

## Überblick zu Kapitel 2 des Buches „LZI–Systeme“

Unter **Verzerrungen** versteht man allgemein unerwünschte Veränderungen eines Nachrichtensignals durch ein Übertragungssystem. Neben den stochastischen Störungen (Rauschen, Nebensprechen, etc.) sind solche deterministischen Verzerrungen bei vielen Nachrichtensystemen ein entscheidender Faktor.

Dieses Kapitel bringt eine zusammenfassende Darstellung der Verzerrungen, insbesondere:

- die quantitative Erfassung solcher Signalverfälschungen durch die *Verzerrungsleistung*,
- die *Unterscheidungsmerkmale* zwischen nichtlinearen und linearen Verzerrungen,
- die Bedeutung und Berechnung des *Klirrfaktors* bei nichtlinearen Systemen, sowie
- die Auswirkungen linearer *Dämpfungsverzerrungen* und *Phasenverzerrungen*.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 21 Seiten mit Gleichungen, Beispielen sowie 36 Grafiken verdeutlicht. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel noch sieben Aufgaben und sechs Zusatzaufgaben mit insgesamt 61 Teilaufgaben, ein Lernvideo (LV) und drei Interaktionsmodule (IM), nämlich:

- **Lineare und nichtlineare Verzerrungen** (LV zu Kapitel 2.2 und Kapitel 2.3, 3–teilig)
- **Lineare Verzerrungen periodischer Signale** (IM zu Kapitel 2.3)
- **Phasen– und Gruppenlaufzeit** (IM zu Kapitel 2.3)
- **Einfluss einer Bandbegrenzung bei Sprache und Musik** (IM zu Kap. 2.3)

Literatur: [Fli91] – [GRS03] – [Han05] – [Lük04] – [Mar94] – [Schü91a] – [Schü91b] – [Söd00]

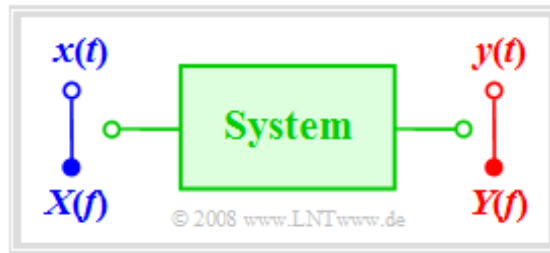
Die Thematik dieses Kapitels wird auch im Programm „lzi“ des Lehrsoftwarepakets *LNTsim* behandelt. *LNTsim* beinhaltet 24 Grafikprogramme zur Darstellung wichtiger Themen der Nachrichtentechnik.

Hinweise zum Herunterladen des Programmpakets *LNTsim* und der Versuchsanleitung:

**Lehrsoftwarepaket LNTsim** (Zip–Version, mehr als 50 MB)

## Voraussetzungen für Kapitel 2

Wir betrachten im Folgenden ein System, an dessen Eingang das Signal  $x(t)$  mit zugehörigem Spektrum  $X(f)$  anliegt. Das Ausgangssignal bezeichnen wir mit  $y(t)$  und dessen Spektrum mit  $Y(f)$ .



Der mit „System“ bezeichnete Block kann ein Teil einer elektrischen Schaltung sein oder ein komplettes Übertragungssystem, bestehend aus Sender, Kanal und Empfänger.

Für das gesamte Kapitel 2 soll gelten:

- Das System sei **zeitinvariant**. Führt das Eingangssignal  $x(t)$  zum Signal  $y(t)$ , so wird ein späteres Eingangssignal gleicher Form, nämlich  $x(t - t_0)$ , das Signal  $y(t - t_0)$  zur Folge haben.
- Es werden **keine Rauschprozesse** betrachtet, die bei realen Systemen stets vorhanden sind. Zur Beschreibung dieser Phänomene wird auf das Buch „Stochastische Signaltheorie“ verwiesen.
- Es werden **keine Detailkenntnisse** über das System vorausgesetzt. Alle Systemeigenschaften werden im Folgenden allein aus den Signalen  $x(t)$  und  $y(t)$  bzw. deren Spektren abgeleitet.
- Insbesondere seien vorerst keine Festlegungen hinsichtlich der **Linearität** gegeben. Das „System“ kann linear (Voraussetzung für die Anwendung des Superpositionsprinzips) oder nichtlinear sein.
- Aus einem einzigen Testsignal  $x(t)$  und dessen Antwort  $y(t)$  sind nicht alle Systemeigenschaften erkennbar. Daher müssen **ausreichend viele Testsignale** zur Bewertung herangezogen werden.

Auf den nächsten Seiten werden wir solche Systeme näher klassifizieren.

## Ideales und verzerrungsfreies System

**Definition:** Man spricht immer dann von einem **idealen System**, wenn das Ausgangssignal  $y(t)$  exakt gleich dem Eingangssignal  $x(t)$  ist:

$$y(t) = x(t).$$

Anzumerken ist, dass es ein solches ideales System in der Realität nicht gibt, auch wenn man die stets existenten, in diesem Buch aber nicht betrachteten statistischen Störungen und Rauschvorgänge außer Acht lässt. Ein jedes Übertragungsmedium weist Verluste (Dämpfungen) und Laufzeiten auf. Selbst wenn diese physikalischen Phänomene sehr klein sind, so sind sie jedoch niemals 0. Deshalb ist es notwendig, ein etwas weniger strenges Qualitätsmerkmal einzuführen.

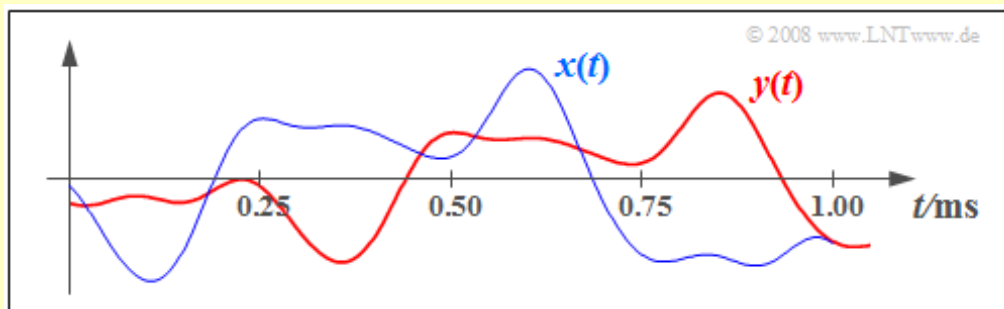
**Definition:** Ein **verzerrungsfreies System** liegt vor, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$y(t) = \alpha \cdot x(t - \tau).$$

Hierbei beschreibt  $\alpha$  den Dämpfungsfaktor und  $\tau$  die Laufzeit.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so spricht man von einem verzerrenden System.

**Beispiel:** Die folgende Grafik zeigt das Eingangssignal  $x(t)$  und das Ausgangssignal  $y(t)$  eines zwar nicht idealen, aber verzerrungsfreien Systems. Die Systemparameter sind  $\alpha = 0.8$  und  $\tau = 0.25$  ms.

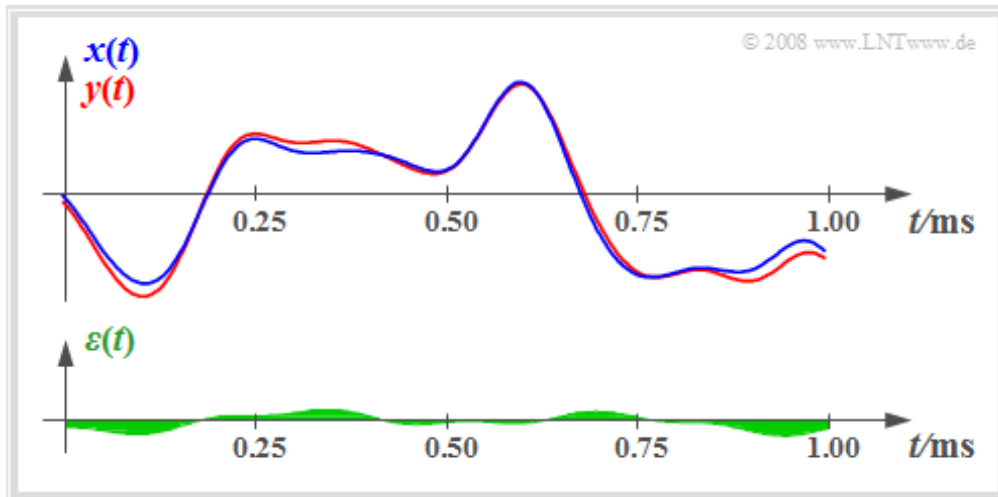


Der **Dämpfungsfaktor**  $\alpha$  kann durch eine empfängerseitige Verstärkung um  $1/\alpha$  vollständig rückgängig gemacht werden, doch ist zu berücksichtigen, dass damit auch etwaiges Rauschen angehoben wird.

Dagegen kann die **Laufzeit**  $\tau$  aus Kausalitätsgründen nicht kompensiert werden. Es hängt nun von der Anwendung ab, ob eine solche Laufzeit subjektiv als störend empfunden wird. Beispielsweise wird man selbst bei einer Laufzeit von einer Sekunde die (unidirektionale) TV-Übertragung einer Veranstaltung noch immer als „live“ bezeichnen. Dagegen werden bei einer bidirektionalen Kommunikation – zum Beispiel bei einem Telefonat – schon Laufzeiten von 300 Millisekunden als sehr störend empfunden. Man wartet entweder auf die Reaktion des Gesprächspartners oder beide Teilnehmer fallen sich ins Wort.

## Quantitatives Maß für die Signalverzerrungen

Wir betrachten nun ein verzerrendes System anhand von Eingangs- und Ausgangssignal. Dabei setzen wir zunächst voraus, dass außer den Signalverzerrungen nicht zusätzlich noch ein für alle Frequenzen konstanter Dämpfungsfaktor  $\alpha$  und eine für alle Frequenzen konstante Laufzeit  $\tau$  wirksam sind. Bei den nachfolgend skizzierten Signalausschnitten sind diese Voraussetzungen erfüllt.



In der Grafik ist zusätzlich zu den Signalen  $x(t)$  und  $y(t)$  auch das Differenzsignal

$$\varepsilon(t) = y(t) - x(t)$$

eingezeichnet. Als ein quantitatives Maß für die **Stärke der Verzerrungen** eignet sich zum Beispiel der quadratische Mittelwert dieses Differenzsignals:

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{T_M} \cdot \int_0^{T_M} \varepsilon^2(t) dt \quad (= P_V).$$

Zu dieser Gleichung ist Folgendes zu bemerken:

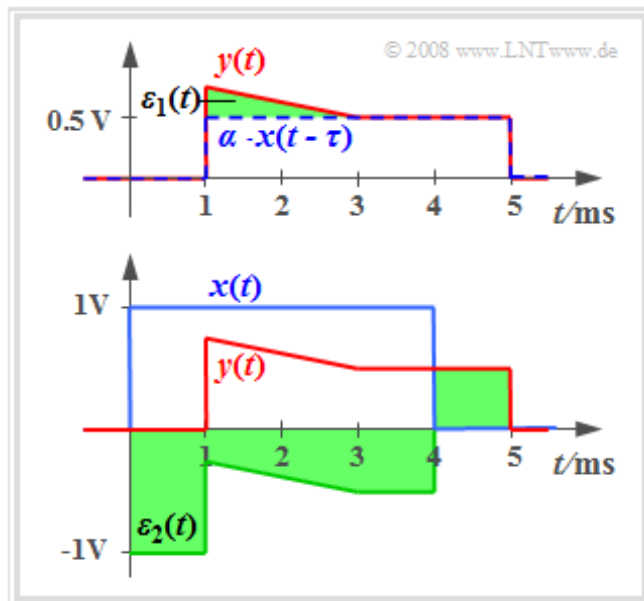
- Die Messdauer  $T_M$  zur Bestimmung dieses Mittelwertes muss hinreichend groß gewählt werden. Eigentlich müsste diese Gleichung mit Grenzübergang formuliert werden.
- Der oben angegebene quadratische Mittelwert wird oft auch als der mittlere quadratische Fehler (MQF) oder als die **Verzerrungsleistung**  $P_V$  bezeichnet.
- Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  Spannungssignale, so besitzt  $P_V$  die Einheit „V<sup>2</sup>“, das heißt, die Leistung ist nach obiger Definition auf den Widerstand 1  $\Omega$  bezogen.
- Mit der in gleicher Weise definierten Leistung  $P_x$  des Eingangssignals  $x(t)$  – also ebenfalls auf 1  $\Omega$  bezogen – kann das **Signal-zu-Verzerrungs-Leistungsverhältnis** angegeben werden:

$$\rho_V = \frac{P_x}{P_V} \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_V = 10 \cdot \lg \frac{P_x}{P_V} \quad (\text{in dB}).$$

Bei den in der Grafik dargestellten Signalen gilt  $P_x = 4 \text{ V}^2$ ,  $P_V = 0.04 \text{ V}^2$  und damit  $10 \cdot \lg \rho_V = 20 \text{ dB}$ .

## Berücksichtigung von Dämpfung und Laufzeit

Die auf der letzten Seite angegebenen Gleichungen führen dann nicht zu verwertbaren Aussagen, wenn zusätzlich eine Dämpfung  $\alpha$  und/oder eine Laufzeit  $\tau$  im System wirksam ist.



Die obere Grafik zeigt das gedämpfte, verzögerte und verzerrte Signal

$$y(t) = \alpha \cdot x(t - \tau) + \varepsilon_1(t),$$

wobei im Term  $\varepsilon_1(t)$  alle Verzerrungen zusammengefasst sind. Man erkennt an der grünen Fläche, dass das Fehlersignal  $\varepsilon_1(t)$  relativ klein ist.

Sind dagegen die Dämpfung  $\alpha$  und die Laufzeit  $\tau$  unbekannt, so ist Folgendes zu beachten:

- Das so ermittelte Fehlersignal  $\varepsilon_2(t) = y(t) - x(t)$  ist trotz kleiner Verzerrungen  $\varepsilon_1(t)$  relativ groß.
- Anstelle der Verzerrungsleistung muss hier die Verzerrungsenergie betrachtet werden, da  $x(t)$  und  $y(t)$  energiebegrenzte Signale sind.
- Die Verzerrungsenergie erhält man, in dem die unbekanntenen Größen  $\alpha$  und  $\tau$  variiert werden und auf diese Weise das Minimum des mittleren quadratischen Fehlers ermittelt wird:

$$E_V = \min_{\alpha, \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} [y(t) - (\alpha \cdot x(t - \tau))]^2 dt.$$

- Die Energie des gedämpften und verzögerten Signals  $\alpha \cdot x(t - \tau)$  ist unabhängig von der Laufzeit  $\tau$  gleich  $\alpha^2 \cdot E_x$ . Somit gilt hier für das Signal-zu-Verzerrungs-Leistungsverhältnis:

$$\rho_V = \frac{\alpha^2 \cdot E_x}{E_V} \quad \text{bzw.} \quad \rho_V = \frac{\alpha^2 \cdot P_x}{P_V}.$$

- Die erste dieser beiden Gleichungen gilt für zeitlich begrenzte und damit energiebegrenzte Signale, die zweite für zeitlich unbegrenzte, also leistungsbegrenzte Signale.

## Lineare und nichtlineare Verzerrungen

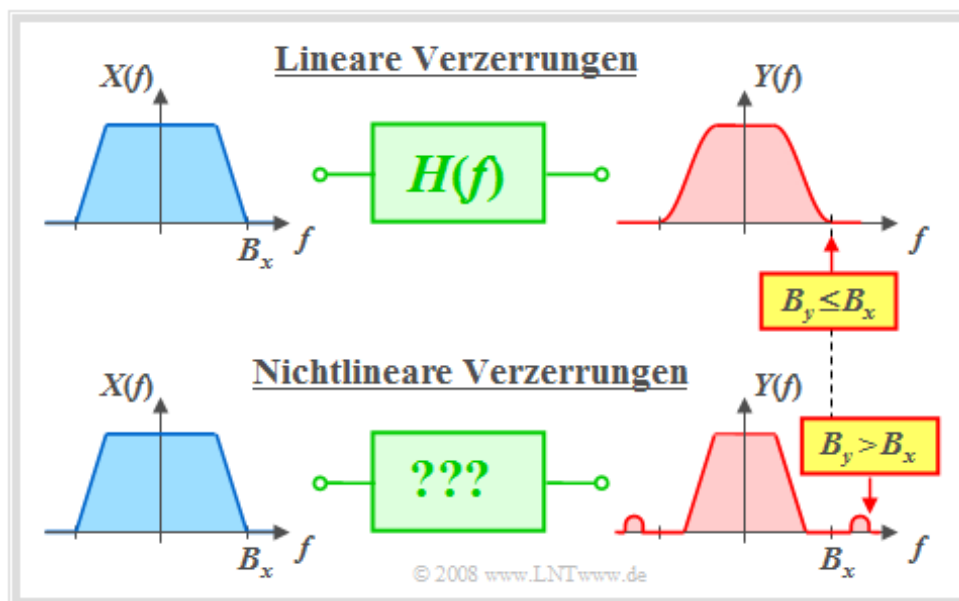
Man unterscheidet zwischen linearen und nichtlinearen Verzerrungen:

Ist das System **linear** und **zeitinvariant** (LZI), so wird es vollständig durch seinen **Frequenzgang**  $H(f)$  charakterisiert, und es lässt sich Folgendes feststellen:

- Entsprechend der  $H(f)$ -Definition gilt für das Ausgangsspektrum:  $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$ . Daraus folgt, dass  $Y(f)$  keine Frequenzanteile beinhalten kann, die nicht auch in  $X(f)$  enthalten sind.
- Die Umkehrung besagt: Das Ausgangssignal  $y(t)$  kann jede Frequenz  $f_0$  beinhalten, die bereits im Eingangssignal  $x(t)$  enthalten ist. Voraussetzung ist also, dass  $X(f_0) \neq 0$  gilt.
- Bei einem LZI-System ist die absolute Bandbreite des Ausgangssignals ( $B_y$ ) nie größer als die des Eingangssignals ( $B_x$ ):

$$B_y \leq B_x.$$

In der oberen Grafik gilt  $B_y = B_x$ . Lineare Verzerrungen liegen vor, da sich in diesem Frequenzband  $X(f)$  und  $Y(f)$  unterscheiden. Eine Bandbegrenzung ( $B_y < B_x$ ) ist eine Sonderform linearer Verzerrungen, die im **Kapitel 2.3** ausführlich behandelt werden.



Die untere Grafik zeigt ein Beispiel für nichtlineare Verzerrungen, da  $B_y$  größer als  $B_x$  ist. Für ein solches System kann kein Frequenzgang  $H(f)$  angegeben werden. Welche Beschreibungsgrößen für nichtlineare Systeme geeignet sind, wird im **Kapitel 2.2** dargestellt.

Bei den meisten realen Übertragungskanälen treten sowohl lineare als auch nichtlineare Verzerrungen auf. Für eine ganze Reihe von Problemstellungen ist jedoch die klare Trennung der beiden Verzerrungsarten essentiell. In **[Kam04]** wird ein entsprechendes Ersatzmodell angegeben.

## Eigenschaften nichtlinearer Systeme

Wir gehen in diesem Abschnitt von folgender Konstellation aus:



Die Systembeschreibung mittels des Frequenzgangs  $H(f)$  und/oder der Impulsantwort  $h(t)$  ist nur bei einem **LZI-System** möglich. Beinhaltet aber das System auch nichtlineare Komponenten, so sind kein Frequenzgang und auch keine Impulsantwort angebar und ein Beobachter wird Folgendes feststellen:

- Die Übertragungseigenschaften sind nun auch **von der Größe des Eingangssignals abhängig**. Führt  $x(t)$  zum Ausgangssignal  $y(t)$ , so kann daraus nun nicht mehr geschlossen werden, dass sich beim Eingangssignal  $K \cdot x(t)$  stets das Signal  $K \cdot y(t)$  ergeben wird.
- Das bedeutet gleichzeitig, dass das **Superpositionsprinzip nicht mehr anwendbar** ist. Das bedeutet, dass aus den beiden Korrespondenzen  $x_1(t) \Rightarrow y_1(t)$  und  $x_2(t) \Rightarrow y_2(t)$  nicht auf das Übertragungsverhalten  $x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_1(t) + y_2(t)$  geschlossen werden kann.
- Durch Nichtlinearitäten entstehen **neue Frequenzen**. Ist  $x(t)$  eine harmonische Schwingung mit der Frequenz  $f_0$ , so beinhaltet das Ausgangssignal  $y(t)$  auch Anteile bei Vielfachen von  $f_0$ . Diese bezeichnet man in der Nachrichtentechnik als **Oberwellen**.
- Ein Nachrichtensignal beinhaltet in der Praxis meist sehr viele Frequenzanteile. Die Oberwellen der niederfrequenten Signalanteile fallen nun in den Bereich höherfrequenter Nutzanteile. Dadurch ergeben sich **nichtreversible Signalverfälschungen**.

Bevor auf der letzten Seite dieses Abschnitts Beispiele für das Auftreten nichtlinearer Verzerrungen in der Praxis genannt werden, soll das Problem der nichtlinearen Verzerrungen mathematisch erfasst werden. Wir setzen dabei voraus, dass das System **kein Gedächtnis** besitzt, so dass der Ausgangswert  $y = y(t_0)$  nur vom momentanen Eingangswert  $x = x(t_0)$  abhängt, nicht aber vom Signalverlauf  $x(t)$  für  $t < t_0$ .

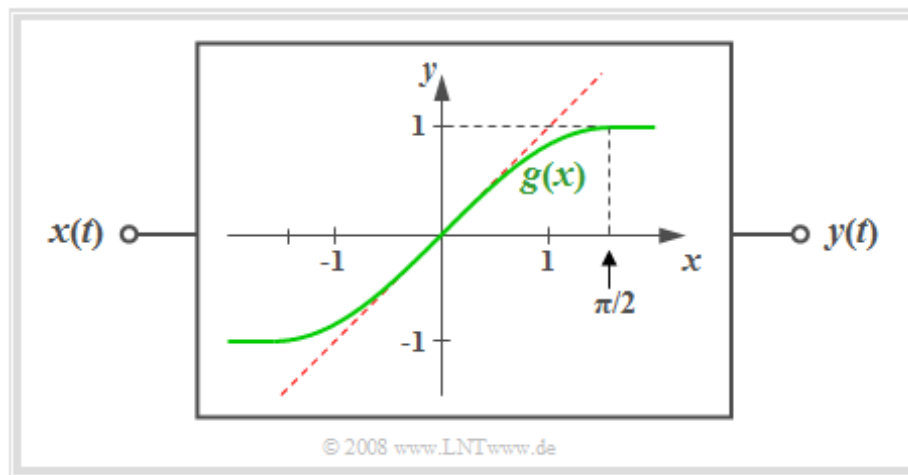
## Beschreibung nichtlinearer Systeme (1)

**Definition:** Ein System bezeichnet man als **nichtlinear**, wenn zu allen Zeiten zwischen dem Signalwert  $x = x(t)$  am Eingang und dem Ausgangssignalwert  $y = y(t)$  der folgende Zusammenhang besteht:

$$y = g(x) \neq \text{const.} \cdot x.$$

Man bezeichnet den Verlauf  $y = g(x)$  als die **nichtlineare Kennlinie** des Systems.

In der Grafik ist beispielhaft in grün die nichtlineare Kennlinie  $y = g(x)$  zu erkennen, die entsprechend dem ersten Viertel einer Sinusfunktion geformt ist. In roter Farbe gestrichelt erkennt man den Sonderfall eines linearen Systems mit der Kennlinie  $y = x$ .



Da eine jede solche Kennlinie um den Arbeitspunkt in eine **Taylorreihe** entwickelt werden kann, lässt sich das Ausgangssignal auch wie folgt darstellen:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot x^i(t) = c_0 + c_1 \cdot x(t) + c_2 \cdot x^2(t) + c_3 \cdot x^3(t) + \dots$$

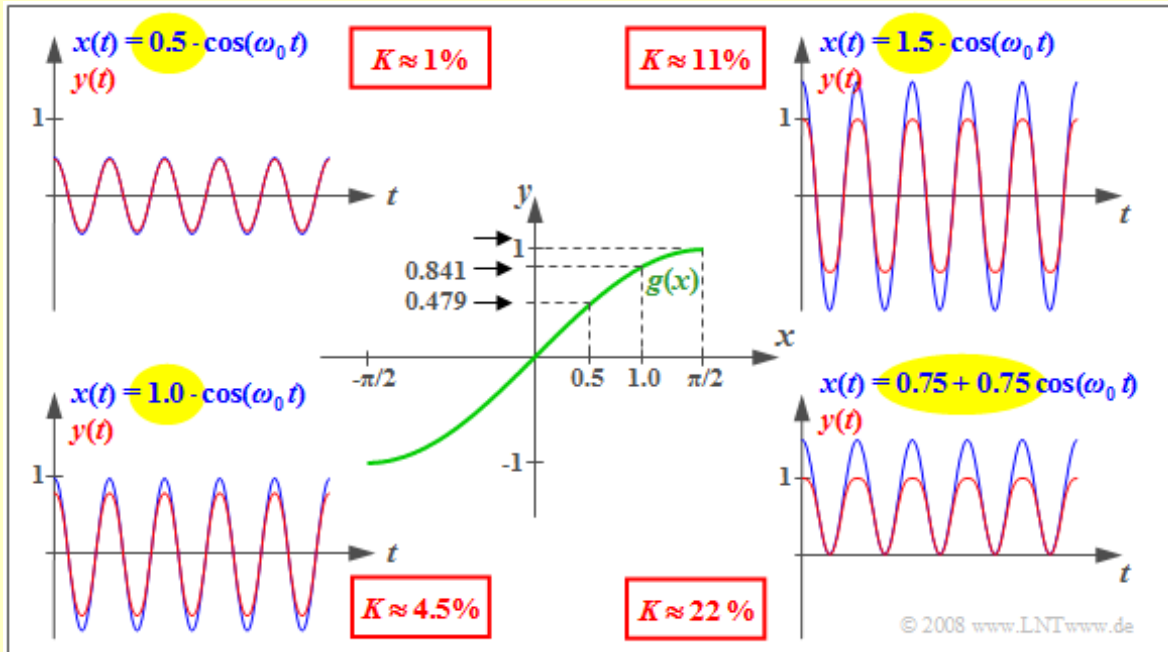
Besitzt  $x(t)$  eine Einheit – beispielsweise „Volt“, so sind auch die Koeffizienten der Taylorreihe mit Einheiten anzusetzen und zwar mit unterschiedlichen:  $c_0$  mit „V“,  $c_1$  ohne Einheit,  $c_2$  mit „1/V“, usw..

In obiger Grafik ist der Arbeitspunkt identisch mit dem Nullpunkt und es gilt  $c_0 = 0$ .



## Beschreibung nichtlinearer Systeme (2)

**Beispiel:** Die auf der **ersten Seite** dieses Abschnitts aufgelisteten Eigenschaften nichtlinearer Systeme werden hier anhand der Kennlinie  $y = g(x) = \sin(x)$  verdeutlicht, die in der Mitte der Grafik dargestellt ist. Ein Gleichsignal  $x(t) = 0.5$  hat hier das konstante Ausgangssignal  $y(t) = 0.479$  zur Folge, während sich mit  $x(t) = 1$  das Ausgangssignal zu  $y(t) = 0.841 \neq 2 \cdot 0.479$  ergibt. Durch eine Verdopplung von  $x(t)$  wird hier also nicht auch gleichzeitig  $y(t)$  verdoppelt, und somit das Superpositionsprinzip verletzt.



Die äußeren Bilder zeigen – jeweils in blau – cosinusförmige Eingangssignale  $x(t)$  mit unterschiedlichen Amplituden  $A$  und in rot die dazugehörigen verzerrten Ausgangssignale  $y(t)$ . Man erkennt die Zunahme der nichtlinearen Verzerrungen mit größer werdender Amplitude, die durch den auf der nächsten Seite definierten Klirrfaktor  $K$  quantifiziert werden.

Das rechte obere Diagramm für  $A = 1.5$  zeigt eindeutig, dass nun  $y(t)$  nicht mehr cosinusförmig ist; die Halbwellen verlaufen runder als bei der Cosinusfunktion. Aber auch für  $A = 0.5$  und  $A = 1.0$  weichen – wenn auch weniger stark – die Signale  $y(t)$  aufgrund von Oberwellen von der Cosinusform ab. Das heißt, es entstehen neue Frequenzanteile bei Vielfachen der Cosinusfrequenz  $f_0$ .

Im rechten unteren Bild wird durch einen zusätzlichen Gleichanteil die Kennlinie nur einseitig betrieben. Man erkennt nun auch eine Unsymmetrie im Signal  $y(t)$ . Die untere Halbwellen verläuft spitzförmiger als die obere. Der Klirrfaktor beträgt hier etwa 22%.

## Der Klirrfaktor (1)

Zur quantitativen Erfassung der nichtlinearen Verzerrungen gehen wir hier von einem cosinusförmigen Eingangssignal  $x(t)$  mit der Amplitude  $A_x$  aus.



Das Ausgangssignal beinhaltet aufgrund der nichtlinearen Verzerrungen Oberwellen und es gilt allgemein:

$$y(t) = A_0 + A_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + A_2 \cdot \cos(2\omega_0 t) + A_3 \cdot \cos(3\omega_0 t) + \dots$$

**Definition:** Mit diesen Amplitudenwerten  $A_i$  lautet die Gleichung für den **Klirrfaktor**:

$$K = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots}}{A_1} = \sqrt{K_2^2 + K_3^2 + K_4^2 + \dots}$$

In der zweiten Gleichung bezeichnet  $K_2 = A_2/A_1$  den Klirrfaktor zweiter Ordnung,  $K_3 = A_3/A_1$  den Klirrfaktor dritter Ordnung usw..

Ausdrücklich wird darauf hingewiesen, dass bei der Berechnung des Klirrfaktors die Amplitude  $A_x$  des Eingangssignals nicht berücksichtigt wird. Auch ein entstehender Gleichanteil  $A_0$  bleibt unberücksichtigt.

Im Beispiel auf der vorangegangenen Seite sind die Klirrfaktoren mit Werten zwischen 1% und ca. 20% angegeben. Diese Werte liegen deutlich über den Klirrfaktoren preisgünstiger Audioanlagen ( $< 0.1\%$ ). Bei HiFi-Geräten wird auf die Linearität besonderer Wert gelegt und ein sehr kleiner Klirrfaktor schlägt sich auch im Preis nieder.

Ein Vergleich mit der Seite **Berücksichtigung von Dämpfung und Laufzeit** in Kapitel 2.1 lässt erkennen, dass für den wichtigen Sonderfall eines cosinusförmigem Eingangssignals das dort definierte Signal-zu-Verzerrungs-Leistungsverhältnis gleich dem Kehrwert des Klirrfaktors zum Quadrat ist:

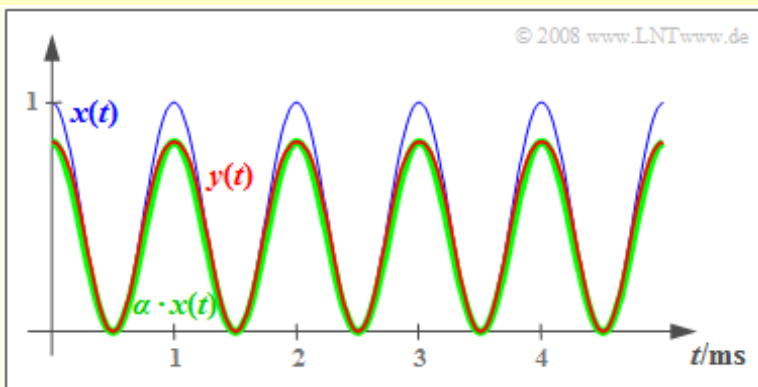
$$\rho_V = \frac{\alpha^2 \cdot P_x}{P_V} = \left( \frac{A_1}{A_x} \right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot A_x^2}{\frac{1}{2} \cdot (A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots)} = \frac{1}{K^2}$$

## Der Klirrfaktor (2)

**Beispiel:** Wir betrachten nun ein mittelwertbehaftetes Cosinussignal:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t).$$

Dieses nimmt Werte zwischen 0 und 1 an und ist als blaue Kurve gezeichnet. Die Leistung dieses Signals ergibt sich zu  $P_x = 1/4 + 1/8 = 0.375$ .



Gibt man dieses Signal auf eine Nichtlinearität mit der Kennlinie

$$y = g(x) = \sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6},$$

so lautet das Ausgangssignal:

$$y(t) = A_0 + A_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + A_2 \cdot \cos(2\omega_0 \cdot t) + A_3 \cdot \cos(3\omega_0 \cdot t),$$

$$A_0 = \frac{86}{192}, \quad A_1 = \frac{81}{192}, \quad A_2 = -\frac{6}{192}, \quad A_3 = -\frac{1}{192}.$$

Zur Berechnung dieser Fourierkoeffizienten wurden die trigonometrischen Umformungen für  $\cos^2(\alpha)$  und  $\cos^3(\alpha)$  verwendet. Der Klirrfaktor ergibt sich für dieses Signal zu

$$K = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2}}{A_1} \approx 7.5\%.$$

Aus der Grafik erkennt man weiter, dass das rot skizzierte Signal  $y(t)$  näherungsweise gleich dem grün gezeichneten Signal  $\alpha \cdot x(t)$  mit  $\alpha = \sin(1) \approx 5/6$  ist.

Definiert man das Fehlersignal  $\varepsilon_1(t) = y(t) - \alpha \cdot x(t)$ , so ergibt sich mit dessen Leistung

$$P_{\varepsilon_1} = \frac{(80 - 86)^2}{192^2} + \frac{6^2 + (-1)^2}{2 \cdot 192^2} \approx 1.48 \cdot 10^{-3}$$

für das Signal-zu-Stör-Leistungsverhältnis:

$$\rho_{v1} = \frac{\alpha^2 \cdot P_x}{P_{\varepsilon_1}} = \frac{(5/6)^2 \cdot 0.375}{1.48 \cdot 10^{-3}} \approx 176 = \frac{1}{K^2}.$$

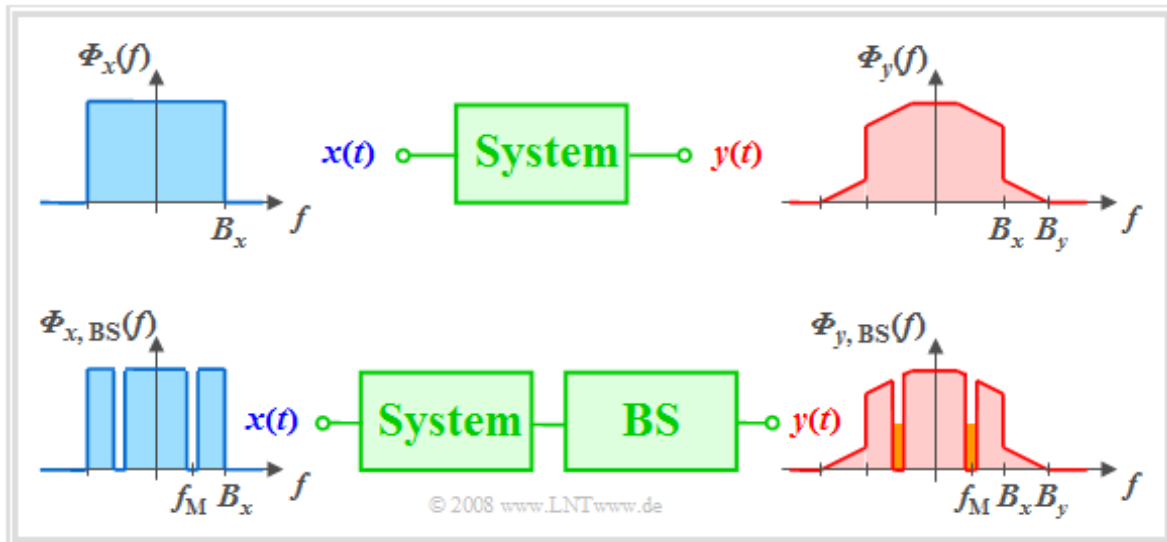
Dagegen ist das SNR deutlich geringer, wenn man den Dämpfungsfaktor  $\alpha$  nicht berücksichtigt, das heißt, wenn man vom Fehlersignal  $\varepsilon_2 = y(t) - x(t)$  ausgeht:

$$P_{\varepsilon_2} = \frac{(86 - 96)^2}{192^2} + \frac{(81 - 96)^2 + 6^2 + (-1)^2}{2 \cdot 192^2} \approx 6.3 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \rho_{v2} = \frac{P_x}{P_{\varepsilon_2}} = \frac{0.375}{6.3 \cdot 10^{-3}} \approx 60.$$

## Rauschklimrmessung

Ein großer Nachteil der Klirrfaktordefinition ist die damit einhergehende Festlegung auf cosinusförmige Testsignale, also auf realitätsferne Bedingungen. Bei der so genannten Rauschklimrmessung modelliert man das zu übertragende Signal  $x(t)$  durch weißes Rauschen mit der Rauschleistungsdichte  $\Phi_x(f)$ . Zusätzlich bringt man eine schmale Bandsperr (BS) mit Mittelfrequenz  $f_M$  und Bandbreite  $B$  in das System ein.



Bei einem linearen System wäre das Ausgangsspektrum  $\Phi_y(f)$  nicht breiter als  $B_x$  und auch im Bereich um  $f_M$  gäbe es keine Anteile. Diese ergeben sich allein durch Mischprodukte (Intermodulationsanteile) verschiedener Spektralanteile, also durch nichtlineare Verzerrungen.

Durch Variation der Mittenfrequenz  $f_M$  und Integration über alle diese kleinen Störanteile kann somit die Verzerrungsleistung ermittelt werden. Nähere Angaben zu dieser Methode findet man z.B. in **[Kam04]**.

## Konstellationen, die zu nichtlinearen Verzerrungen führen

Als Beispiel für das Auftreten nichtlinearer Verzerrungen bei analogen Nachrichtenübertragungssystemen sollen hier einige Konstellationen genannt werden, die zu solchen führen. Inhaltlich bedeutet dies einen Vorgriff auf das Buch „Modulationsverfahren“.

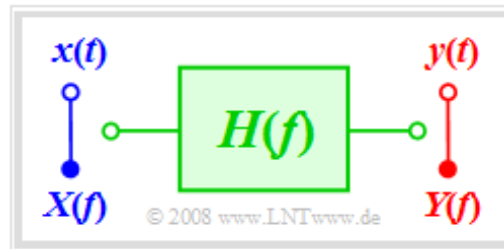


Nichtlineare Verzerrungen des Sinkensignals  $v(t)$  in Bezug zum Quellensignal  $q(t)$  treten auf, wenn

- es bereits auf dem Kanal – also bezüglich des Sendesignals  $s(t)$  und des Empfangssignals  $r(t)$  – zu nichtlinearen Verzerrungen kommt,
- bei der Zweiseitenband–Amplitudenmodulation (ZSB–AM) mit dem Modulationsgrad  $m > 1$  ein Hüllkurvendemodulator verwendet wird,
- bei ZSB–AM und Hüllkurvendemodulation ein linear verzerrender Kanal vorliegt und zwar auch dann, wenn der Modulationsgrad  $m$  kleiner als 1 ist,
- die Kombination aus einer Einseitenband–Amplitudenmodulation und der Hüllkurvendemodulation zur Anwendung kommt (unabhängig vom Seitenband–zu–Träger–Verhältnis),
- eine Winkelmodulation – dies ist der für Frequenz– und Phasenmodulation übliche Oberbegriff – angewandt wird und die zur Verfügung stehende Bandbreite nur endlich groß ist.

## Zusammenstellung wichtiger Beschreibungsgrößen

Für diesen Abschnitt 2.3 werden nichtlineare Verzerrungen ausgeschlossen, so dass das System durch den Frequenzgang  $H(f)$  vollständig beschrieben wird:



Der im Allgemeinen komplexe **Frequenzgang** kann auch wie folgt dargestellt werden:

$$H(f) = |H(f)| \cdot e^{-j \cdot b(f)} = e^{-a(f)} \cdot e^{-j \cdot b(f)},$$

Daraus ergeben sich folgende Beschreibungsgrößen:

- Der Betrag  $|H(f)|$  wird als **Amplitudengang** und in logarithmierter Form als **Dämpfungsverlauf** bezeichnet:

$$a(f) = -\ln |H(f)| \text{ in Neper (Np)} = -20 \cdot \lg |H(f)| \text{ in Dezibel (dB)}.$$

- Der **Phasengang**  $b(f)$  gibt den negativen frequenzabhängigen Winkel von  $H(f)$  in der komplexen Ebene an, bezogen auf die reelle Achse:

$$b(f) = -\arg H(f) \text{ in Radian (rad)}.$$

## Dämpfungs- und Phasenverlauf bei verzerrungsfreien Systemen (1)

Nach den Ausführungen im **Kapitel 2.1** liegt genau dann ein **verzerrungsfreies System** vor, wenn alle Frequenzanteile gleichmäßig gedämpft und verzögert werden:

$$y(t) = \alpha \cdot x(t - \tau).$$

Nach den Gesetzmäßigkeiten der Systemtheorie muss deshalb für den Frequenzgang

$$H(f) = \alpha \cdot e^{-j 2\pi f \tau}$$

gelten, oder ausgedrückt mit den Funktionen  $a(f)$  und  $b(f)$ :

- Der Dämpfungsverlauf muss für alle im Eingangssignal enthaltenen Frequenzen konstant sein:

$$a(f) = -\ln |H(f)| = -\ln \alpha = \text{const.}$$

- Der Phasenverlauf muss im interessierenden Bereich entweder 0 sein (System ohne Laufzeit) oder linear mit der Frequenz ansteigen ( $\tau$  gibt dabei die Laufzeit an):

$$b(f) = 2\pi f \tau = \text{const.} \cdot f.$$

Bei einem verzerrungsfreien System müssen beide Forderungen gleichzeitig erfüllt sein. Bei Verletzung auch nur einer dieser beiden Bedingungen kommt es zu linearen Verzerrungen, die entsprechend ihrer Ursache unterschieden werden.

**Dämpfungsverzerrungen** gibt es, wenn im interessierenden Frequenzbereich der Dämpfungsverlauf nicht konstant ist:

$$a(f) \neq \text{const.}$$

**Phasenverzerrungen** liegen vor, wenn die Phasenfunktion nicht linear bezüglich  $f$  ist:

$$b(f) \neq \text{const.} \cdot f.$$

Anzumerken ist, dass bei allen realisierbaren Systemen – insbesondere den im Kapitel 3 beschriebenen „minimalphasigen“ – meist beide Verzerrungsformen gleichzeitig auftreten.

Im Zeitbereich lautet die Bedingung für ein verzerrungsfreies System:

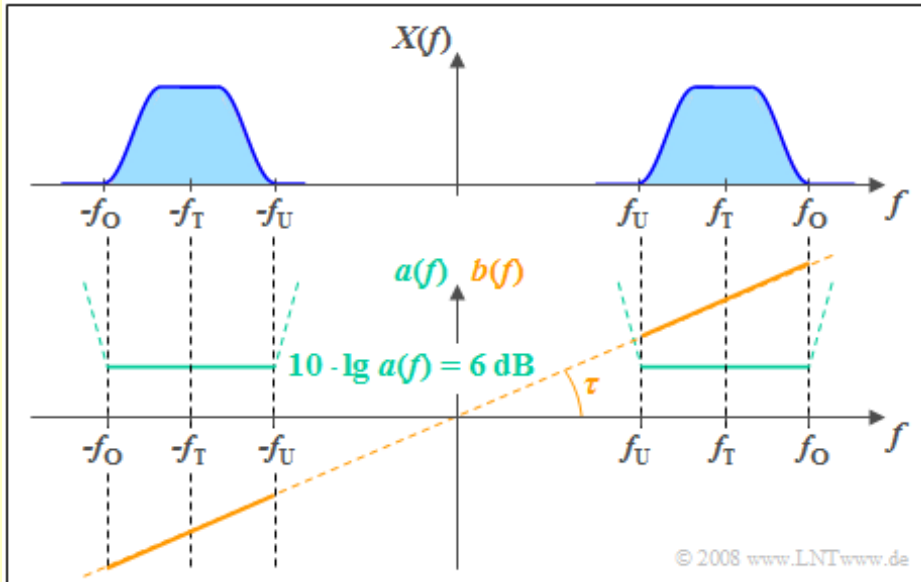
$$h(t) = \alpha \cdot \delta(t - \tau), \quad \alpha \neq 0.$$

Ist zudem  $\alpha = 1$  und  $\tau = 0$ , so liegt ein **ideales Übertragungssystem** vor. Dagegen gibt es immer dann lineare Verzerrungen, wenn

- $h(t)$  eine zeitkontinuierliche Funktion ist, oder
- $h(t)$  sich aus mehr als einer Diracfunktion zusammensetzt.

## Dämpfungs- und Phasenverlauf bei verzerrungsfreien Systemen (2)

**Beispiel:** Das nachfolgende Bild zeigt den Dämpfungsverlauf  $a(f)$  und den Phasenverlauf  $b(f)$  eines verzerrungsfreien Systems. In einem Bereich von  $f_U$  bis  $f_O$  um die Trägerfrequenz  $f_T$ , in dem das Signal  $x(t)$  Anteile besitzt, ist  $a(f)$  konstant. Aus dem angegebenen konstanten Dämpfungswert 6 dB folgt für den Amplitudengang  $|H(f)| = 0.5$ . Das Ausgangsspektrum  $Y(f)$  ist somit betragsmäßig halb so groß wie die Spektralanteile  $X(f)$  des Eingangssignals.



Der Phasenverlauf  $b(f)$  steigt zwischen  $f_U$  und  $f_O$  linear mit der Frequenz an. Dies hat zur Folge, dass alle Frequenzanteile um die gleiche Phasenlaufzeit  $\tau$  verzögert werden, wobei  $\tau$  durch die Steigung von  $b(f)$  festliegt. Mit  $b(f) = 0$  würde sich ein laufzeitfreies System ( $\tau = 0$ ) ergeben.

Weiter sind aus der Grafik die allgemeingültigen Eigenschaften zu erkennen:

- Der Dämpfungsverlauf  $a(f) = a(-f)$  ist eine gerade Funktion in  $f$ .
- Der Phasenverlauf  $b(f) = -b(-f)$  ist eine ungerade Funktion in  $f$ .

Außerhalb des durch  $x(t)$  belegten Frequenzbandes müssen die Bedingungen „konstante Dämpfung“ und „lineare Phase“ nicht eingehalten werden. Man erkennt aus dem gestrichelt eingezeichneten Verlauf von  $a(f)$ , dass hier sogar eine sehr viel höhere Dämpfung zweckmäßig ist, da dadurch die stets vorhandenen – in diesem Buch aber nicht betrachteten – Rauschanteile außerhalb der Nutzbandbreite besser unterdrückt werden.



## Dämpfungsverzerrungen

Wir betrachten im Folgenden als Eingangssignal die Summe zweier harmonischer Schwingungen:

$$x(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_1 \cdot t - \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(2\pi f_2 \cdot t - \varphi_2).$$

Ist dann das Ausgangssignal in der Form

$$y(t) = \alpha_1 \cdot A_1 \cdot \cos(2\pi f_1 \cdot t - \varphi_1) + \alpha_2 \cdot A_2 \cdot \cos(2\pi f_2 \cdot t - \varphi_2).$$

darstellbar und gilt gleichzeitig  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , so liegen **ausschließlich Dämpfungsverzerrungen** vor.

Die Dämpfungskonstanten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  können aus dem Amplitudengang  $|H(f)|$  ermittelt werden:

$$\alpha_1 = |H(f_1)|, \quad \alpha_2 = |H(f_2)|.$$

Ist der Dämpfungsverlauf  $a(f)$  in Neper gegeben, so gilt gleichermaßen (1 dB entspricht 0.1155 Np):

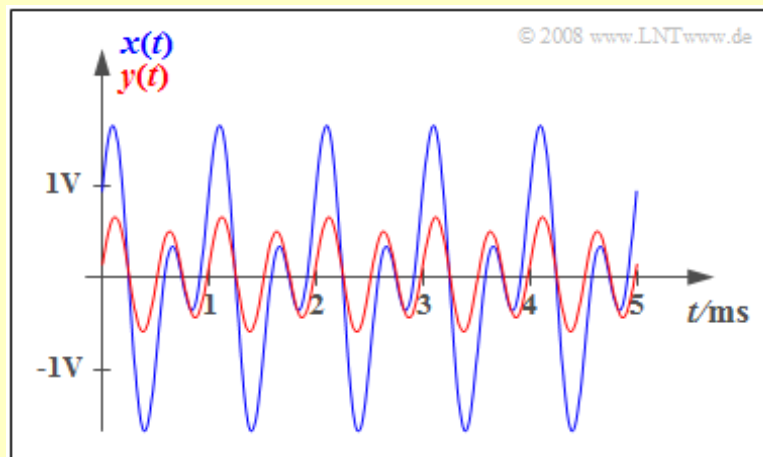
$$\alpha_1 = e^{-a(f_1)}, \quad \alpha_2 = e^{-a(f_2)}.$$

*Bitte beachten Sie:* Bei manchen Zeichenfonts sind „a“ von „α“ (alpha) schwer zu unterscheiden.

**Beispiel:** Die Grafik zeigt das mit  $T_0 = 1$  ms periodische Eingangssignal (blauer Verlauf)

$$x(t) = 1 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 1 \text{ kHz} \cdot t) + 1 \text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot 2 \text{ kHz} \cdot t)$$

sowie das mit  $\alpha_1 = 0.2$  und  $\alpha_2 = 0.5$  dämpfungsverzerrte Signal  $y(t)$ . Man erkennt die signifikanten Auswirkungen dieser Dämpfungsverzerrungen:  $y(t)$  hat nur noch wenig Ähnlichkeit mit  $x(t)$ .



Mit  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  würde sich dagegen das verzerrungsfreie Signal  $y(t) = \alpha \cdot x(t)$  ergeben, aus dem durch Verstärkung um  $1/\alpha$  das ursprüngliche Signal  $x(t)$  wieder hergestellt werden könnte.

Mit dem folgenden Berechnungstool können unter Anderem Dämpfungsverzerrungen visualisiert werden.

### Lineare Verzerrungen periodischer Signale

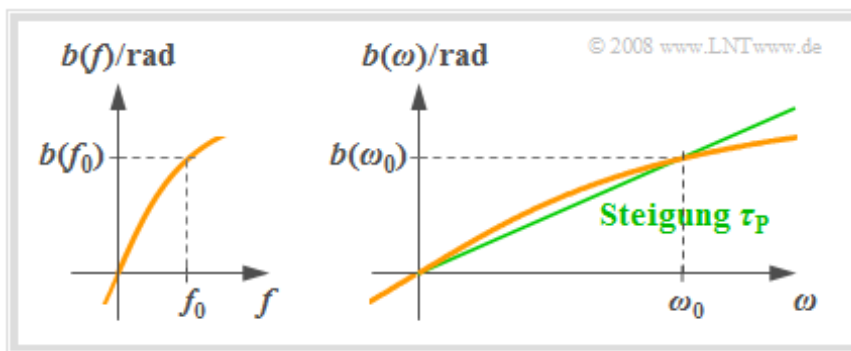
Nähere Informationen finden Sie in der Animation selbst unter dem Menüpunkt „Erläuterung“.

## Phasenlaufzeit

Wir betrachten ein System mit  $|H(f)| = 1$ , so dass für den Frequenzgang gilt:

$$H(f) = e^{-j \cdot b(f)}.$$

Die Grafik zeigt einen beispielhaften Phasenverlauf  $b(f)$ . Zu beachten ist, dass der Phasenverlauf eine ungerade Funktion bezüglich der Frequenz  $f$  ist:  $b(-f) = -b(f)$ . Rechts ist die Funktion  $b(\omega)$  skizziert, die gegenüber  $b(f)$  in der Abszisse um den Faktor  $2\pi$  gestreckt ist.



Liegt am Eingang die harmonische Schwingung

$$x(t) = C \cdot \cos(2\pi f_0 t - \varphi) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad X(f) = \frac{C}{2} \cdot e^{j\varphi} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{C}{2} \cdot e^{-j\varphi} \cdot \delta(f - f_0)$$

an, so ergibt sich für die Spektralfunktion am Ausgang:

$$Y(f) = \frac{C}{2} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j b(f_0)} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{C}{2} \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{-j b(f_0)} \cdot \delta(f - f_0).$$

Somit lautet das Ausgangssignal:

$$y(t) = C \cdot \cos(2\pi f_0 t - b(f_0) - \varphi).$$

Dieses kann auch in folgender Form dargestellt werden:

$$y(t) = C \cdot \cos(2\pi f_0 (t - \tau_P(f_0)) - \varphi).$$

**Definition:** Die **Phasenlaufzeit** gibt die Verzögerung an, die eine harmonische Schwingung mit der Frequenz  $f_0$  durch das System erfährt; sie ist bei phasenverzerrenden Systemen frequenzabhängig:

$$\tau_P(f_0) = \frac{b(f_0)}{2\pi f_0} \quad \text{bzw.} \quad \tau_P(\omega_0) = \frac{b(\omega_0)}{\omega_0}.$$

Hierzu ist Folgendes anzumerken:

- In der  $b(\omega)$ -Darstellung kann die Phasenlaufzeit  $\tau_P$  als die Steigung der grün eingezeichneten Geraden auch grafisch ermittelt werden.
- Im Allgemeinen wird eine Schwingung mit anderer Frequenz auch eine andere Phasenlaufzeit zur Folge haben. Dies ist der physikalische Hintergrund für Phasenverzerrungen.
- Gilt bei einem System  $b(\omega) = \tau_P \cdot \omega$  bzw.  $b(f) = 2\pi \cdot \tau_P \cdot f$ , so haben alle Frequenzen die gleiche Phasenlaufzeit  $\tau_P$ . Ein solches System führt nicht zu Phasenverzerrungen.

## Unterschied zwischen Phasen- und Gruppenlaufzeit

Eine weitere wichtige Systembeschreibungsgröße die so genannte **Gruppenlaufzeit**, die nicht mit der Phasenlaufzeit verwechselt werden sollte. Die Gruppenlaufzeit ist wie folgt definiert:

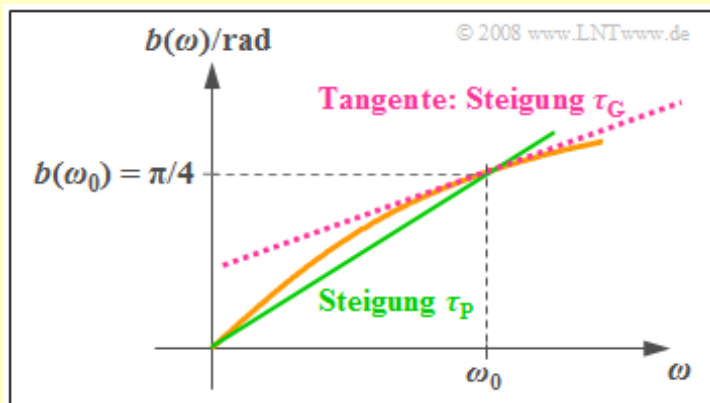
$$\tau_G(\omega_0) = \left[ \frac{db(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0}$$

Diese Größe wird vorwiegend zur Beschreibung von Schmalbandsystemen herangezogen. Sie gibt die Verzögerung an, welche die Hüllkurve eines Bandpass-Systems erfährt.

Mit dem nachfolgenden interaktiven Flash-Modul können Sie sich die unterschiedlichen Anwendungen und Auswirkungen von Phasen- und Gruppenlaufzeit verdeutlichen:

### Phasen- und Gruppenlaufzeit

**Beispiel:** Die Grafik zeigt die Phasenfunktion  $b(\omega) = \arctan(\omega/\omega_0)$ , die monoton von 0 (bei  $\omega = 0$ ) bis  $\pi/2$  (für  $\omega \rightarrow \infty$ ) ansteigt. Der Funktionswert bei  $\omega = \omega_0$  beträgt  $\pi/4$ .



Setzen wir  $\omega_0 = 2\pi \cdot 1 \text{ kHz}$ , so erhalten wir für die *Phasenlaufzeit*:

$$\tau_P(\omega_0) = \frac{b(\omega_0)}{\omega_0} = \frac{\pi/4}{2\pi \cdot 1 \text{ kHz}} = 125 \mu\text{s}.$$

Diese Größe entspricht der Steigung der grün eingezeichneten Geraden in der obigen Grafik. Dagegen kennzeichnet die geringere Steigung der rot dargestellten Tangente die *Gruppenlaufzeit*:

$$\tau_G(\omega_0) = \left[ \frac{db(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} = \left[ \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^2} \right]_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{2\omega_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 1 \text{ kHz}} \approx 80 \mu\text{s}.$$

## Phasenverzerrungen

Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes betrachten wir als Eingangssignal wieder die Summe zweier harmonischer Schwingungen:

$$x(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_1 \cdot t - \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(2\pi f_2 \cdot t - \varphi_2).$$

Ist bei diesem Eingangssignal das Ausgangssignal in der Form

$$y(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi f_1 \cdot (t - \tau_1) - \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(2\pi f_2 \cdot (t - \tau_2) - \varphi_2)$$

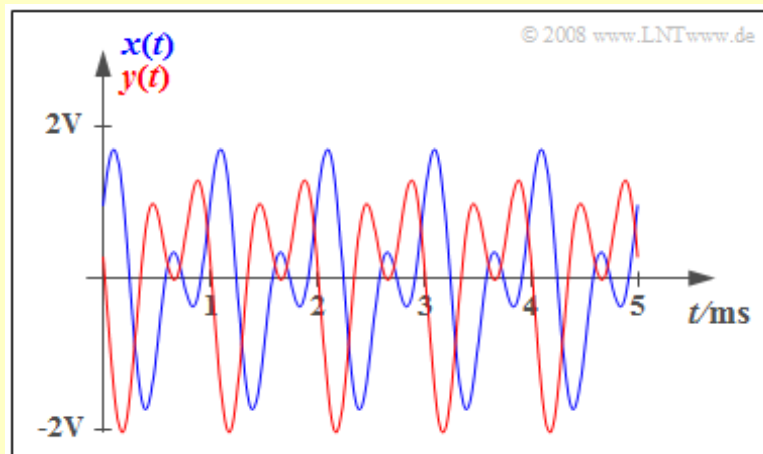
darstellbar und gilt gleichzeitig  $\tau_1 \neq \tau_2$ , so liegen **ausschließlich Phasenverzerrungen** vor. Die beiden Phasenlaufzeiten  $\tau_1 \neq \tau_2$  können aus dem Phasenverlauf in Radian ermittelt werden:

$$\tau_1 = \frac{b(f_1)}{2\pi f_1}, \quad \tau_2 = \frac{b(f_2)}{2\pi f_2}.$$

**Beispiel:** Die Grafik zeigt als blauen Kurvenverlauf das mit der Periodendauer  $T_0$  periodische Signal

$$x(t) = 1 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 1 \text{ kHz} \cdot t) + 1 \text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot 2 \text{ kHz} \cdot t)$$

sowie das mit den Laufzeiten  $\tau_1 = 0.7 \text{ ms}$  und  $\tau_2 = 0.3 \text{ ms}$  phasenverzerrte Signal (rote Kurve). Man erkennt deutlich die Auswirkungen der Phasenverzerrungen.



Mit  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  ergäbe sich das verzerrungsfreie Signal  $y(t) = x(t - \tau)$ .

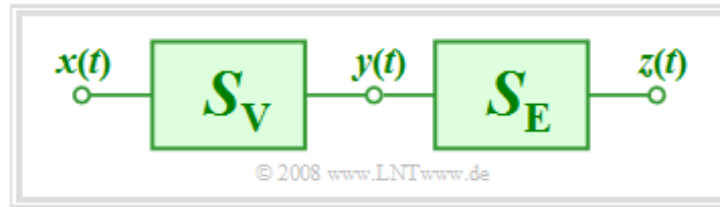
Mit dem folgenden Berechnungstool können auch die Phasenverzerrungen visualisiert werden.

### Lineare Verzerrungen periodischer Signale

Nähere Informationen finden Sie in der Animation selbst unter dem Menüpunkt „Erläuterung“.

## Entzerrungsverfahren

Dieses für die Nachrichtentechnik sehr wichtige Verfahren soll hier nur kurz angerissen werden. Nähere Informationen hierzu finden Sie in den Büchern „Modulationsverfahren“ und „Digitalsignalübertragung“. Wir gehen für diese Kurzbeschreibung von folgender Konstellation aus:



Hierbei ist  $S_V$  ein verzerrendes System, während  $S_E$  der Entzerrung dient. Es ist zu vermerken:

- Ist die Verzerrung von nichtlinearer Art, so muss auch die Entzerrung nichtlinear erfolgen.
- Aber auch bei linearen Verzerrungen werden nichtlineare Entzerrungsverfahren eingesetzt, zum Beispiel *Decision Feedback Equalization* bei Digitalsystemen. Der Vorteil gegenüber linearer Entzerrung ist, dass es nicht zu einer Erhöhung der Rauschleistung kommt.
- Ist  $S_V$  ein lineares System mit Frequenzgang  $H_V(f)$ , so können mit dem *inversen Frequenzgang*  $H_E(f) = 1/H_V(f)$  die Verzerrungen vollständig eliminiert werden, und es gilt  $z(t) = x(t)$ .
- Voraussetzung hierfür ist aber, dass der Frequenzgang  $H_V(f)$  im interessierenden Spektralbereich *keine Nullstellen* besitzt, da sonst bei  $H_E(f)$  Unendlichkeitsstellen erforderlich wären.
- Bei *Analogsystemen* bedeutet eine vollständige Entzerrung, dass sich  $z(t)$  von  $x(t)$  nur durch die unvermeidbaren Rauschanteile unterscheidet, und eventuell durch eine Laufzeit.
- Bei *Digitalsystemen* ist das Kriterium für eine vollständige Entzerrung weniger streng. Es muss in diesem Fall nur sichergestellt werden, dass die Signale  $x(t)$  und  $z(t)$  zu den Detektionszeitpunkten übereinstimmen. Man spricht in diesem Zusammenhang von **Nyquistsystemen**.