

## Überblick zu Kapitel 3 des Buches „LZI–Systeme“

In den beiden ersten Kapiteln wurden aus Darstellungsgründen meist Filterfunktionen mit reellwertigen Frequenzgängen betrachtet, so dass die dazugehörige Zeitfunktion symmetrisch zum Nullzeitpunkt ist. Die Impulsantwort eines realisierbaren Systems muss aber stets **kausal** sein, das heißt, es muss  $h(t)$  für  $t < 0$  identisch Null sein. Diese starke Asymmetrie der Zeitfunktion  $h(t)$  bedeutet aber gleichzeitig, dass der Frequenzgang  $H(f)$  eines realisierbaren Systems stets komplex ist, wobei zwischen dem Realteil und dem Imaginärteil von  $H(f)$  ein fester Zusammenhang besteht.

Dieses dritte Kapitel bringt eine zusammenfassende Darstellung der Beschreibung kausaler realisierbarer Systeme, die sich auch von den mathematischen Methoden her von den bei akausalen Systemen üblichen Verfahren unterscheiden. Im einzelnen wird nachfolgend behandelt:

- die *Hilbert–Transformation*, die aussagt, wie Real– und Imaginärteil von  $H(f)$  zusammenhängen,
- die *Laplace–Transformation*, die bei kausalem  $h(t)$  eine weitere Spektralfunktion  $H_L(p)$  liefert,
- die Beschreibung realisierbarer Systeme durch das *Pol–Nullstellen–Diagramm*, sowie
- die *Laplace–Rücktransformation* unter Anwendung der Funktionentheorie (Residuensatz).

Die theoretischen Grundlagen sind auf 23 Seiten mit Gleichungen, Beispielen und 37 Bildern verdeutlicht. Zudem beinhaltet dieses Kapitel noch sieben Aufgaben und sieben Zusatzaufgaben mit 64 Teilaufgaben. Im folgenden Interaktionsmodul ist die gesamte Thematik dieses Kapitels zusammenhängend dargestellt:

### Kausale Systeme – Laplacetransformation

Daneben empfehlen wir auch das Lernvideo:

**Rechnen mit komplexen Zahlen** (Dauer 11:52)

Literatur: [Doe67] – [Doe70] – [Fli91] – [Föl77] – [Fri85] – [GRS03] – [Hof85] – [KJ02] – [Mar94] – [Mil00] – [Schü91a] – [Schü91b] – [Unb90] – [Vie82]

## Voraussetzungen für Kapitel 3

In den beiden ersten Kapiteln wurden meist reelle Übertragungsfunktionen  $H(f)$  betrachtet, bei denen demzufolge die zugehörige Impulsantwort  $h(t)$  stets symmetrisch zum Bezugszeitpunkt  $t = 0$  war. Solche Übertragungsfunktionen

- eignen sich, um grundlegende Zusammenhänge einfach zu erklären,
- sind aber leider aus Kausalitätsgründen nicht realisierbar.

Dies wird deutlich, wenn man sich die Definition der Impulsantwort betrachtet:

**Definition:** Die **Impulsantwort**  $h(t)$  ist gleich dem Ausgangssignal  $y(t)$  des Systems, wenn am Eingang zum Zeitpunkt  $t = 0$  ein unendlich kurzer Impuls mit unendlich großer Amplitude anliegt:  $x(t) = \delta(t)$ . Man bezeichnet einen solchen Impuls als **Diracimpuls**.

Es ist offensichtlich, dass keine Impulsantwort realisiert werden kann, für die  $h(t < 0) \neq 0$  gilt.

**Definition:** Bei einem **kausalen System** ist die Impulsantwort  $h(t)$  für alle Zeiten  $t < 0$  identisch 0.

Die einzige reelle Übertragungsfunktion, die der Kausalitätsbedingung „Das Ausgangssignal kann nicht vor dem Eingangssignal beginnen“ genügt, lautet:

$$H(f) = 1 \quad \bullet \text{---} \circ \quad h(t) = \delta(t).$$

Alle anderen reellwertigen Übertragungsfunktionen  $H(f)$  beschreiben akausale Systeme und sind somit durch ein (elektrisches) Schaltungsnetzwerk nicht zu realisieren. **In anderen Worten:** Außer der idealen Übertragungsfunktion  $H(f) = 1$  ist jede realistische Übertragungsfunktion komplex.

## Real- und Imaginärteil einer kausalen Übertragungsfunktion (1)

Eine jede kausale Impulsantwort  $h(t)$  kann als Summe eines geraden Anteils  $h_g(t)$  und eines ungeraden Anteils  $h_u(t)$  dargestellt werden, wobei gilt:

$$h_g(t) = \frac{1}{2} \cdot [h(t) + h(-t)] ,$$

$$h_u(t) = \frac{1}{2} \cdot [h(t) - h(-t)] = h_g(t) \cdot \text{sign}(t) .$$

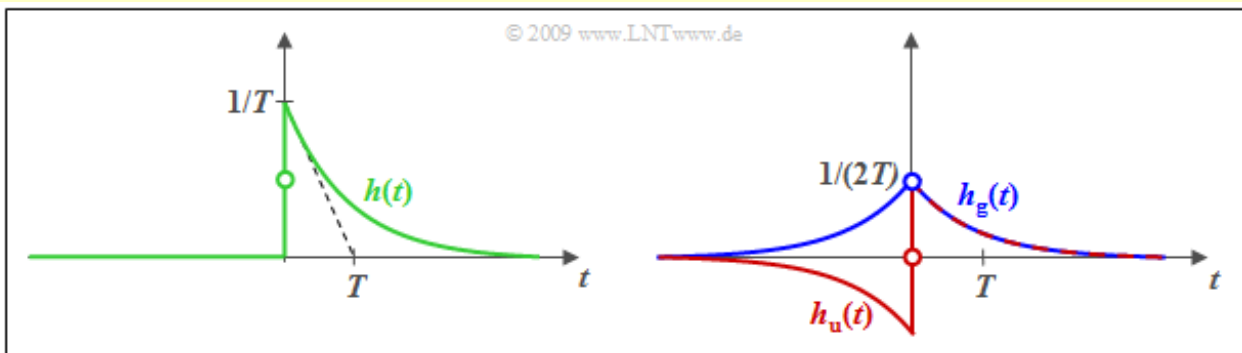
Hierbei ist die sogenannte **Signum-Funktion** verwendet:

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0, \\ +1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

**Beispiel:** Die Grafik zeigt diese Aufspaltung für eine kausale exponentiell abfallende Impulsantwort

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ 0.5/T & \text{für } t = 0, \\ 1/T \cdot e^{-t/T} & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

eines Tiefpasses erster Ordnung entsprechend **Aufgabe Z1.3.**



Man erkennt:

- Für positive Zeiten gilt  $h_g(t) = h_u(t) = h(t)/2$ .
- Für negative Zeiten unterscheiden sich  $h_g(t)$  und  $h_u(t)$  nur durch das Vorzeichen.
- Für alle Zeiten gilt  $h(t) = h_g(t) + h_u(t)$ , auch zum Zeitpunkt  $t = 0$  (durch Kreise markiert).

## Real- und Imaginärteil einer kausalen Übertragungsfunktion (2)

Betrachten wir nun den gleichen Sachverhalt im Spektralbereich. Nach dem **Zuordnungssatz** gilt für die komplexe Übertragungsfunktion:

$$H(f) = \operatorname{Re}\{H(f)\} + j \cdot \operatorname{Im}\{H(f)\},$$

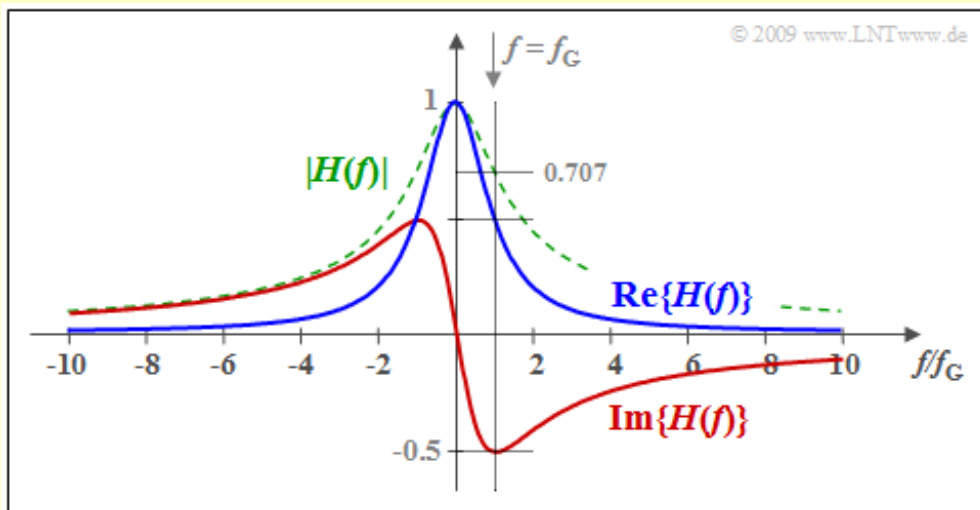
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{H(f)\} &\bullet\text{---}\circ h_g(t), \\ j \cdot \operatorname{Im}\{H(f)\} &\bullet\text{---}\circ h_u(t). \end{aligned}$$

Zunächst soll an einem Beispiel der Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil des Frequenzgangs  $H(f)$  herausgearbeitet werden.

**Beispiel:** Wir gehen wieder von einem Tiefpass erster Ordnung aus:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j \cdot f/f_G} = \frac{1}{1 + (f/f_G)^2} - j \cdot \frac{f/f_G}{1 + (f/f_G)^2}.$$

Hierbei gibt  $f_G$  die 3dB-Grenzfrequenz an, bei der  $|H(f)|^2$  auf die Hälfte seines Maximums (bei  $f = 0$ ) abgesunken ist. Die dazugehörige **Impulsantwort**  $h(t)$  wurde bereits auf der letzten Seite dargestellt, wobei  $f_G = 1/(2\pi T)$  zu setzen ist.



Die Grafik zeigt den Realteil (blau) und den Imaginärteil (rot) von  $H(f)$ . Zusätzlich ist grün-gestrichelt der Betrag dargestellt. Nachdem die beiden Zeitfunktionen  $h_g(t)$  und  $h_u(t)$  über die Signumfunktion zusammenhängen, sind auch  $\operatorname{Re}\{H(f)\}$  und  $\operatorname{Im}\{H(f)\}$  fest miteinander verknüpft. Der Zusammenhang ist dabei durch die Hilbert-Transformation gegeben, die nachfolgend beschrieben wird.

## Hilbert–Transformation

Wir betrachten hier ganz allgemein zwei Zeitfunktionen  $u(t)$  und  $w(t) = \text{sign}(t) \cdot u(t)$ . Die dazugehörigen Spektralfunktionen sind  $U(f)$  und  $j \cdot W(f)$ . Mit der Fourierkorrespondenz

$$\text{sign}(t) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{1}{j\pi f}$$

erhält man nach Ausschreiben des **Faltungsintegrals** mit der Integrationsvariablen  $\nu$ :

$$j \cdot W(f) = \frac{1}{j\pi f} \star U(f) \quad \Rightarrow \quad W(f) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\nu)}{f - \nu} d\nu.$$

Da aber gleichzeitig auch  $u(t) = \text{sign}(t) \cdot w(t)$  zutrifft, gilt in gleicher Weise:

$$U(f) = \frac{1}{j\pi f} \star j \cdot W(f) \quad \Rightarrow \quad U(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(\nu)}{f - \nu} d\nu.$$

Man benennt diese *Integraltransformation* nach ihrem Entdecker **David Hilbert**. Beide Varianten der **Hilbert–Transformation** werden im weiteren Verlauf mit folgenden Kurzzeichen gekennzeichnet:

$$W(f) \quad \bullet \longrightarrow \quad U(f) \quad \text{bzw.} \quad W(f) = \mathcal{H}\{U(f)\}.$$

Zur Berechnung des durch die Pfeilspitze markierten Spektrums – hier  $U(f)$  – wird von den beiden ansonsten identischen Gleichungen diejenige mit positivem Vorzeichen genommen. Das durch den Kreis markierte Spektrum – hier  $W(f)$  – ergibt sich dagegen aus der Gleichung mit negativem Vorzeichen.

Bei doppelter Anwendung der Hilbert–Transformation erhält man wieder die ursprüngliche Funktion mit Vorzeichenwechsel, bei vierfacher Anwendung die ursprüngliche Funktion inklusive dem Vorzeichen:

$$\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{U(f)\}\} = -U(f), \quad \mathcal{H}\{\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{U(f)\}\}\}\} = U(f).$$

**Beispiel:** In [Mar94] findet man die folgende Hilbert–Korrespondenz:

$$\frac{1}{1+x^2} \quad \bullet \longrightarrow \quad \frac{x}{1+x^2}.$$

Hierbei steht  $x$  stellvertretend für eine geeignet normierte Zeit– oder Frequenzvariable. Benutzen wir beispielsweise  $x = f/f_G$  als normierte Frequenzvariable, so erhält man daraus die Korrespondenz:

$$\frac{1}{1+(f/f_G)^2} \quad \bullet \longrightarrow \quad \frac{f/f_G}{1+(f/f_G)^2}.$$

Ausgehend von der Gleichung

$$\text{Im}\{H(f)\} \quad \bullet \longrightarrow \quad \text{Re}\{H(f)\}$$

wird somit das auf der letzten Seite gefundene Ergebnis bestätigt:

$$\text{Im}\{H(f)\} = \frac{-f/f_G}{1+(f/f_G)^2}.$$

## Einige Paare von Hilbert–Korrespondenzen

Zur Herleitung von Hilbert–Korrespondenzen geht man sehr pragmatisch vor, nämlich wie folgt:

- Man berechnet die **Laplace–Transformierte**  $Y_L(p)$  einer Zeitfunktion  $y(t)$ , wie im Kapitel 3.2 beschrieben. Diese ist somit bereits implizit kausal.
- Anschließend wandelt man die Spektralfunktion  $Y_L(p)$  in das zugehörige Fourierspektrum  $Y(f)$  um und spaltet dieses in Real– und Imaginärteil auf. Dazu ersetzt man  $p$  durch  $j2\pi f$ .
- $\text{Re}\{Y(f)\}$  und  $\text{Im}\{Y(f)\}$  sind somit ein Paar von Hilbert–Transformierten.
- Man ersetzt die Frequenzvariable  $f$  durch  $x$  sowie  $\text{Re}\{Y(f)\} \Rightarrow g(x)$  bzw.  $\text{Im}\{Y(f)\} \Rightarrow H\{g(x)\}$ .
- Die neue Variable  $x$  kann sowohl eine geeignet normierte Frequenz oder auch eine normierte Zeit beschreiben. Somit ist die Hilbert–Transformation auf verschiedene Probleme anwendbar.

$g(x)$	$H\{g(x)\}$	$g(x)$	$H\{g(x)\}$
Konstante $K$	0	$\text{si}^2(x/2)$	$2 \cdot \frac{x - \sin(x)}{x^2}$
Dirac $\delta(x)$	$\frac{1}{\pi \cdot x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{x}{1+x^2}$
Rechteck $\text{rect}(x/x_0)$	$\frac{1}{\pi} \cdot \ln \left  \frac{x+x_0/2}{x-x_0/2} \right $	$\frac{1}{x} \cdot \arctan \frac{x}{x_0}$	$\frac{1}{x} \cdot \ln \left  \sqrt{1+(x/x_0)^2} \right $
Cosinus $\cos(x)$	$\sin(x)$	$\delta(x-x_0) + \delta(x+x_0)$	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{x^2-x_0^2}$
Spaltfunktion $\text{si}(x)$	$2 \cdot \frac{\sin^2(x/2)}{x}$	$\delta(x-x_0) - \delta(x+x_0)$	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{x_0^2-x^2}$

© 2009 www.LNTwww.de

Die Tabelle zeigt einige solcher Hilbertpaare. Auf die Vorzeichen wurde verzichtet, so dass beide Richtungen gültig sind. Gilt beispielsweise  $H\{g(x)\} = f(x)$ , so folgt daraus auch  $H\{f(x)\} = -g(x)$ :

$$\mathcal{H}\{\cos(x)\} = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}\{\sin(x)\} = -\cos(x).$$

## Dämpfung und Phase von Minimum-Phasen-Systemen

Eine wichtige Anwendung der Hilbert-Transformation stellt der Zusammenhang zwischen Dämpfung und Phase bei den sogenannten **Minimum-Phasen-Systemen** dar. Im Vorgriff auf das **Kapitel 3.2** sei erwähnt, dass diese Systeme in der rechten  $p$ -Halbebene weder Pole noch Nullstellen aufweisen dürfen.

Allgemein gilt für die Übertragungsfunktion  $H(f)$  mit dem komplexen Übertragungsmaß  $g(f)$  sowie der Dämpfungsfunktion  $a(f)$  und der Phasenfunktion  $b(f)$ :

$$H(f) = e^{-g(f)} = e^{-a(f) - j \cdot b(f)} \Rightarrow g(f) = a(f) + j \cdot b(f).$$

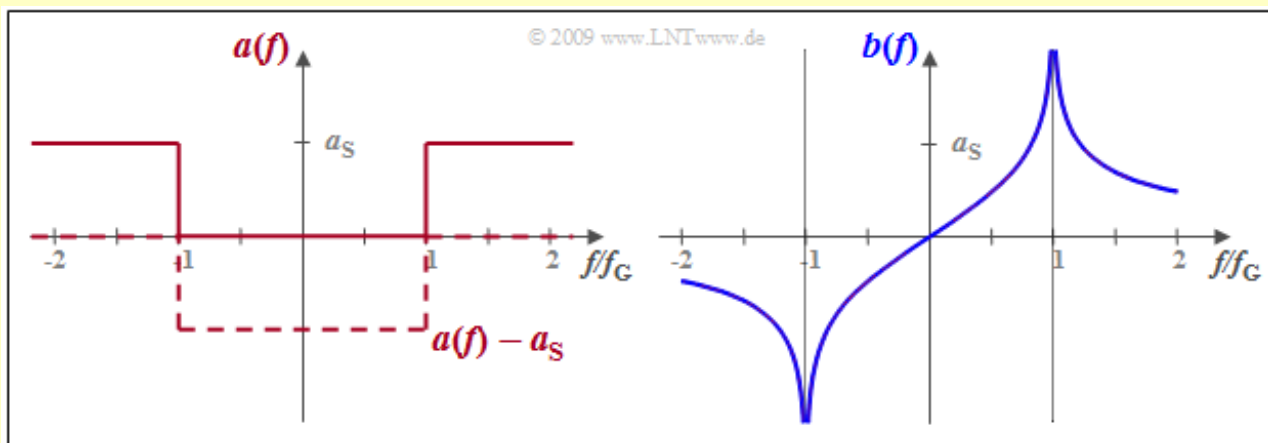
Bei den Minimum-Phasen-Systemen gilt nun aber nicht nur wie bei allen realisierbaren Systemen die Hilbert-Transformation bezüglich Imaginär- und Realteil,

$$\text{Im} \{H(f)\} \bullet \longrightarrow \text{Re} \{H(f)\},$$

sondern zusätzlich auch noch die Hilbert-Korrespondenz zwischen Phasen- und Dämpfungsfunktion:

$$b(f) \bullet \longrightarrow a(f).$$

**Beispiel:** Ein Tiefpass besitze im Durchlassbereich, also für  $|f| < f_G$ , den Frequenzgang  $H(f) = 1 \Rightarrow a(f) = 0 \text{ Np}$ , während für größere Frequenzen die Dämpfungsfunktion  $a(f)$  den konstanten Wert  $a_S$  (in Neper) besitzt. In diesem Sperrbereich ist  $H(f) = \exp(-a_S)$  zwar sehr klein, aber nicht 0.



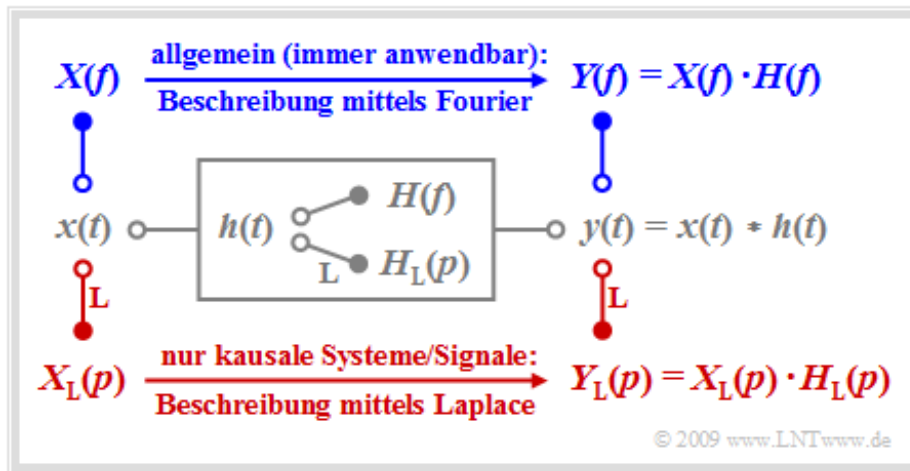
Soll der Tiefpass kausal und damit realisierbar sein, so muss die Phasenfunktion  $b(f)$  gleich der Hilbert-Transformierten der Dämpfung  $a(f)$  sein. Da die Hilbert-Transformierte einer Konstanten 0 ist, kann in gleicher Weise von der Funktion  $a(f) - a_S$  ausgegangen werden. Diese in der Grafik gestrichelt eingezeichnete Funktion ist zwischen  $\pm f_G$  (negativ) rechteckförmig. Entsprechend der **Tabelle** auf der letzten Seite gilt deshalb:

$$b(f) = \frac{a_S}{\pi} \cdot \ln \left| \frac{f + f_G}{f - f_G} \right|.$$

Jeder andere Phasenverlauf würde dagegen zu einer akasualen Impulsantwort führen.

## Betrachtetes Systemmodell

Wir betrachten ein lineares zeitinvariantes System mit der Impulsantwort  $h(t)$ , an dessen Eingang das Signal  $x(t)$  anliegt. Das Ausgangssignal  $y(t)$  ergibt sich dann als das Faltungsprodukt  $x(t) * h(t)$ .



Bei akausalen Systemen und Signalen muss zur Beschreibung des Spektralverhaltens stets das erste **Fourierintegral** angewendet werden, und es gilt für das Ausgangsspektrum:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f).$$

Das Fourierintegral besitzt auch für kausale Systeme und Signale, also unter der Voraussetzung

$$x(t) = 0 \text{ für } t < 0, \quad h(t) = 0 \text{ für } t < 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0 \text{ für } t < 0$$

weiterhin Gültigkeit. In diesem Fall ergeben sich aber durch Anwendung der Laplace-Transformation unter Beachtung gewisser Restriktionen wesentliche Vorteile:

- Die so behandelten Systeme sind stets durch eine Schaltung realisierbar. Der Entwickler kommt nicht in Versuchung, realitätsfremde Lösungen anzubieten.
- Die Laplace-Transformierte  $X_L(p)$  ist stets eine reelle Funktion der Spektralvariablen  $p$ . Dass sich diese Variable entsprechend  $p = j \cdot 2\pi f$  aus der Multiplikation der physikalischen Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  mit der imaginären Einheit  $j$  ergibt, spielt für den Anwender keine Rolle.
- Die implizite Bedingung  $x(t) = 0$  für  $t < 0$  erlaubt speziell die Analyse des Einschwingverhaltens nach Einschaltvorgängen in einfacherer Weise als mit dem Fourierintegral.



## Definition der Laplace-Transformation

Ausgehend vom **ersten Fourierintegral**

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j 2\pi f t} dt$$

ergibt sich bei einer kausalen Zeitfunktion (wenn also gilt:  $x(t) = 0$  für  $t < 0$ ) mit der formalen Substitution  $p = j \cdot 2\pi f$  direkt die Laplace-Transformation.

**Definition:** Die **Laplace-Transformierte** einer kausalen Zeitfunktion  $x(t)$  lautet:

$$X_L(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad \text{kurz } X_L(p) \stackrel{\text{L}}{\circ} x(t).$$

Der Zusammenhang zwischen der Laplace-Transformierten  $X_L(p)$  und dem physikalischen Spektrum  $X(f)$  ist häufig wie folgt gegeben:

$$X(f) = X_L(p) \Big|_{p = j 2\pi f}.$$

Beinhaltet allerdings das Signal  $x(t)$  periodische Anteile und damit die Spektralfunktion  $X(f)$  zusätzliche Diracfunktionen, so ist diese Gleichung nicht anwendbar. In diesem Fall muss  $p = \alpha + j \cdot 2\pi f$  angesetzt werden und es ist dann der Grenzübergang  $\alpha \rightarrow 0$  zu bilden.

**Beispiel:** Wir gehen von der einseitig exponentiell abfallenden Zeitfunktion – **Skizze** – aus:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ 0.5 & \text{für } t = 0, \\ e^{-t/T} & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Damit lautet die Laplace-Transformierte:

$$X_L(p) = \int_0^{\infty} e^{-t/T} dt = \frac{1}{p + 1/T} \cdot e^{-(p+1/T) \cdot t} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{p + 1/T}.$$

Mit  $p = j \cdot 2\pi f$  erhält man die herkömmliche Spektralfunktion bezüglich  $f$ :

$$X(f) = \frac{1}{j \cdot 2\pi f + 1/T} = \frac{T}{1 + j \cdot 2\pi f T}.$$

Betrachtet man dagegen den Frequenzgang eines Tiefpasses erster Ordnung, dessen Impulsantwort  $h(t)$  sich gegenüber der obigen Zeitfunktion um den Faktor  $1/T$  unterscheidet, so gilt für die Laplace-Transformierte bzw. die Fourier-Transformierte:

$$H_L(p) = \frac{1/T}{p + 1/T} = \frac{1}{1 + p \cdot T}, \quad H(f) = \frac{1}{1 + j \cdot 2\pi f T}.$$

Häufig verwendet man dann anstelle des Parameters  $T$  die 3dB-Grenzfrequenz  $f_G = 1/(2\pi T)$ .

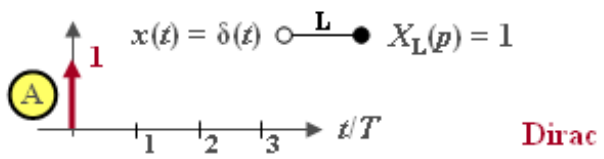
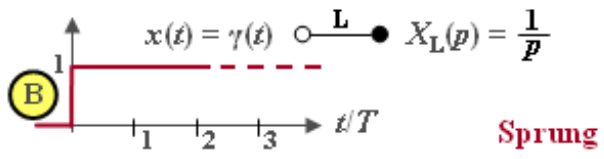
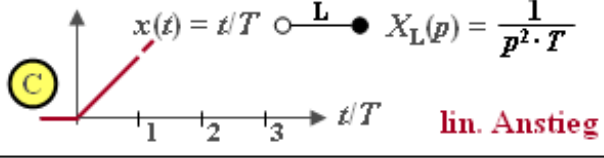
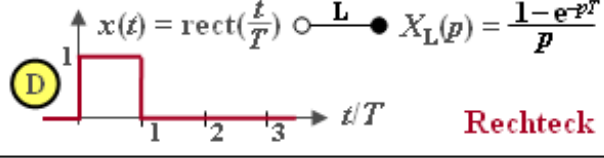
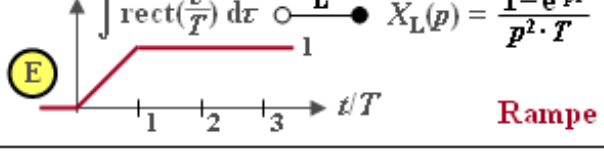
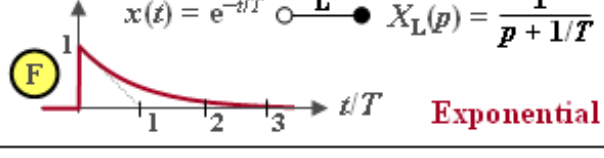
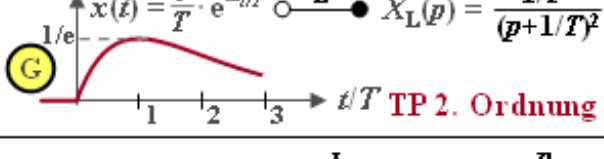
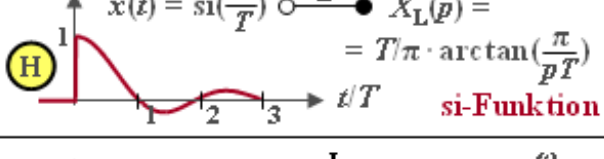
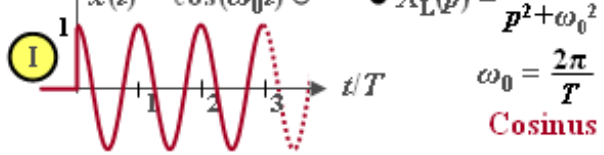
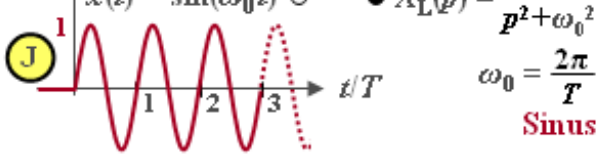
## Einige wichtige Laplace-Korrespondenzen

Unten sind einige wichtige Laplace-Korrespondenzen zusammengestellt. Die Laplace-Transformierte der Diracfunktion  $\delta(t)$  ist  $X_L(p) = 1$  (Diagramm A). Durch Anwendung des **Integrationsatzes** erhält man für die Sprungfunktion  $X_L(p) = 1/p$  (Diagramm B) und aus dieser durch Multiplikation mit  $1/(pT)$  die Laplace-Transformierte der linear ansteigenden Funktion  $x(t) = t/T$  für  $t > 0$  (Diagramm C).

Die Rechteckfunktion kann aus der Subtraktion zweier um  $T$  auseinanderliegender Sprungfunktionen  $\gamma(t)$  und  $\gamma(t - T)$  erzeugt werden, so dass sich nach dem **Verschiebungssatz** die Laplace-Transformierte  $X_L(p) = (1 - e^{-pT})/p$  ergibt (Diagramm D). Durch Integration erhält man daraus die Rampenfunktion bzw. nach Multiplikation mit  $1/(pT)$  deren Laplace-Transformierte (Diagramm E).

Die Exponentialfunktion (Diagramm F) wurde bereits auf der letzten Seite betrachtet. Mit dem Faktor  $1/T$  beschreibt diese gleichzeitig die Impulsantwort eines Tiefpasses erster Ordnung. Durch Quadrierung erhält man die  $p$ -Spektralfunktion eines Tiefpasses zweiter Ordnung. Die zugehörige Zeitfunktion lautet  $x(t) = t/T \cdot e^{-t/T}$  (Diagramm G).

Neben der kausalen si-Funktion (Diagramm H) sind in der Tabelle auch die Laplace-Transformierten der kausalen Cosinus- und Sinusfunktion (Diagramme I und J) angegeben, die sich zu  $p/(p^2 + \omega_0^2)$  bzw.  $\omega_0/(p^2 + \omega_0^2)$  ergeben. Hierbei bezeichnet  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$  die so genannte Kreisfrequenz.

 <p><b>A</b> <math>x(t) = \delta(t) \xrightarrow{L} X_L(p) = 1</math> Dirac</p>	 <p><b>B</b> <math>x(t) = \gamma(t) \xrightarrow{L} X_L(p) = \frac{1}{p}</math> Sprung</p>
 <p><b>C</b> <math>x(t) = t/T \xrightarrow{L} X_L(p) = \frac{1}{p^2 \cdot T}</math> lin. Anstieg</p>	 <p><b>D</b> <math>x(t) = \text{rect}(\frac{t}{T}) \xrightarrow{L} X_L(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}</math> Rechteck</p>
 <p><b>E</b> <math>\int \text{rect}(\frac{t}{T}) dt \xrightarrow{L} X_L(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p^2 \cdot T}</math> Rampe</p>	 <p><b>F</b> <math>x(t) = e^{-t/T} \xrightarrow{L} X_L(p) = \frac{1}{p + 1/T}</math> Exponential</p>
 <p><b>G</b> <math>x(t) = \frac{t}{T} \cdot e^{-t/T} \xrightarrow{L} X_L(p) = \frac{1/T}{(p + 1/T)^2}</math> TP 2. Ordnung</p>	 <p><b>H</b> <math>x(t) = \text{si}(\frac{\pi t}{T}) \xrightarrow{L} X_L(p) = T/\pi \cdot \arctan(\frac{\pi}{pT})</math> si-Funktion</p>
 <p><b>I</b> <math>x(t) = \cos(\omega_0 t) \xrightarrow{L} X_L(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}</math> <math>\omega_0 = \frac{2\pi}{T}</math> Cosinus</p>	 <p><b>J</b> <math>x(t) = \sin(\omega_0 t) \xrightarrow{L} X_L(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}</math> <math>\omega_0 = \frac{2\pi}{T}</math> Sinus</p>

© 2009 www.LNTwww.de

Alle hier betrachteten Zeitsignale  $x(t)$  sind dimensionslos angenommen. Aus diesem Grund besitzt  $X_L(p)$  als das Integral über die Zeit stets die Einheit „Sekunde“.

## Pol-Nullstellen-Darstellung von Schaltungen (1)

Ein jedes lineare zeitinvariante (LZI-) System, das durch eine Schaltung aus diskreten zeitkonstanten Bauelementen wie Widerständen ( $R$ ), Kapazitäten ( $C$ ), Induktivitäten ( $L$ ) und Verstärkerelementen realisiert werden kann, besitzt eine gebrochen-rationale **p-Übertragungsfunktion**:

$$H_L(p) = \frac{A_Z \cdot p^Z + \dots + A_2 \cdot p^2 + A_1 \cdot p + A_0}{B_N \cdot p^N + \dots + B_2 \cdot p^2 + B_1 \cdot p + B_0} = \frac{Z(p)}{N(p)}$$

Alle Koeffizienten  $A_Z, \dots, A_0, B_N, \dots, B_0$  sind reell. Weiter bezeichnen

- $Z$  den Grad des Zählerpolynoms  $Z(p)$ ,
- $N$  den Grad des Nennerpolynoms  $N(p)$ .

Eine äquivalente **Pol-Nullstellen-Darstellung** der obigen Übertragungsfunktion lautet:

$$H_L(p) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^Z p - p_{oi}}{\prod_{i=1}^N p - p_{xi}} = K \cdot \frac{(p - p_{o1})(p - p_{o2}) \cdot \dots \cdot (p - p_{oZ})}{(p - p_{x1})(p - p_{x2}) \cdot \dots \cdot (p - p_{xN})}$$

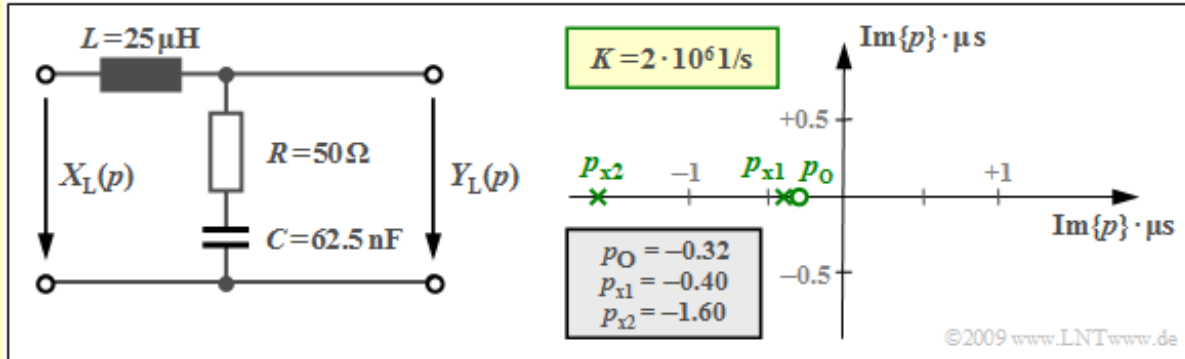
Die  $Z + N + 1$  Parameter bedeuten:

- $K = A_Z/B_N$  ist ein **konstanter Faktor**. Gilt  $Z = N$ , so ist dieser dimensionslos.
- Die Lösungen der Gleichung  $Z(p) = 0$  ergeben die  $Z$  **Nullstellen**  $p_{o1}, \dots, p_{oZ}$  von  $H_L(p)$ .
- Die Nullstellen des Nennerpolynoms  $N(p)$  liefern die  $N$  **Polstellen** (oder kurz Pole).

Die Umformung ist eindeutig. Dies erkennt man daran, dass die obere Übertragungsfunktion ebenfalls nur durch  $Z + N + 1$  freie Parameter bestimmt ist, da einer der Koeffizienten  $A_Z, \dots, A_0, B_N, \dots, B_0$  ohne Änderung des Quotienten auf 1 normiert werden kann.

## Pol-Nullstellen-Darstellung von Schaltungen (2)

**Beispiel:** Wir betrachten den gezeichneten Vierpol mit einer Induktivität  $L$  (komplexer Widerstand  $pL$ ) im Längszweig sowie im Querzweig die Serienschaltung eines Ohmschen Widerstandes  $R$  und einer Kapazität  $C$  mit dem komplexen Widerstand  $1/(pC)$ .



Damit lautet die  $p$ -Übertragungsfunktion:

$$H_L(p) = \frac{Y_L(p)}{X_L(p)} = \frac{R + 1/(pC)}{pL + R + 1/(pC)} = \frac{1 + p \cdot RC}{1 + p \cdot RC + p^2 \cdot LC}$$

Setzt man  $p = j \cdot 2\pi f$  ein, so erhält man die Fourier-Übertragungsfunktion (bzw. den Frequenzgang).  
 Dividiert man in obiger Gleichung Zähler und Nenner durch  $LC$ , so ergibt sich:

$$H_L(p) = \frac{R}{L} \cdot \frac{p + 1/(RC)}{p^2 + R/L \cdot p + 1/(LC)} = K \cdot \frac{p - p_o}{(p - p_{x1})(p - p_{x2})}$$

Im rechten Gleichungsteil ist die Übertragungsfunktion  $H_L(p)$  in Pol-Nullstellen-Notation angegeben.  
 Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich für  $R = 50 \Omega$ ,  $L = 25 \mu\text{H}$  und  $C = 62.5 \text{ nF}$  folgende Werte:

- die Konstante  $K = R/L = 2 \cdot 10^6 \text{ 1/s}$ ,
- die Nullstelle  $p_o = -1/(RC) = -0.32 \cdot 10^6 \text{ 1/s}$ ,
- die beiden Pole  $p_{x1}$  und  $p_{x2}$  als Lösung der Gleichung

$$p^2 + \frac{R}{L} \cdot p + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow p_{x1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$\Rightarrow p_{x1,2} = -10^6 \frac{1}{s} \pm \sqrt{10^{12} \frac{1}{s^2} - 0.64 \cdot 10^{12} \frac{1}{s^2}}$$

$$\Rightarrow p_{x1} = -0.4 \cdot 10^6 \text{ 1/s}, \quad p_{x2} = -1.6 \cdot 10^6 \text{ 1/s}.$$

In der obigen Grafik ist rechts das Pol-Nullstellen-Diagramm angegeben. Die Achsen  $1/\mu\text{s}$  bezeichnen den Real- und Imaginärteil der Variablen  $p$ , jeweils normiert auf den Wert  $10^6 \cdot 1/\text{s}$  ( $= 1/\mu\text{s}$ ). Man erkennt nach dieser Normierung die Nullstelle bei  $p_o = -0.32$  als Kreis und die beiden Polstellen bei  $p_{x1} = -0.4$  und  $p_{x2} = -1.6$  als Kreuze.

## Eigenschaften der Pole und Nullstellen (1)

Die Übertragungsfunktion  $H_L(p)$  einer jeden realisierbaren Schaltung wird durch  $Z$  Nullstellen und  $N$  Pole zusammen mit einer Konstanten  $K$  vollständig beschrieben, wobei folgende Einschränkungen gelten:

- Es gilt stets  $Z \leq N$ . Mit  $Z > N$  würde sich im Grenzfall für  $p \rightarrow \infty$  (also für sehr hohe Frequenzen) auch eine unendlich große  $p$ -Übertragungsfunktion ergeben.
- Die Nullstellen  $p_{oi}$  und die Pole  $p_{xi}$  sind im allgemeinen komplex und weisen wie  $p$  die Einheit  $1/s$  auf. Gilt  $Z < N$ , so besitzt auch die Konstante  $K$  eine Einheit.
- Die Pole und Nullstellen können reell sein, wie im letzten Beispiel gezeigt. Sind sie komplex, so treten immer zwei konjugiert-komplexe Polstellen bzw. zwei konjugiert-komplexe Nullstellen auf, da  $H_L(p)$  stets eine reelle gebrochen-rationale Funktion darstellt.
- Alle Pole liegen in der linken Halbebene oder – als Grenzfall – auf der imaginären Achse. Diese Eigenschaft ergibt sich aus der erforderlichen und vorausgesetzten Kausalität zusammen mit dem **Hauptsatz der Funktionstheorie**, der in Kapitel 3.3 angegeben wird.
- Nullstellen können sowohl in der linken als auch in der rechten  $p$ -Halbebene auftreten oder auch auf der imaginären Achse. Ein Beispiel für Nullstellen in der rechten Halbebene findet man in der **Aufgabe Z3.4**, die sich mit Alpässen beschäftigt.
- Bei den so genannten **Minimum-Phasen-Systemen** sind in der rechten  $p$ -Halbebene nicht nur Pole verboten, sondern auch Nullstellen. Der Realteil aller Singularitäten ist hier nie positiv.

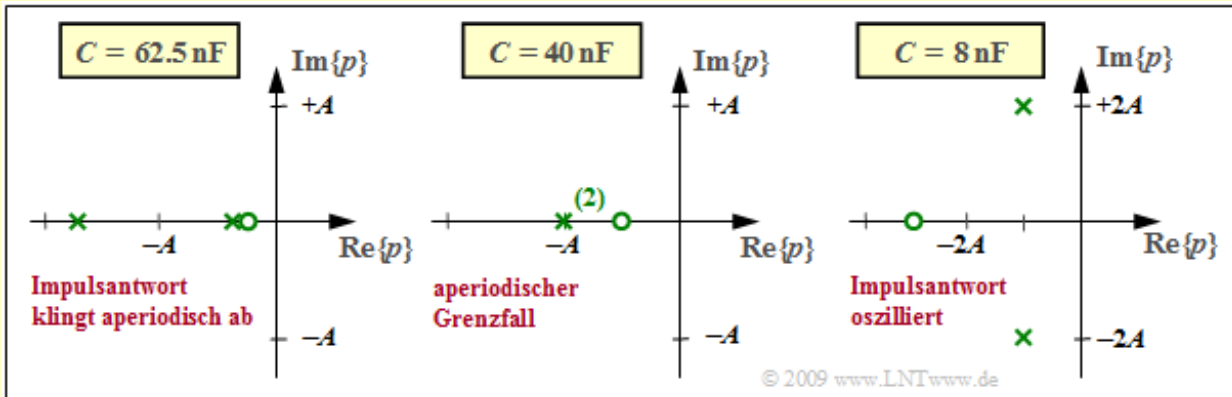
Auf der nächsten Seite werden diese Eigenschaften an drei Beispielen verdeutlicht.

## Eigenschaften der Pole und Nullstellen (2)

**Beispiel:** Ausgehend vom Vierpol auf der letzten Seite ( $L$  im Längszweig,  $R$  und  $C$  im Querzweig) können die charakteristischen Größen der Übertragungsfunktion wie folgt angegeben werden:

$$K = 2A, \quad p_{x1,2} = -A \pm \sqrt{A^2 - B^2}, \quad p_o = -\frac{B^2}{2A} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{R}{2L}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Die in der Grafik genannten Kapazitätswerte  $C$  gelten für  $R = 50 \, \Omega$  und  $L = 25 \, \mu\text{H}$ . Die Achsen sind auf die Variable  $A = R/(2L) = 10^6 \cdot 1/\text{s}$  normiert, und es gilt  $K = 2A = 2 \cdot 10^6 \cdot 1/\text{s}$ .



Die Grafik zeigt drei verschiedene Diagramme. Der konstante Faktor ist jeweils  $K = 2 \cdot 10^6 \cdot 1/\text{s}$ :

- Für  $B < A$  erhält man **zwei reelle Pole** und eine Nullstelle rechts von  $-A/2$ . Beispielsweise ergibt sich für  $C = 62.5 \, \text{nF}$  entsprechend dem linken Diagramm:

$$B/A = 0.8 \quad \Rightarrow \quad p_{x1}/A = -0.4, \quad p_{x2}/A = -1.6, \quad p_o/A = -0.32.$$

- Für  $B > A$  ergeben sich **zwei konjugiert-komplexe Pole** und eine Nullstelle links von  $-A/2$ , zum Beispiel gemäß dem rechten Diagramm für  $C = 8 \, \text{nF}$ :

$$B/A = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad p_{x1,2}/A = -1 \pm j \cdot 2, \quad p_o/A \approx -2.5.$$

- Der Grenzfall  $A = B$  führt zu **einer reellen doppelten Polstelle** und einer Nullstelle bei  $-A/2$  (siehe mittleres Diagramm, gültig für  $C = 40 \, \text{nF}$ ):

$$B/A = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{x1}/A = p_{x2}/A = -1, \quad p_o/A = -0.5.$$

Die Impulsantworten sind entsprechend dem **Kapitel 3.3**

- aperiodisch abklingend (linkes Diagramm),
- oszillierend (rechtes Diagramm), oder
- man spricht vom aperiodischen Grenzfall (mittleres Diagramm).

## Grafische Ermittlung von Dämpfung und Phase (1)

Gegeben sei die  $p$ -Übertragungsfunktion in der Pol-Nullstellen-Notation:

$$H_L(p) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^Z (p - p_{oi})}{\prod_{i=1}^N (p - p_{xi})} = K \cdot \frac{(p - p_{o1})(p - p_{o2}) \cdot \dots \cdot (p - p_{oZ})}{(p - p_{x1})(p - p_{x2}) \cdot \dots \cdot (p - p_{xN})}$$

Zur herkömmlichen Übertragungsfunktion bzw. zum Frequenzgang  $H(f)$  kommt man, indem man das Argument  $p$  der Funktion  $H_L(p)$  durch  $j \cdot 2\pi f$  ersetzt:

$$H(f) = K \cdot \frac{(j \cdot 2\pi f - p_{o1})(j \cdot 2\pi f - p_{o2}) \cdot \dots \cdot (j \cdot 2\pi f - p_{oZ})}{(j \cdot 2\pi f - p_{x1})(j \cdot 2\pi f - p_{x2}) \cdot \dots \cdot (j \cdot 2\pi f - p_{xN})}$$

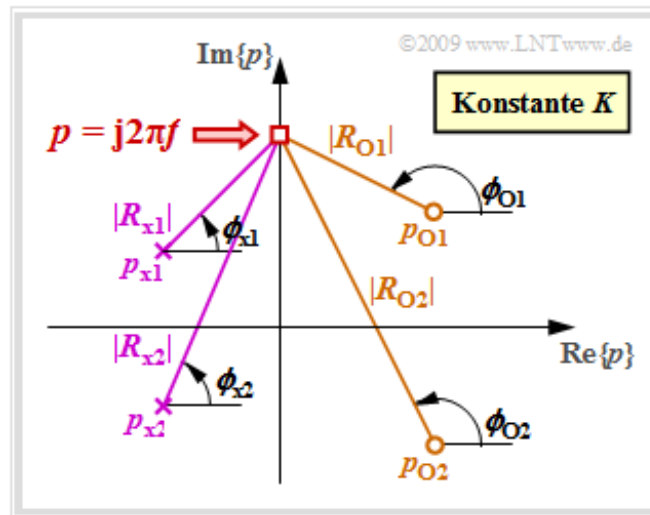
Wir betrachten nun eine feste Frequenz  $f$  und beschreiben die Abstände und Winkel aller Nullstellen durch Vektoren:

$$R_{oi} = j \cdot 2\pi f - p_{oi} = |R_{oi}| \cdot \exp(j \cdot \phi_{oi}), \quad i = 1, \dots, Z.$$

In gleicher Weise gehen wir für die Polstellen vor:

$$R_{xi} = j \cdot 2\pi f - p_{xi} = |R_{xi}| \cdot \exp(j \cdot \phi_{xi}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Die nachfolgende Grafik zeigt die Beträge und Phasenwinkel für ein System mit  $Z = 2$  Nullstellen in der rechten Halbebene und  $N = 2$  Polstellen in der linken Halbebene. Zu berücksichtigen ist zudem die Konstante  $K$ .



Mit dieser Vektordarstellung kann für den Frequenzgang geschrieben werden:

$$H(f) = K \cdot \frac{|R_{o1}| \cdot |R_{o2}| \cdot \dots \cdot |R_{oZ}|}{|R_{x1}| \cdot |R_{x2}| \cdot \dots \cdot |R_{xN}|} \cdot e^{j \cdot [\phi_{o1} + \phi_{o2} + \dots + \phi_{oZ} - \phi_{x1} - \phi_{x2} - \dots - \phi_{xN}]}$$

Die Bildbeschreibung wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.

## Grafische Ermittlung von Dämpfung und Phase (2)

Stellt man  $H(f)$  durch die Dämpfung  $a(f)$  und die Phase  $b(f)$  entsprechend der allgemeinen Beziehung

$$H(f) = e^{-a(f) - j \cdot b(f)}$$

dar, so erhält man durch den Vergleich mit der obigen Gleichung das folgende Ergebnis:

- Unter der Voraussetzung, dass alle dimensionsbehafteten Größen geeignet normiert sind, gilt für die Dämpfung in Neper (1 Np ist gleich 8.686 dB):

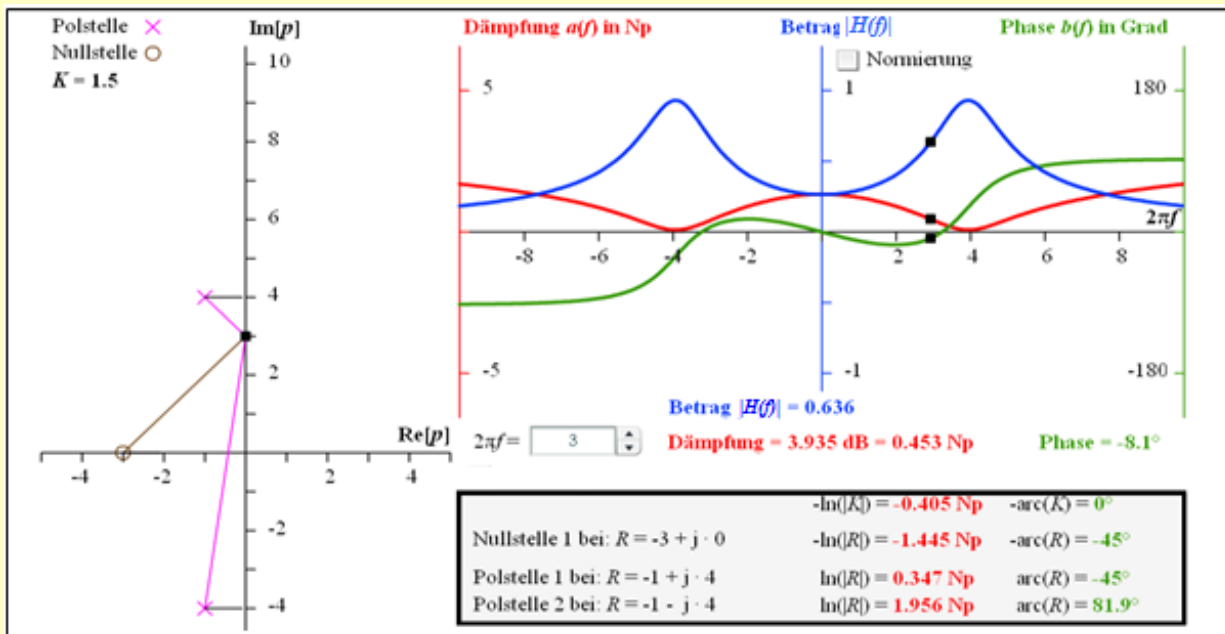
$$a(f) = -\ln K + \sum_{i=1}^N \ln |R_{xi}| - \sum_{i=1}^Z \ln |R_{oi}|.$$

- Die Phasenfunktion in Radian (rad) ergibt sich entsprechend der Skizze auf der letzten Seite zu

$$b(f) = \phi_K + \sum_{i=1}^N \phi_{xi} - \sum_{i=1}^Z \phi_{oi} \quad \text{mit} \quad \phi_K = \begin{cases} 0 & \text{für } K > 0, \\ \pi & \text{für } K < 0. \end{cases}$$

**Beispiel:** Die Grafik verdeutlicht die Berechnung der Dämpfungsfunktion  $a(f)$  und der Phasenfunktion  $b(f)$  eines Vierpols, der durch den Faktor  $K = 1.5$ , eine Nullstelle bei  $-3$  und zwei Pole bei  $-1 \pm j \cdot 4$  festliegt. Die angegebenen Zahlenwerte gelten für die Frequenz  $2\pi f = 3$ :

$$a(f = \frac{3}{2\pi}) = 0.453 \text{ Np} = 3.953 \text{ dB} \Rightarrow |H(\frac{3}{2\pi})| = 0.636, \quad b(\frac{3}{2\pi}) = -8.1^\circ.$$



Die Grafik ist ein Bildschirmabzug des Interaktionsmoduls

### Kausale Systeme –Laplace–Transformation

Die Dämpfung  $a(f)$  ist rot dargestellt und die Phase grün. Die Herleitung dieser Zahlenwerte ist im grau hinterlegten Block verdeutlicht. Für  $|H(f)|$  ergibt sich ein bandpassähnlicher Verlauf (blaue Kurve) mit

$$|H(f = 0)| \approx 0.25, \quad |H(f = \frac{4}{2\pi})| \approx 0.637, \quad |H(f \rightarrow \infty)| = 0.$$

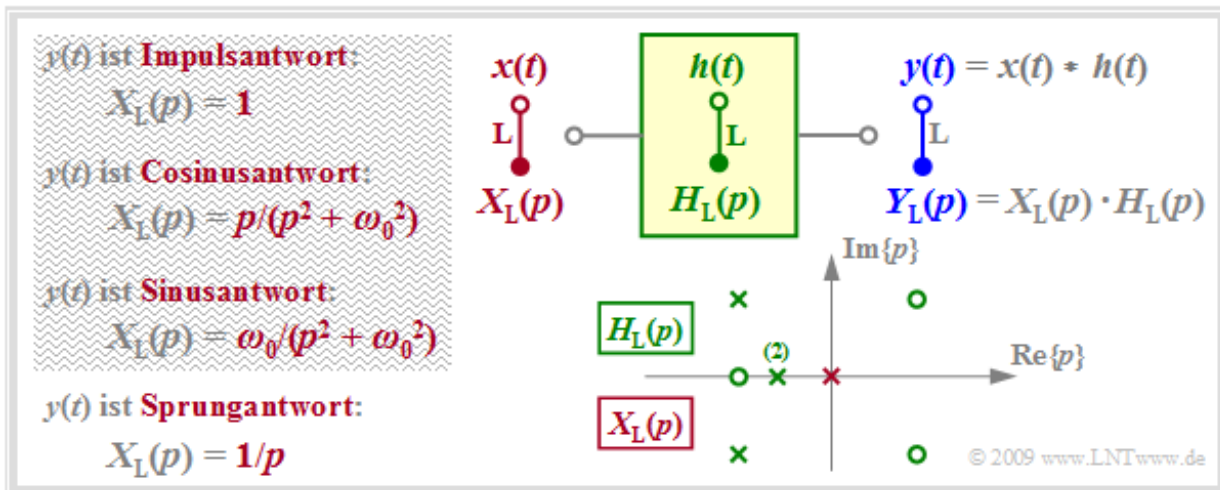


## Problemstellung und Voraussetzungen

Das Kapitel 3.3 behandelt die folgende Problemstellung: Bekannt ist die  $p$ -Spektralfunktion  $Y_L(p)$  in der Pol-Nullstellen-Form. Gesucht ist die **Laplace-Rücktransformierte**, die die dazugehörige Zeitfunktion  $y(t)$  angibt und die in diesem Tutorial wie folgt bezeichnet wird:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_L(p)\}, \quad \text{kurz } y(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\circlearrowleft} Y_L(p).$$

In der Grafik sind die Voraussetzungen für diese Aufgabenstellung zusammengestellt:



- $H_L(p)$  beschreibt das kausale Übertragungssystem, während  $Y_L(p)$  die Laplace-Transformierte des gesuchten Ausgangssignals  $y(t)$  unter Berücksichtigung des Eingangssignals  $x(t)$  bezeichnet.  $Y_L(p)$  ist gekennzeichnet durch  $N$  Pole, durch  $Z \leq N$  Nullstellen sowie durch die Konstante  $K$ .
- Die Pole und Nullstellen zeigen die in **Kapitel 3.2** genannten Eigenschaften. Pole dürfen nur in der linken  $p$ -Halbebene oder auf der imaginären Achse liegen, Nullstellen sind auch in der rechten  $p$ -Halbebene erlaubt.
- Alle **Singularitäten** – dies ist der Oberbegriff für Pole und Nullstellen – sind entweder reell oder es treten Paare von konjugiert-komplexen Singularitäten auf. Mehrfache Pole und Nullstellen sind ebenfalls erlaubt.
- Verwendet man ein diracförmiges Eingangssignal  $x(t) = \delta(t) \Rightarrow X_L(p) = 1 \Rightarrow Y_L(p) = H_L(p)$ , so beschreibt das Ausgangssignal  $y(t)$  die **Impulsantwort**  $h(t)$  des kausalen Übertragungssystems. Zur Berechnung dürfen nur die grün eingezeichneten Singularitäten herangezogen werden.
- Eine Sprungfunktion  $x(t) = \gamma(t) \Rightarrow X_L = 1/p$  am Eingang bewirkt, dass das Ausgangssignal  $y(t)$  gleich der **Sprungantwort**  $\sigma(t)$  von  $H_L(p)$  ist. Zur Berechnung ist neben den Singularitäten von  $H_L(p)$  nun auch die (in der Grafik rot eingezeichnete) Polstelle bei  $p = 0$  zu berücksichtigen.
- Als Eingang  $x(t)$  sind nur Signale möglich, für die  $X_L(p)$  in Pol-Nullstellen-Form darstellbar ist (siehe **Tabelle** im Kapitel 3.2), zum Beispiel ein zum Zeitpunkt  $t = 0$  eingeschaltetes Cosinus- oder Sinussignal. Deren Laplace-Transformierte sind in der obigen Grafik ebenfalls angegeben.

Bei der hier beschriebenen Vorgehensweise ist ein Rechteck  $x(t) \Rightarrow X_L(p) = (1 - e^{pT})/p$  nicht möglich. Die Rechteckantwort  $y(t)$  kann aber als Differenz zweier Sprungantworten indirekt berechnet werden.

## Einige Ergebnisse der Funktionentheorie

Im Gegensatz zu den Fourierintegralen, die sich in den beiden Transformationsrichtungen nur geringfügig unterscheiden, ist bei Laplace die Berechnung von  $y(t)$  aus  $Y_L(p)$  – also die Rücktransformation –

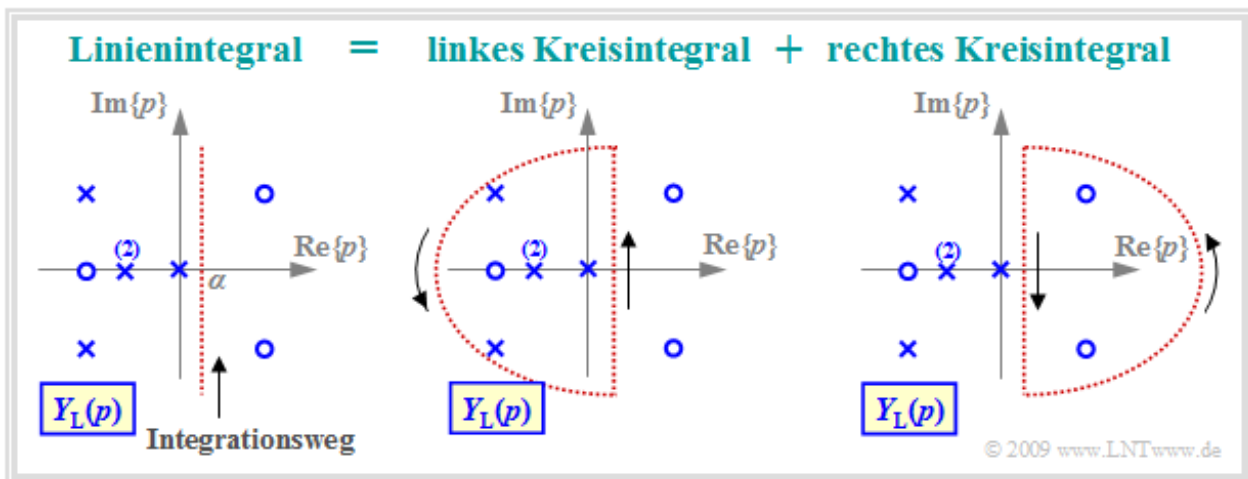
- sehr viel schwieriger als die Berechnung von  $Y_L(p)$  aus  $y(t)$ ,
- auf elementarem Weg nicht oder nur sehr umständlich lösbar.

**Definition:** Allgemein gilt für die **Laplace-Rücktransformation:**

$$y(t) = L^{-1}\{Y_L(p)\} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{j \cdot 2\pi} \cdot \int_{\alpha - j \cdot 2\pi\beta}^{\alpha + j \cdot 2\pi\beta} Y_L(p) \cdot e^{p \cdot t} dp.$$

Die Integration erfolgt parallel zur imaginären Achse (gepunktete Linie in der Grafik). Der Realteil  $\alpha$  muss dabei so gewählt werden, dass alle Pole links vom Integrationsweg liegen.

Die linke Grafik verdeutlicht dieses Linienintegral entlang der rot gepunkteten Vertikalen  $\text{Re}\{p\} = \alpha$ . Lösbar ist dieses Integral mit dem *Jordanschen Lemma der Funktionstheorie*, siehe [Mar94].



In diesem Tutorial folgt nur eine sehr einfache Zusammenfassung der Vorgehensweise:

- Das Linienintegral kann entsprechend der Skizze in zwei Kreisintegrale aufgeteilt werden, wobei sämtliche Polstellen im linken Kreisintegral liegen, während das rechte Kreisintegral nur Nullstellen beinhalten darf.
- Entsprechend der Funktionstheorie liefert das rechte Kreisintegral die Zeitfunktion  $y(t)$  für negative Zeiten. Aufgrund der Kausalität muss  $y(t < 0)$  identisch 0 sein, was aber nach dem Hauptsatz der Funktionstheorie nur zutrifft, wenn es in der rechten  $p$ -Halbebene keine Pole gibt.
- Das Integral über den linken Halbkreis liefert dagegen die Zeitfunktion für  $t \geq 0$ . Dieses umschließt alle Polstellen und ist mit dem **Residuensatz** in (relativ) einfacher Weise berechenbar, wie auf den nächsten Seiten gezeigt wird.

## Formulierung des Residuensatzes

Es wird weiter vorausgesetzt, dass die Übertragungsfunktion  $Y_L(p)$  in Pol-Nullstellen-Form durch

- den konstanten Faktor  $K$ ,
- die  $Z$  Nullstellen  $p_{oi}$  ( $i = 1, \dots, Z$ ) und
- die  $N$  Polstellen  $p_{xi}$  ( $i = 1, \dots, N$ )

dargestellt werden kann. Für diese und die nächste Seite setzen wir zudem  $Z < N$  voraus.

Die Anzahl der unterscheidbaren Pole bezeichnen wir mit  $I$ . Zur Bestimmung von  $I$  werden mehrfache Pole nur einfach gezählt. Für das **Beispiel auf der letzten Seite** gilt  $N = 5$  und  $I = 4$ .

**Residuensatz:** Unter den genannten Voraussetzungen ergibt sich die **Laplace-Transformierte von  $Y_L(p)$  für Zeiten  $t \geq 0$**  als die Summe von  $I$  Eigenschwingungen der Pole, die man als die *Residuen* – abgekürzt mit „Res“ – bezeichnet:

$$y(t) = \sum_{i=1}^I \operatorname{Res} \Big|_{p=p_{xi}} \{ Y_L(p) \cdot e^{pt} \}.$$

Da  $Y_L(p)$  nur für kausale Signale angebar ist, gilt für negative Zeiten stets  $y(t < 0) = 0$ .

Für einen *Pol der Vielfachheit  $l$*  gilt allgemein:

$$\operatorname{Res} \Big|_{p=p_{xi}} \{ Y_L(p) \cdot e^{pt} \} = \frac{1}{(l-1)!} \cdot \frac{d^{l-1}}{dp^{l-1}} \{ Y_L(p) \cdot (p - p_{xi})^l \cdot e^{pt} \} \Big|_{p=p_{xi}}.$$

Als Sonderfall ergibt sich daraus mit  $l = 1$  für einen *einfachen Pol*:

$$\operatorname{Res} \Big|_{p=p_{xi}} \{ Y_L(p) \cdot e^{pt} \} = Y_L(p) \cdot (p - p_{xi}) \cdot e^{pt} \Big|_{p=p_{xi}}.$$

Auf der nächsten Seite wird der Residuensatz anhand dreier ausführlicher Beispiele verdeutlicht, die mit den **Beispielen zur Frequenzbereichsbeschreibung** korrespondieren. Wir betrachten also wieder den Vierpol mit einer Induktivität im Längszweig ( $L = 25 \mu\text{H}$ ) sowie im Querzweig die Serienschaltung aus einem Ohmschen Widerstand ( $R = 50 \Omega$ ) und einer Kapazität  $C$ . Für Letztere betrachten wir wieder drei verschiedene Werte, nämlich  $C = 62.5 \text{ nF}$ ,  $C = 8 \text{ nF}$  und  $C = 40 \text{ nF}$ .

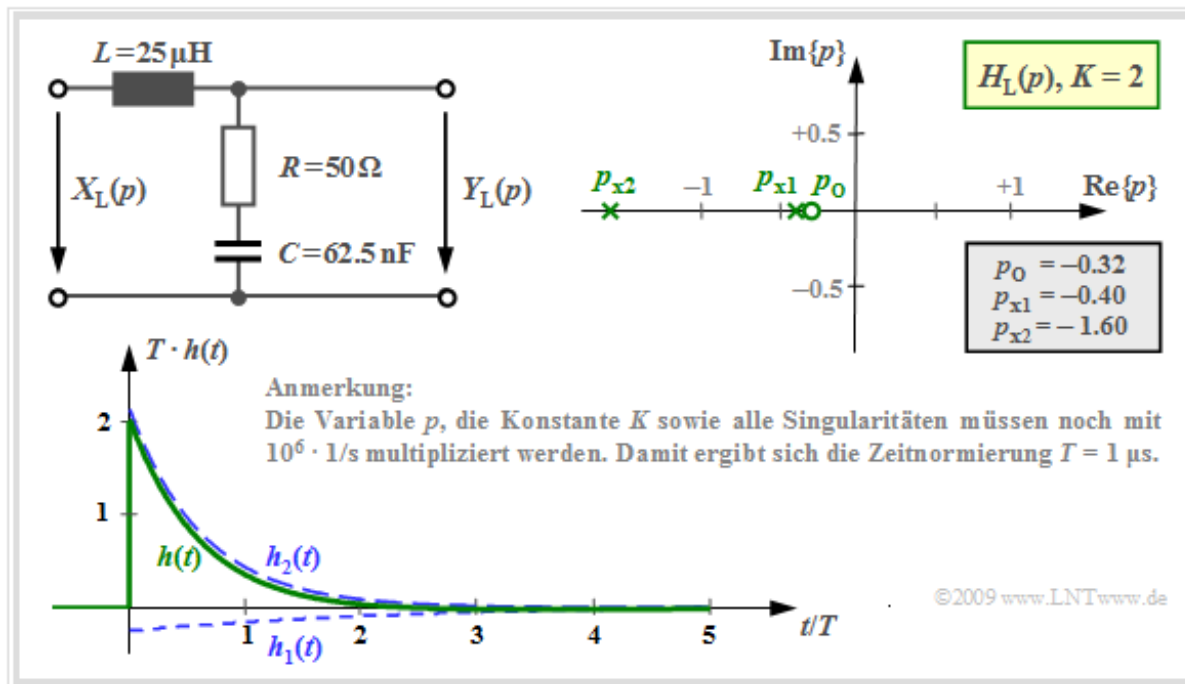
Vorausgesetzt ist stets  $x(t) = \delta(t) \Rightarrow X_L(p) = 1$ , so dass  $Y_L(p) = H_L(p)$  gilt. Damit ist die berechnete Zeitfunktion  $y(t)$  gleich der Impulsantwort  $h(t)$ .

## Anwendung des Residuensatzes (1)

Mit der Kapazität  $C = 62.5 \text{ nF}$  in der unteren Grafik angegebenen Zahlenwerten erhält man für die in **Kapitel 3.2** berechnete Übertragungsfunktion:

$$H_L(p) = K \cdot \frac{p - p_0}{(p - p_{x1})(p - p_{x2})} = 2 \cdot \frac{p + 0.32}{(p + 0.4)(p + 1.6)}$$

Beachten Sie bitte die Normierung von  $p$ ,  $K$  sowie aller Pole und Nullstellen mit dem Faktor  $10^6 \cdot 1/s$ .



Die Impulsantwort setzt sich aus  $I = N = 2$  Eigenschwingungen zusammen. Für  $t < 0$  sind diese gleich 0.

- Das Residuum des Pols bei  $p_{x1} = -0.4$  liefert die Zeitfunktion:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \text{Res} \left| \{H_L(p) \cdot e^{pt}\} = H_L(p) \cdot (p - p_{x1}) \cdot e^{pt} \right|_{p=p_{x1}} = \\ &= 2 \cdot \frac{p + 0.32}{p + 0.4} \cdot e^{pt} \Big|_{p=-0.4} = -\frac{2}{15} \cdot e^{-0.4t}. \end{aligned}$$

- In gleicher Weise kann das Residuum des Pols  $p_{x2} = -1.6$  berechnet werden:

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \text{Res} \left| \{H_L(p) \cdot e^{pt}\} = H_L(p) \cdot (p - p_{x2}) \cdot e^{pt} \right|_{p=p_{x2}} = \\ &= 2 \cdot \frac{p + 0.32}{p + 1.6} \cdot e^{pt} \Big|_{p=-1.6} = \frac{32}{15} \cdot e^{-1.6t}. \end{aligned}$$

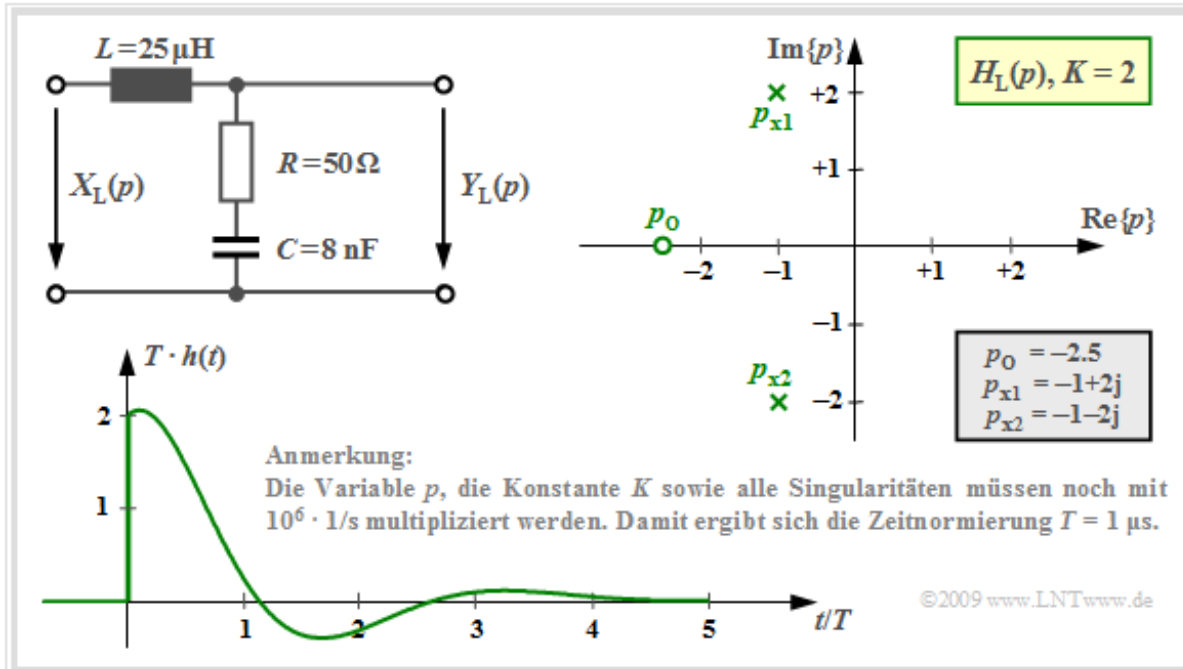
Die Grafik zeigt  $h_1(t)$  und  $h_2(t)$  sowie das Summensignal  $h(t)$ . Berücksichtigt ist der Normierungsfaktor  $1/T = 10^6 \cdot 1/s$ , so dass die Zeit auf  $T = 1 \mu\text{s}$  normiert ist. Für  $t = 0$  ergibt sich

$$T \cdot h(t = 0) = 32/15 - 2/15 = 2.$$

Für Zeiten  $t > 2 \mu\text{s}$  ist die Impulsantwort – wenn auch nur geringfügig – negativ.

## Anwendung des Residuensatzes (2)

Die Bauelementewerte  $R = 50 \Omega$ ,  $L = 25 \mu\text{H}$  und  $C = 8 \text{ nF}$  ergeben zwei konjugiert komplexe Pole bei  $p_{x1} = -1 + j \cdot 2$  und  $p_{x2} = -1 - j \cdot 2$ . Die Nullstelle liegt bei  $p_0 = -2.5$ , der konstante Faktor beträgt weiterhin  $K = 2$ . Alle Zahlenwerte sind wieder mit dem Faktor  $1/T$  zu multiplizieren ( $T = 1 \mu\text{s}$ ).



Wendet man den Residuensatz auf diese Konfiguration an, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 h_1(t) &= \dots = K \cdot \frac{p_{x1} - p_0}{p_{x1} - p_{x2}} \cdot e^{p_{x1} \cdot t} = 2 \cdot \frac{-1 + j \cdot 2 + 2.5}{(-1 + j \cdot 2) - (-1 - j \cdot 2)} \cdot e^{p_{x1} \cdot t} = \\
 &= 2 \cdot \frac{1.5 + j \cdot 2}{j \cdot 4} \cdot e^{p_{x1} \cdot t} = (1 - j \cdot 0.75) \cdot e^{-t} \cdot e^{j \cdot 2t},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_2(t) &= \dots = K \cdot \frac{p_{x2} - p_0}{p_{x2} - p_{x1}} \cdot e^{p_{x2} \cdot t} = 2 \cdot \frac{-1 - j \cdot 2 + 2.5}{(-1 - j \cdot 2) - (-1 + j \cdot 2)} \cdot e^{p_{x2} \cdot t} = \\
 &= 2 \cdot \frac{1.5 - j \cdot 2}{-j \cdot 4} \cdot e^{p_{x2} \cdot t} = (1 + j \cdot 0.75) \cdot e^{-t} \cdot e^{-j \cdot 2t}.
 \end{aligned}$$

Mit dem **Satz von Euler** ergibt sich somit für das Summensignal:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= h_1(t) + h_2(t) = \\
 &= e^{-t} \cdot [(1 - j \cdot 0.75) \cdot (\cos() + j \cdot \sin()) + (1 + j \cdot 0.75) \cdot (\cos() - j \cdot \sin())] = \\
 &= \dots = e^{-t} \cdot [2 \cdot \cos(2t) + 1.5 \cdot \sin(2t)].
 \end{aligned}$$

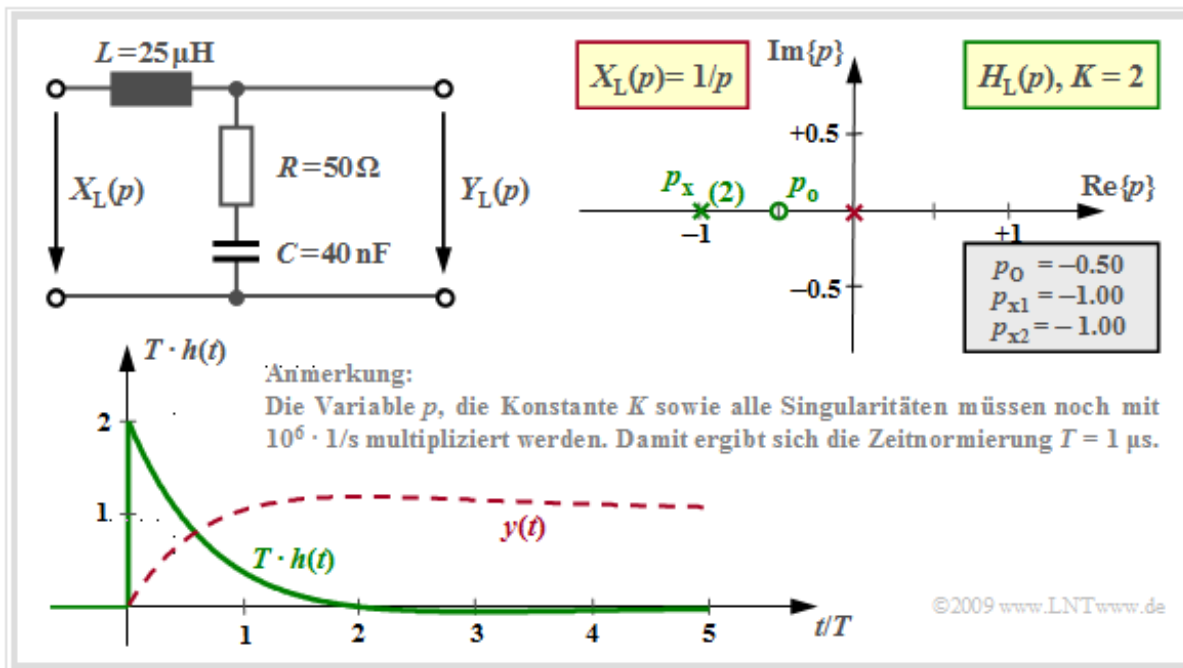
Die Grafik zeigt im unteren Diagramm – wieder geeignet normiert – die nun mit  $e^{-t}$  gedämpft oszillierende Impulsantwort  $h(t)$  für diese Pol-Nullstellen-Konfiguration.

## Anwendung des Residuensatzes (3)

Mit  $R = 50 \Omega$ ,  $L = 25 \mu\text{H}$  und  $C = 40 \text{ nF}$  ergibt sich der **aperiodische Grenzfall**:

$$H_L(p) = K \cdot \frac{p - p_o}{(p - p_x)^2} = 2 \cdot \frac{p + 0.5}{(p + 1)^2}$$

Der Kapazitätswert  $C = 40 \text{ nF}$  ist der kleinstmögliche, für den sich gerade noch reelle Polstellen ergeben. Diese fallen zusammen, das heißt  $p_x = -1$  ist eine doppelte Polstelle.



Die Zeitfunktion lautet somit entsprechend dem Residuensatz mit  $l = 2$ :

$$\begin{aligned} h(t) &= \text{Res} \left| \{ H_L(p) \cdot e^{pt} \} \right|_{p=p_x} = \frac{d}{dp} \left\{ H_L(p) \cdot (p - p_x)^2 \cdot e^{pt} \right\} \Big|_{p=p_x} = \\ &= K \cdot \frac{d}{dp} \left\{ (p - p_o) \cdot e^{pt} \right\} \Big|_{p=p_x} \end{aligned}$$

Mit der *Produktregel* der Differentialrechnung ergibt sich daraus:

$$h(t) = K \cdot [e^{pt} + (p - p_o) \cdot t \cdot e^{pt}] \Big|_{p=-1} = e^{-t} \cdot (2 - t)$$

Die untere Grafik zeigt diese Impulsantwort (grüne Kurve) in normierter Darstellung. Sie unterscheidet sich von derjenigen mit den beiden unterschiedlichen Polen bei  $-0.4$  und  $-1.6$  nur geringfügig.

Das rot gezeichnete Signal

$$y(t) = 1 - e^{-t} + t \cdot e^{-t}$$

ergibt sich, wenn man zusätzlich eine Sprungfunktion am Eingang berücksichtigt. Zur Berechnung der Sprungantwort kann man alternativ

- bei der Residuenberechnung zusätzlich den Pol bei  $p = 0$  berücksichtigen, oder
- das Integral über die Impulsantwort  $h(t)$  bilden.

## Partialbruchzerlegung

Voraussetzung für die Anwendung des Residuensatzes ist, dass es weniger Nullstellen als Pole gibt, das heißt, es muss stets  $Z$  kleiner als  $N$  sein. Gilt dagegen wie bei einem Hochpass  $Z = N$ , so

- ist der Grenzwert der Spektralfunktion für großes  $p$  ungleich 0,
- beinhaltet das zugehörige Zeitsignal  $y(t)$  auch eine **Diracfunktion**,
- versagt der Residuensatz und es ist eine Partialbruchzerlegung vorzunehmen.

Die Vorgehensweise soll beispielhaft für einen Hochpass erster Ordnung verdeutlicht werden.

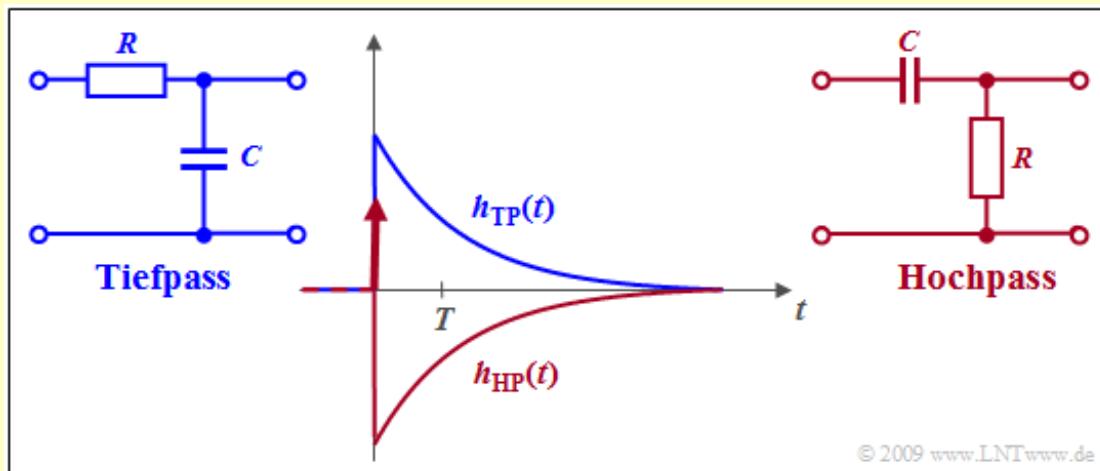
**Beispiel:** Die  $p$ -Übertragungsfunktion eines  $RC$ -Hochpasses erster Ordnung kann durch Abspaltung einer Konstanten wie folgt umgewandelt werden:

$$\frac{p}{p + RC} = 1 - \frac{RC}{p + RC}.$$

Damit lautet die Impulsantwort des Hochpasses:

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - h_{TP}(t).$$

Die Grafik zeigt als rote Kurve die Impulsantwort  $h_{HP}(t)$  des Hochpasses und als blaue Kurve die Impulsantwort  $h_{TP}(t)$  des äquivalenten Tiefpasses.



Die Diracfunktion ist die Laplace-Transformierte des konstanten Wertes „1“, während die zweite Funktion die Impulsantwort des äquivalenten Tiefpasses angibt und mit  $Z = 0$ ,  $N = 1$  und  $K = RC$  durch den Residuensatz angebar ist.