau < 0$, so dass dann die untere Integrationsgrenze in obiger Gleichung zu 0 gesetzt werden kann.

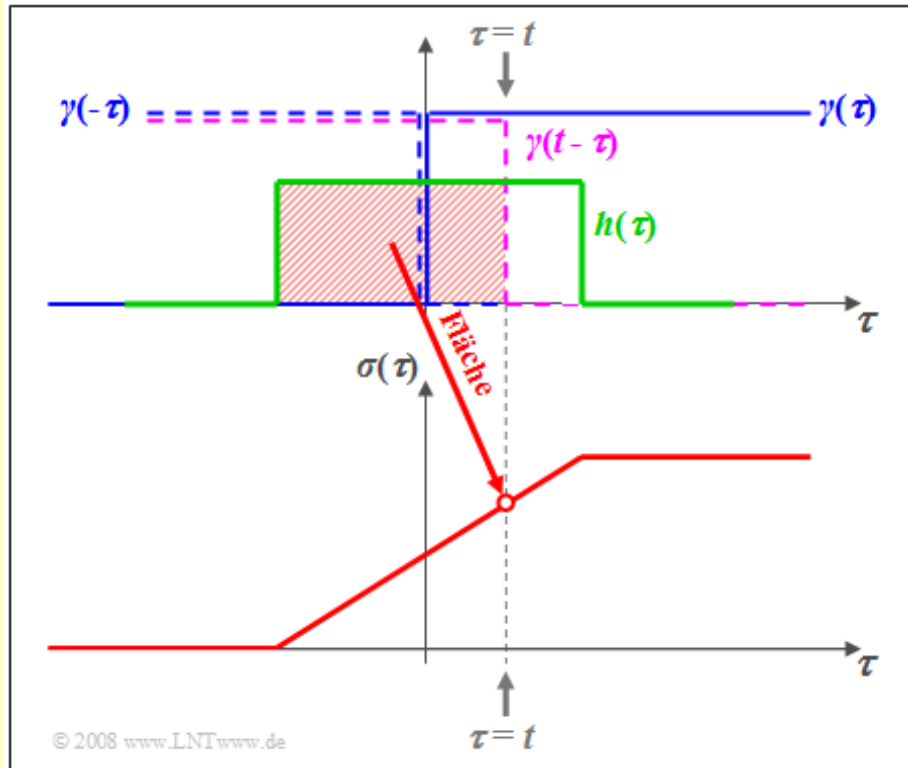
Das genannte Ergebnis ist auch aus folgendem Grunde einsichtig: Die Sprungfunktion $\gamma(t)$ hängt mit der Diracfunktion $\delta(t)$ wie folgt zusammen:

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) \, d\tau.$$

Da wir Linearität vorausgesetzt haben und die Integration eine lineare Operation ist, gilt auch für das Ausgangssignal $\sigma(t)$ der gleiche Zusammenhang entsprechend der vorletzten Gleichung.

Sprungantwort (2)

Beispiel: Die Grafik verdeutlicht den Sachverhalt für eine rechteckförmige Impulsantwort $h(\tau)$. Die Abszisse wurde hier in τ umbenannt. Blau eingezeichnet ist die Sprungfunktion $\gamma(\tau)$.



Durch Spiegelung und Verschiebung erhält man die rot gestrichelt eingezeichnete Funktion $\gamma(t - \tau)$. Die rot hinterlegte Fläche gibt somit die Sprungantwort $\sigma(\tau)$ zum Zeitpunkt $\tau = t$ an.

Allgemeine Bemerkungen

Alle nachfolgend beschriebenen Tiefpassfunktionen weisen die folgenden Eigenschaften auf:

- Der Frequenzgang $H(f)$ ist stets **reell** und **gerade**, so dass nach dem **Zuordnungssatz** auch die zugehörige Impulsantwort $h(t)$ stets reell und gerade ist.
- Damit ist offensichtlich, dass die hier betrachteten Systeme **akausal** sind und somit nicht realisierbar. Die Beschreibung kausaler Systeme erfolgt im **Kapitel 3** dieses Buches.
- Der Vorteil dieser **systemtheoretischen Filterfunktionen** ist die einfache Beschreibung mit maximal zwei Parametern. Der Filtereinfluss kann so durchschaubar dargestellt werden.
- Der wichtigste Funktionsparameter ist die **äquivalente Bandbreite** entsprechend der Definition über das flächengleiche Rechteck:

$$\Delta f = \frac{1}{H(f=0)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \, df.$$

- Nach dem so genannten **Reziprozitätsgesetz** liegt somit auch die **äquivalente Zeitdauer** der Impulsantwort fest, die ebenfalls über das flächengleiche Rechteck definiert ist:

$$\Delta t = \frac{1}{h(t=0)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \, dt = \frac{1}{\Delta f}.$$

- Der **Gleichsignalübertragungsfaktor** wird – wenn nicht explizit etwas Anderes vermerkt ist – stets zu $H(f=0) = 1$ angenommen.
- Aus jeder Tiefpassfunktion lassen sich entsprechende **Hochpassfunktionen** ableiten, wie auf der **letzten Theorieseite** dieses Abschnitts gezeigt wird.

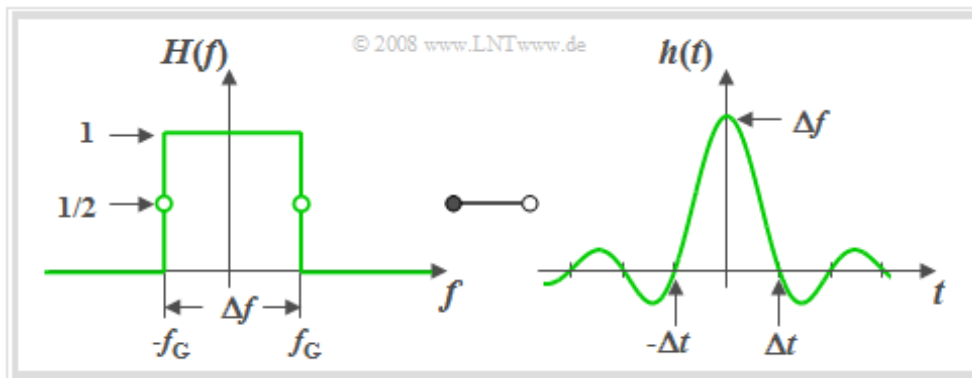
Idealer Tiefpass – Küpfmüller-Tiefpass (1)

Definition: Man bezeichnet einen Tiefpass als **ideal**, wenn sein Frequenzgang wie folgt lautet:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| < \Delta f/2, \\ 0.5 & \text{für } |f| = \Delta f/2, \\ 0 & \text{für } |f| > \Delta f/2. \end{cases}$$

Wir verwenden teilweise auch die Bezeichnung „Küpfmüller-Tiefpass“ (KTP) in Erinnerung an den Pionier der Systemtheorie, **Karl Küpfmüller**.

Die Grafik zeigt einen solchen idealen Tiefpass im Frequenz- und Zeitbereich.



Man erkennt aus diesem Kurvenverläufen:

- Aufgrund des abrupten, unendlich steilen Flankenabfalls ist hier die 3dB-Grenzfrequenz f_G genau halb so groß as die systemtheoretische Bandbreite Δf .
- Alle Spektralanteile mit $f < f_G$ werden unverfälscht durchgelassen (Durchlassbereich), alle Anteile mit $f > f_G$ vollständig unterdrückt (Sperrbereich). Bei $f = f_G$ gilt $H(f) = 0.5$.

Hinweis: Die Beschreibung im Zeitbereich folgt auf der nächsten Seite.

Idealer Tiefpass – Küpfmüller–Tiefpass (2)

Kommen wir nun zur Beschreibung des idealen Tiefpasses im Zeitbereich:

- Die **Impulsantwort** ergibt sich entsprechend der Fourier rücktransformation zu

$$h(t) = \Delta f \cdot \text{si}(\pi \cdot \Delta f \cdot t) \quad \text{mit} \quad \text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

- Die beidseitig bis ins Unendliche ausgedehnte Impulsantwort $h(t)$ weist ** quidistante Nulldurchgänge** im Abstand $\Delta t = 1/\Delta f$ auf (siehe rechte untere Grafik).
- Der **asymptotische Abfall** erfolgt umgekehrt proportional mit der Zeit:

$$|h(t)| = \frac{\Delta f}{\pi \cdot \Delta f \cdot |t|} \cdot |\sin(\pi \cdot \Delta f \cdot t)| \leq \frac{1}{\pi \cdot |t|}.$$

- Daraus folgt, dass die Impulsantwort erst für Zeiten $t > t_{1\%} = 318 \cdot \Delta t$ mit Sicherheit kleiner als 1% des Impulsmaximums ist.
- Die **Sprungantwort** ergibt sich aus der Impulsantwort durch Integration und lautet:

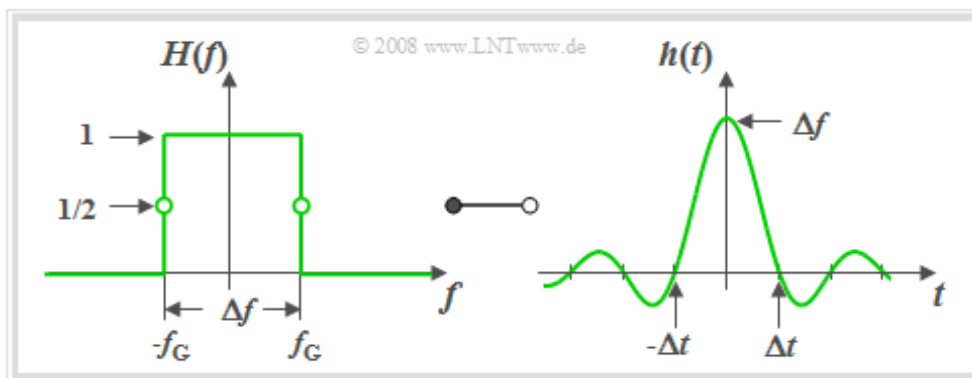
$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \text{Si}(\pi \cdot \Delta f \cdot t).$$

- Hierbei ist die so genannte **Integral–Sinusfunktion**

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \text{si}(\xi) d\xi = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots$$

verwendet, die folgende Eigenschaften besitzt:

$$\text{Si}(0) = 0, \quad \text{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{Si}(-x) = -\text{Si}(x).$$



Hinweis: Manche Bücher verwenden statt der Funktion $\text{si}(x)$ die ähnliche Funktion $\text{sinc}(x)$:

$$\text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \text{si}(\pi x).$$

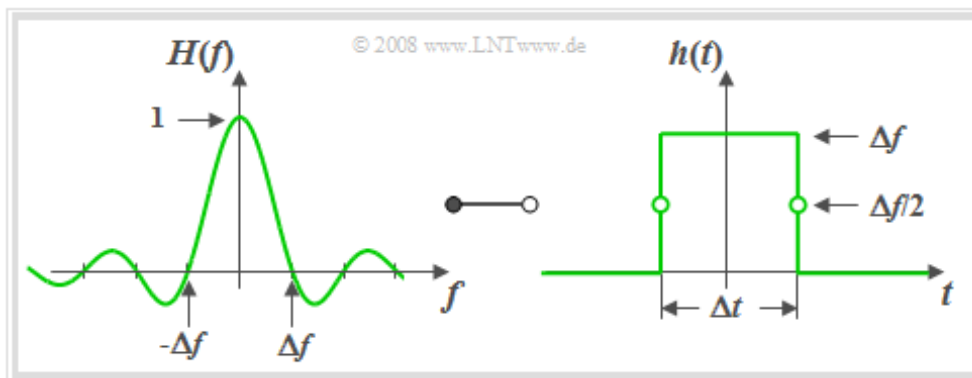
In diesem Fall lautet die Impulsantwort des idealen Tiefpasses $h(t) = \Delta f \cdot \text{sinc}(\Delta f \cdot t)$.

Spalttiefpass

Definition: Man bezeichnet ein LZI-System als **Spalttiefpass**, wenn der Frequenzgang die folgende Form hat:

$$H(f) = \text{si}\left(\pi \frac{f}{\Delta f}\right) \quad \text{mit} \quad \text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Aus der linken Grafik erkennt man, dass der Frequenzgang $H_{\text{STP}}(f)$ des Spalttiefpasses formgleich mit der Impulsantwort $h_{\text{KTP}}(t)$ des K upfm ullertiefpasses ist.



Nach dem **Vertauschungssatz** hat deshalb auch die Impulsantwort $h_{\text{STP}}(t)$ des Spalttiefpasses die gleiche Form wie der Frequenzgang $H_{\text{KTP}}(f)$ des idealen Tiefpasses. Mit $\Delta t = 1/\Delta f$ gilt somit:

$$h(t) = \begin{cases} \Delta f & \text{f\"ur } |t| < \Delta t/2, \\ \Delta f/2 & \text{f\"ur } |t| = \Delta t/2, \\ 0 & \text{f\"ur } |t| > \Delta t/2. \end{cases}$$

Anhand obiger Grafik sind folgende Aussagen ableitbar:

- Auch der Spalttiefpass ist in dieser Form akausal. Durch eine zus atztliche Laufzeit von $\Delta t/2$ wird das System jedoch kausal und damit realisierbar.
- Der Spalttiefpass wirkt als Integrator über die Zeitdauer Δt :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} x(\tau) d\tau.$$

- Ist $x(t)$ eine harmonische Schwingung mit der Frequenz $f_0 = k \cdot \Delta f$ (k ganzzahlig), so wird genau über k Perioden integriert und es gilt $y(t) = 0$. Dies erklärt die Nullstellen von $H(f)$.

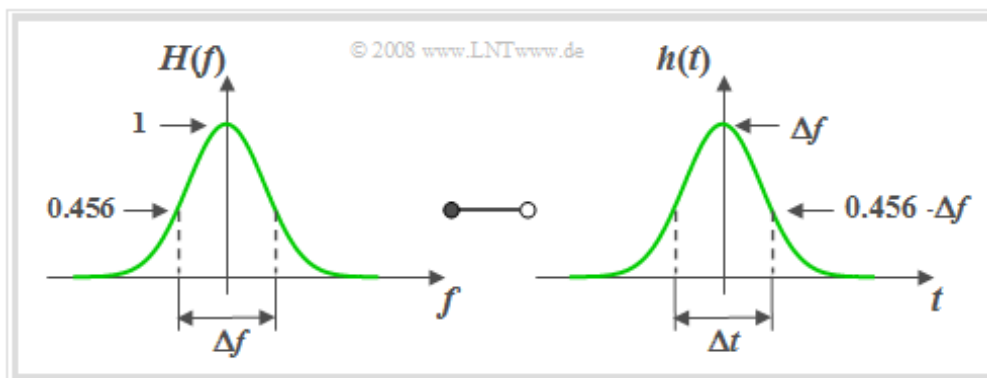
Gauß-Tiefpass

Ein häufig für systemtheoretische Untersuchungen verwendetes Filter ist der Gaußtiefpass, der ebenfalls durch nur einen Parameter, nämlich die äquivalente Bandbreite Δf , beschreibbar ist.

Definition: Für den Frequenzgang und die Impulsantwort des **Gaußtiefpasses** gelten:

$$H(f) = e^{-\pi(f/\Delta f)^2} \quad \bullet \longleftrightarrow \quad h(t) = \Delta f \cdot e^{-\pi(\Delta f \cdot t)^2}.$$

Der Name geht auf den Mathematiker, Physiker und Astronomen **Carl-Friedrich Gauß** zurück. Gauß hat sich zwar nicht selber mit dieser Thematik auseinandergesetzt, aber die mathematische Form von Frequenzgang und Impulsantwort weisen eine Ähnlichkeit mit der so genannten **Gaußformel** auf, die er für die Wahrscheinlichkeitsrechnung gefunden hat.



Anhand obiger Grafik können folgende Aussagen getroffen werden:

- Die ebenfalls über das flächengleiche Rechteck definierte **äquivalente Impulsdauer** Δt ist gleich dem Kehrwert der äquivalenten Bandbreite Δf .
- Eine schmalbandige Filterfunktion (kleines Δf) führt zu einer breiten (großes Δt) und gleichzeitig niedrigen Impulsantwort $h(t)$. Das Reziprozitätsgesetz von Zeitdauer und Bandbreite lässt sich am Beispiel des Gaußtiefpasses besonders anschaulich zeigen.
- Die Frequenz- und Zeitbereichsdarstellungen sind prinzipiell von gleicher Form. Man sagt auch, dass die Gaußfunktion invariant gegenüber der Fouriertransformation ist.
- Aufgrund der „unendlichen Breite“ seiner Impulsantwort ist der Gaußtiefpass ebenso wie der ideale Tiefpass stark akausal und (exakt) nur mit unendlich großer Laufzeit realisierbar.
- Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass $h(t)$ bereits bei $t = 1.5 \cdot \Delta t$ auf 0.1% seines Maximalwertes abgeklungen ist. Für $t = 3 \cdot \Delta t$ ergibt sich sogar $h(t) \approx 5 \cdot 10^{-13} \cdot h(0)$.
- Die Zahlenwerte belegen, dass man den Gaußtiefpass auch für praxisnahe Simulationen heranziehen kann, solange Laufzeiten keine systembegrenzende Rolle spielen.
- Die Sprungantwort $\sigma(t)$ lautet mit der so genannten **Gaußschen Fehlerfunktion** $\phi(x)$, die in Formelsammlungen meist tabellarisch angegeben wird:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \phi\left(\sqrt{2\pi} \cdot t/\Delta t\right) \quad \text{mit} \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Trapeztiefpass (1)

Die bisher in diesem Kapitel beschriebenen Tiefpassfunktionen hängen nur von einem Parameter – der äquivalenten Bandbreite Δf – ab. Dabei war die Flankensteilheit für einen gegebenen Filtertyp fest vorgegeben. Nun wird ein Tiefpass beschrieben, bei dem auch die Flankensteilheit parametrisierbar ist.

Definition: Der Frequenzgang des **Trapeztiefpasses** lautet mit den Eckfrequenzen $f_1, f_2 \geq f_1$:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| < f_1, \\ \frac{f_2 - |f|}{f_2 - f_1} & \text{für } f_1 \leq |f| \leq f_2, \\ 0 & \text{für } |f| > f_2. \end{cases}$$

Anstelle von f_1 und f_2 kann man zur Beschreibung von $H(f)$ auch folgende Parameter verwenden:

- die **äquivalente Bandbreite**, ermittelt über das flächengleiche Rechteck:

$$\Delta f = f_2 - f_1.$$

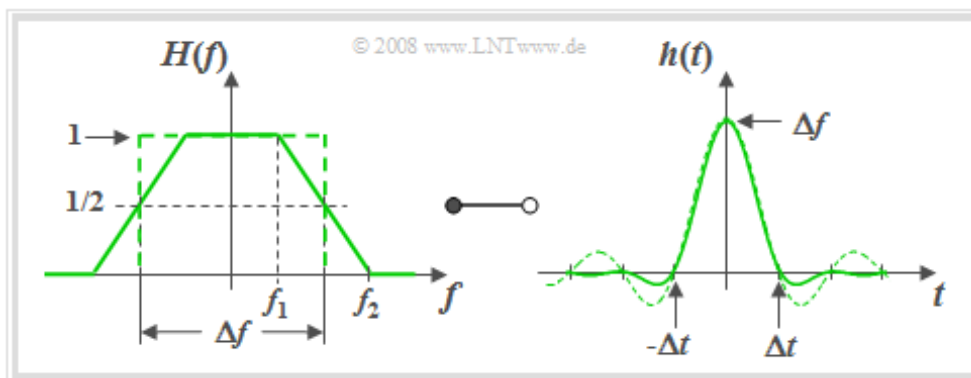
- der **Rolloff-Faktor** (im Frequenzbereich) als Maß für die Flankensteilheit:

$$r_f = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}.$$

Als Sonderfälle sind in der allgemeinen Darstellung der ideale rechteckförmige Tiefpass ($r_f = 0$) und der Dreiecktiefpass ($r_f = 1$) enthalten. Die folgende Grafik zeigt $H(f)$ sowie die Impulsantwort

$$h(t) = \Delta f \cdot \text{si}(\pi \cdot \Delta f \cdot t) \cdot \text{si}(\pi \cdot r_f \cdot \Delta f \cdot t) \quad \text{mit} \quad \text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

für den Rolloff-Faktor $r_f = 0.5 \Rightarrow f_2 = 3f_1$. Der si-Verlauf des rechteckförmigen Tiefpasses mit gleicher äquivalenter Bandbreite ist zum Vergleich gestrichelt eingezeichnet.



Hinweis: Die Interpretation dieser Grafik folgt auf der nächsten Seite.

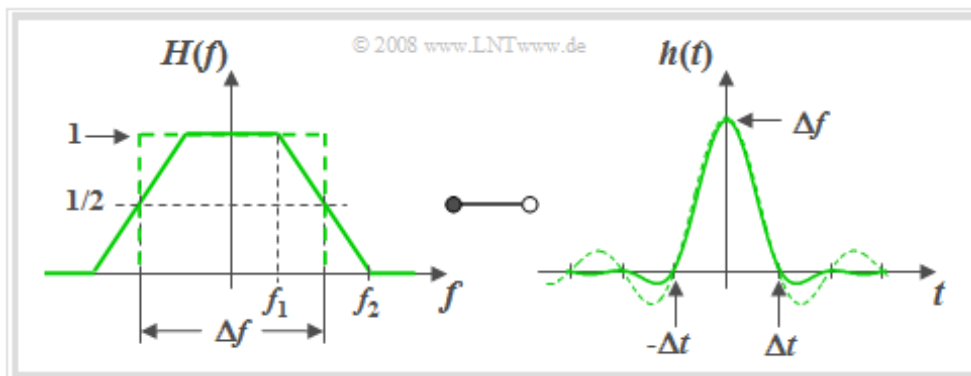
Trapeztiefpass (2)

Die Grafik am Seitenende und die Gleichungen der letzten Seite erlauben folgende Aussagen:

- Die Trapezform entsteht z. B. durch die Faltung zweier Rechtecke der Breiten Δf und $r_f \Delta f$.
- Entsprechend dem Faltungssatz ist die Impulsantwort das Produkt zweier si-Funktionen mit den Argumenten $\pi \cdot \Delta f \cdot t$ und $\pi \cdot r_f \cdot \Delta f \cdot t$.
- Die erste si-Funktion ist für alle Werte von r_f Bestandteil der Gleichung für $h(t)$ und führt stets zu äquivalenten Nulldurchgängen im Abstand $1/\Delta f$.
- Für $0 < r_f < 1$ gibt es weitere Nullstellen bei Vielfachen von $\Delta t/r_f$.
- Der asymptotische Abfall der Impulsantwort $h(t)$ erfolgt um so schneller, je größer r_f ist, d. h. bei gegebenem Δf mit flacherer Flanke.
- Der schnellstmögliche Abfall ergibt sich beim Dreieckstiefpass $\Rightarrow r_f = 1, f_1 = 0, f_2 = \Delta f$. Für diesen gilt im Frequenz- und Zeitbereich:

$$H(f) = \begin{cases} \frac{\Delta f - |f|}{\Delta f} & \text{für } |f| \leq \Delta f, \\ 0 & \text{für } |f| \geq \Delta f, \end{cases}$$

$$h(t) = \Delta f \cdot \text{si}^2(\pi \cdot \Delta f \cdot t) \quad \text{mit} \quad \text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$



Cosinus-Rolloff-Tiefpass (1)

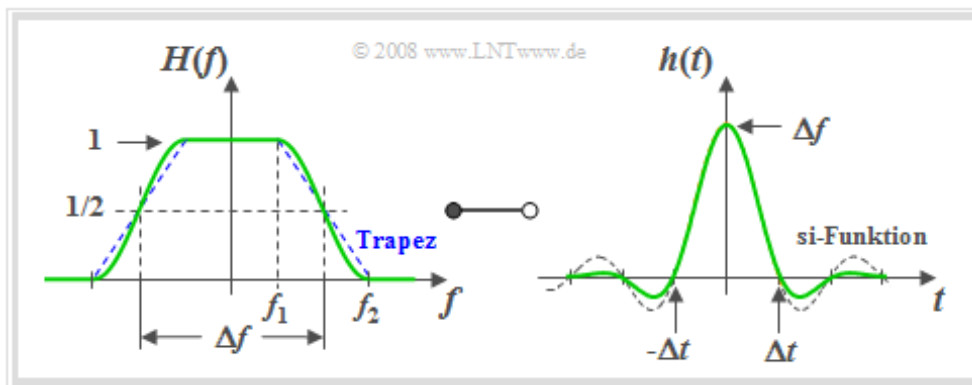
Ebenso wie der **Trapeztiefpass** wird dieser Tiefpass durch zwei Parameter beschrieben, nämlich durch die äquivalente Bandbreite Δf und den Rolloff-Faktor r_f . Dessen Wertebereich liegt zwischen $r_f = 0$ (Rechtektiefpass) und $r_f = 1$ (Cosinus-Quadrat-Tiefpass).

Definiton: Der Frequenzgang des **Cosinus-Rolloff-Tiefpasses** lautet mit den Eckfrequenzen $f_1 = \Delta f \cdot (1 - r_f)$ und $f_2 = \Delta f \cdot (1 + r_f)$:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| < f_1, \\ \cos\left(\frac{|f| - f_1}{f_2 - f_1} \pi\right) & \text{für } f_1 \leq |f| \leq f_2, \\ 0 & \text{für } |f| > f_2. \end{cases}$$

Die nachfolgende Grafik zeigt $H(f)$ sowie die Impulsantwort

$$h(t) = \Delta f \cdot \text{si}(\pi \cdot \Delta f \cdot t) \cdot \frac{\cos(\pi \cdot r_f \cdot \Delta f \cdot t)}{1 - (2 \cdot r_f \cdot \Delta f \cdot t)^2}$$



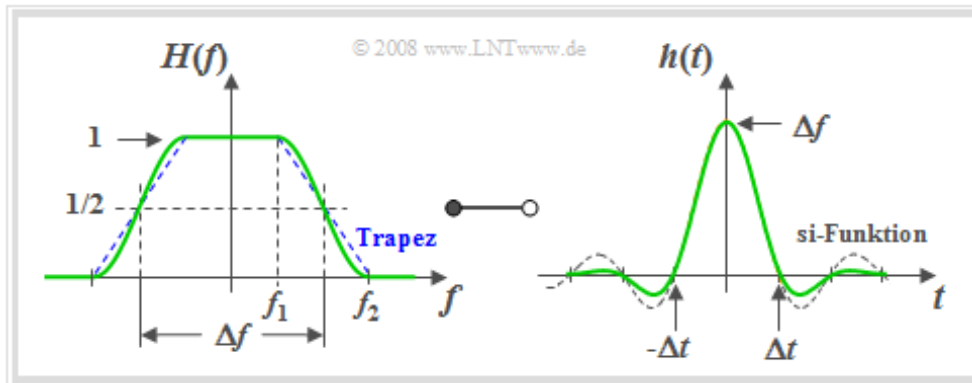
Für diese Grafiken wurde der Rolloff-Faktor $r_f = 0.5$ verwendet, das heißt, es gilt $f_2 = 3 \cdot f_1$. Gestrichelt sind zum Vergleich

- im Frequenzbereich der Trapeziefpass und
- im Zeitbereich die si-Funktion

eingezeichnet. Zu beachten ist, dass die si-Funktion nicht die Fourierrücktransformierte des links blau eingezeichneten Trapeziefpasses ist. Sie beschreibt vielmehr den idealen, rechteckförmigen Tiefpass im Zeitbereich.

Hinweis: Die Interpretation dieser Grafik folgt auf der nächsten Seite.

Cosinus-Rolloff-Tiefpass (2)



Anhand dieser Grafik und den obigen Gleichungen sind folgende Aussagen möglich:

- Die Impulsantwort $h(t)$ hat bei allen Vielfachen von $\Delta t = 1/\Delta f$ Nullstellen, die auf die im rechten Bild gestrichelt eingezeichnete si-Funktion zurückzuführen sind.
- Der letzte Term in der $h(t)$ -Gleichung führt zu weiteren Nullstellen bei Vielfachen von $\Delta t/r_f$. Ist $1/r_f$ ganzzahlig wie in obiger Grafik ($1/r_f = 2$), so fallen diese mit den anderen Nullstellen zusammen.
- Je größer der Rolloff-Faktor r_f ist und je flacher damit der Flankenabfall erfolgt, desto günstiger ist im Allgemeinen das Einschwingverhalten des Cosinus-Rolloff-Tiefpasses.
- Der Cosinus-Rolloff-Tiefpass zeigt ein besseres asymptotisches Einschwingverhalten als der Trapez Tiefpass mit gleichem $r_f \neq 0$, obwohl dieser zumindest bei $\Delta f/2$ eine flachere Flanke aufweist.
- Dies zeigt, dass das Einschwingverhalten nicht nur durch Unstetigkeitsstellen (wie beim Rechteck), sondern auch durch Knickpunkte wie beim Trapez Tiefpass beeinträchtigt wird.
- Als Sonderfall ergibt sich mit $f_1 = 0, f_2 = \Delta f \Rightarrow r_f = 1$ der **Cosinus-Quadrat-Tiefpass**, dessen Impulsantwort auch wie folgt dargestellt werden kann:

$$h(t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \text{si}(\pi \cdot t / \Delta t) \cdot [\text{si}(\pi \cdot t / \Delta t + 0.5) - \text{si}(\pi \cdot t / \Delta t - 0.5)].$$

- Diese Funktion hat Nullstellen bei $t/\Delta t = \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \pm 2.5, \dots$, nicht jedoch bei $t/\Delta t = \pm 0.5$. Im Buch „Digitalsignalübertragung“ wird gezeigt, dass der Cosinus-Quadrat-Tiefpass als einziger Tiefpass die beiden so genannten **Nyquistkriterien** erfüllt.

Herleitung systemtheoretischer Hochpassfunktionen

In diesem Kapitel wurden fünf wichtige systemtheoretische Tiefpassfunktionen betrachtet. Für jede einzelne Tiefpassfunktion lässt sich auch eine äquivalente Hochpassfunktion angeben.

Definition: Ist $H_{TP}(f)$ eine systemtheoretische Tiefpassfunktion mit $H_{TP}(f = 0) = 1$, so gilt für die äquivalente **Hochpassfunktion:**

$$H_{HP}(f) = 1 - H_{TP}(f).$$

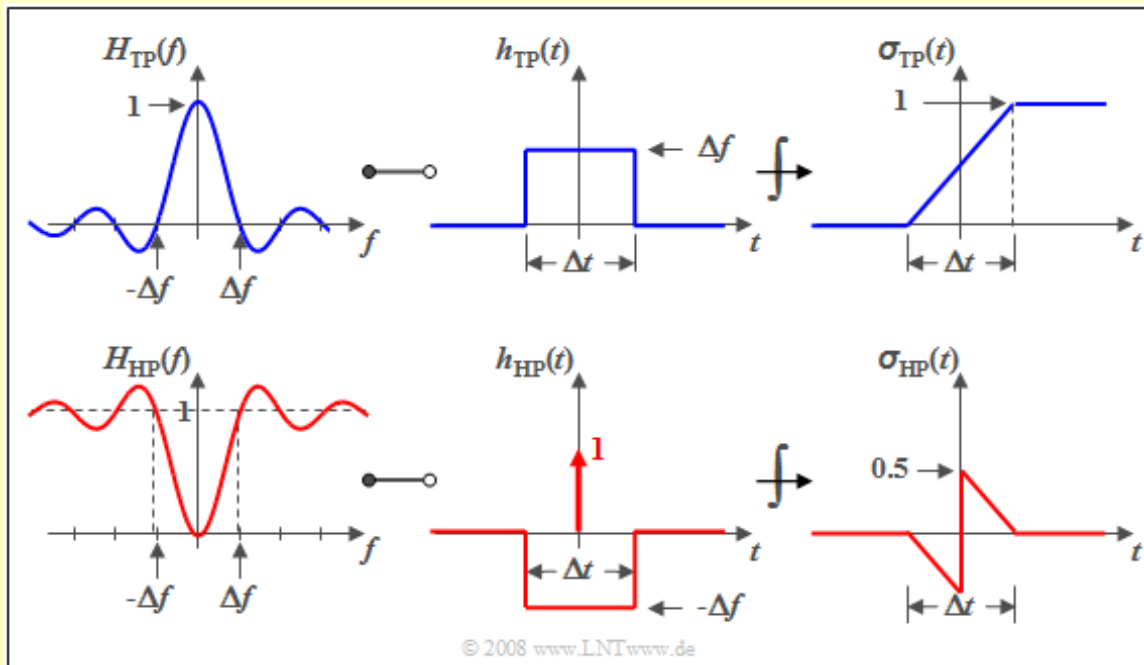
Damit lauten die Beschreibungsgrößen im Zeitbereich:

$$\begin{aligned} h_{HP}(t) &= \delta(t) - h_{TP}(t), \\ \sigma_{HP}(t) &= \gamma(t) - \sigma_{TP}(t). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen:

- $h_{HP}(t)$ und $h_{TP}(t)$ die Impulsantworten von Hoch- und Tiefpass,
- $\sigma_{HP}(t)$ und $\sigma_{TP}(t)$ die dazugehörigen Sprungfunktionen,
- $\gamma(t)$ die Sprungfunktion als Ergebnis der Integration über die Diracfunktion $\delta(t)$.

Beispiel: Wir betrachten den Spalttiefpass, der sich durch einen si-förmigen Frequenzgang, eine rechteckförmige Impulsantwort und eine linear ansteigende Sprungantwort auszeichnet. Diese sind in der nachfolgenden Grafik dargestellt.



Die untere Skizze zeigt die entsprechenden Hochpassfunktionen. Man erkennt, dass

- $H_{HP}(f = 0)$ immer den Wert 0 besitzt, wenn $H_{TP}(f = 0) = 1$ ist,
- demzufolge das Integral über $h_{HP}(t)$ ebenfalls 0 ergeben muss und
- auch die Sprungantwort $\sigma_{HP}(t)$ gegen den Endwert 0 tendiert.