Musterlösung zur Aufgabe A1.1

a) Der Spieler X ist im Vorteil, da ihn der Spieler Y überbieten muss. Das Spiel wäre dann fair, wenn es bei exakt gleichen Würfen unentschieden gewertet würde. Über einen längeren Zeitraum würden sich allerdings auch dann gleiche Gewinnchancen ergeben, wenn X und Y abwechselnd beginnen.

b) Es sind hier $I = 21$ unterschiedliche Resultate möglich. Diese sind (beim niedrigsten beginnend): 31, 32, 41, 42, 43, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64, 65, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 21.

c) Die 21 möglichen Resultate dieses Würfelspiels sind allerdings nicht gleichwahrscheinlich, deshalb können die Wahrscheinlichkeiten auch nicht nach der klassischen Definition (mit Ergebnis: 1/21) ermittelt werden.

Macht man zumindest gedanklich eine Unterscheidung zwischen den Würfeln, zum Beispiel durch einen blauen (B) und einen roten (R) Würfel, so gibt es $6^2 = 36$ gleichwahrscheinliche Ereignisse, unter Anderem das Ereignis [Sechser-Pasch] = $(B = 6) \cap (R = 6)$. Bei beiden Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit für eine „6“ gleich 1/6. Da die Augenzahlen der beiden Würfel natürlich statistisch unabhängig sind, ist

$$\Pr[\text{Sechser} - \text{Pasch}] = \Pr(B = 6 \cap R = 6) \underline{= 1/36 = 0.0278}.$$

Anmerkung: Aus der Namensgebung *Resultat* könnte man fälschlicherweise schließen, dass es sich hierbei um ein Ergebnis handelt. Entsprechend den Definitionen in Kapitel 1.1 ist das Resultat aber als ein Ereignis (Zusammenfassung von Ergebnissen) zu betrachten.

d) Diese Wahrscheinlichkeit kann mit $K = 6$ und $M = 36$ wie folgt angegeben werden:

$$\Pr[\text{irgendein Pasch}] = \Pr(B = R) = K/M \underline{= 1/6 = 0.1667}.$$

e) Analog ist die Wahrscheinlichkeit für das *Mäxchen* mit $K = 2$ und $M = 36$ berechenbar:

$$\Pr[\text{Mäxchen}] = \Pr(B = 1 \cap R = 2) + \Pr(B = 2 \cap R = 1) \underline{= 1/18 = 0.0556}.$$

f) Die Wahrscheinlichkeit, dass Y gewinnt, wenn X das Ergebnis „53” vorgelegt hat, ist 5/9.

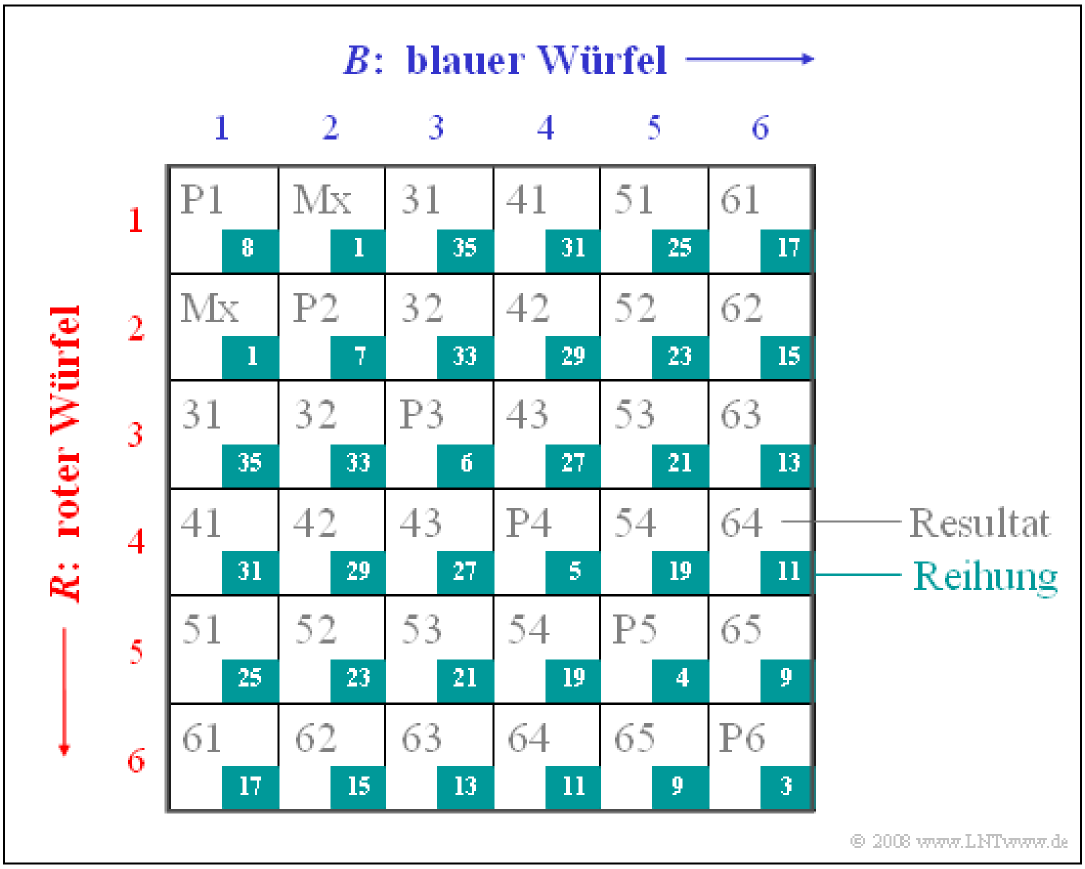
Als Musterlösung dieser Teilaufgabe gibt es mit «Weiter» eine kurze Videosequenz (Dauer 1:40).

Musterlösung zur Aufgabe A1.1(f)

Hier sollte eine Flash-Animation erscheinen. Bei PDF-Dateien ist dies nicht möglich.
Bitte schauen Sie sich die Flash-Animation im Internet an!

Musterlösung zur Aufgabe A1.1(g)

g) Zur Lösung dieser Teilaufgabe gehen wir wieder von einer zweidimensionalen Darstellung aus und reihen die Matrixelemente entsprechend ihren Wertigkeiten (siehe Bild):



Daraus ist zu ersehen, dass man mit der Vorgabe „65” dem Gegenspieler nur eine Gewinnchance von 8/36 = 0.222 lässt. Damit ist seine eigene Gewinnchance etwa 77.8%. Mit „64” wäre die Gewinnchance von Spieler X nur ca. 72.2%. Die richtige Lösung ist somit R_{min} = 65.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.1

a) Da die Wahrscheinlichkeiten von ±1 gleich sind und $\Pr(Y = 0) = 2 \cdot \Pr(Y = 1)$ gilt, erhält man:

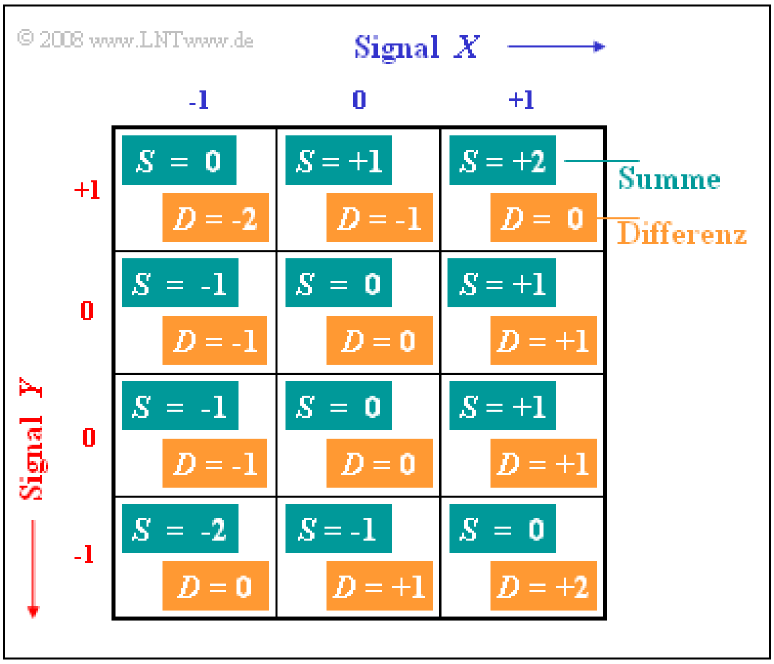
$$\Pr(Y = 1) + \Pr(Y = 0) + \Pr(Y = -1) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 1/2 \cdot \Pr(Y = 0) + \Pr(Y = 0) + 1/2 \cdot \Pr(Y = 0) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \Pr(Y = 0) \underline{= 1/2}.$$

b) S kann insgesamt <u>5 Werte</u> annehmen, nämlich –2, –1, 0, +1 und +2.

c) Da Y nicht gleichverteilt ist, kann man hier die *klassische Definition der Wahrscheinlichkeit* (eigentlich) nicht anwenden.



Teilt man Y jedoch gemäß dem Bild in vier Bereiche auf, wobei man zwei der Bereiche dem Ereignis $Y = 0$ zuordnet, so kann man die klassische Definition dennoch anwenden. Man erhält dann:

$$\Pr(S = 0) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$
$$\Pr(S = -1) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4},$$
$$\Pr(S = +1) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4},$$

$$\Pr(S = -2) = \frac{1}{12}, \quad \Pr(S = +2) = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\Pr}(S = S_{\max}) \underline{= 1/12 = 0.0833}.$$

d) Aus obiger Darstellung ist auch ersichtlich, dass das Differenzsignal D und das Summensignal S die gleichen Werte mit gleichen Wahrscheinlichkeiten annehmen. Dies war zu erwarten, da $\Pr(Y = +1)$ gleich $\Pr(Y = -1)$ vorgegeben ist $\Rightarrow$ <u>Lösungsvorschlag 1</u>.

Musterlösung zur Aufgabe A1.2

a) Das Ereignis U beinhaltet alle diejenigen Zahlen ≥ 8 (A = 1), die gerade sind (D = 0): 8, 10, 12, 14 ⇒ Richtig sind die Lösungsalternativen 2 und 4.

b) Das Ereignis V besteht aus den beiden Zahlen 4 (binär 0100) und 6 (binär 0110) ⇒ Richtig sind hier die Lösungsalternativen 1 und 3

c) Für das Ereignis W gilt mit dem Theorem von de Morgan:

$$\overline{W} = \overline{A} \cup \overline{D} \cup (\overline{B} \cap C) \cup (B \cap \overline{C}).$$

$$\Rightarrow \quad W = \overline{\overline{W}} = A \cap D \cap (\overline{\overline{B} \cap C}) \cap (\overline{B \cap \overline{C}}).$$

Mit den Sätzen von de Morgan folgt daraus weiter:

$$W = A \cap D \cap (B \cup \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C).$$

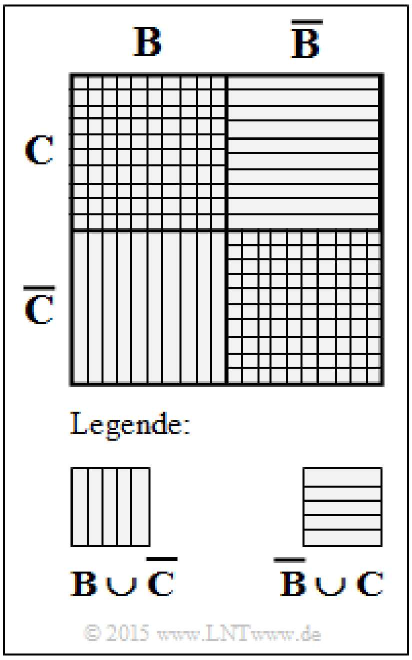
Mit der Boolschen Beziehung (siehe Skizze)

$$(B \cup \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) = (B \cap C) \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$$

erhält man schließlich

$$W = (A \cap B \cap C \cap D) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap D).$$

Somit beinhaltet W die Zahlen 15 und 9 ⇒ Lösungsvorschlag 1.



d) Die Vereinigungsmenge von U, V und W beinhaltet folgende Zahlen: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15. Dementsprechend gilt für die Menge P als das Komplement dieser Vereinigungsmenge:

$$P \in \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}.$$

Dies sind genau die mit 4 Bit darstellbaren Primzahlen ⇒ Lösungsvorschlag 2.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.2

Für die weiteren Mengen gilt:

$$\begin{aligned} D &= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \\ &= [\{1,2,3\} \cap \{1,2,4,5,7,8\}] \cup [\{4,5,6,7,8,9\} \cap \{3,6,9\}] = \{1,2,6,9\}, \\ E &= E = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = D = \{1,2,6,9\}, \\ F &= = (A \cup C) \cap \overline{B} = \{1,2,3,5,6,7,8\} \cap \{1,2,4,5,7,8\} = \{1,2,5,7,8\}, \\ H &= (\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) = (\overline{A} \cap \overline{C}) \cup \Phi = \{4,9\}. \end{aligned}$$

a) Der erste Vorschlag (a1) ist falsch: A und B beinhalten jeweils die „3".

(a2) ist richtig: Es liegt kein gemeinsames Element vor.

(a3) ist falsch: B und C beinhalten jeweils die „6".

b) Der erste Vorschlag (b1) ist falsch: Es fehlt die „4".

(b2) ist richtig: $A \cap B \cap C = \Phi$ (keine Ziffer ist gleichzeitig in A, B und C enthalten).
Bildung der Komplementärmenge:

$$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{\Phi} = G.$$

c) Der erste Vorschlag (c1) ist richtig: Die Mengen D und E enthalten genau die gleichen Elemente und somit auch deren Komplementärmengen.

(c2) ist richtig: Allgemein, das heißt für beliebige X und B gilt:

$$X \cap \overline{B} \subset \overline{B} \quad \Rightarrow \quad \text{Mit } X = A \cup C \text{ folgt somit } F \subset \overline{B}.$$

(c3) ist falsch: Beispielsweise sind B und C nicht disjunkt.

(c4) ist richtig:

$$A = \{1,2,3\}, \qquad C = \{5,6,7,8\}, \qquad H = \{4,9\}.$$

Richtig sind also die Vorschläge 1, 2 und 4.

Musterlösung zur Aufgabe A1.3

a) Aus einfachen geometrischen Überlegungen kommt man zu den Ergebnissen:

$$\Pr(B) = 0.75 \cdot 1 = 0.75 \quad (\text{absolut } 720),$$

$$\Pr(I) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0.50 \quad (\text{absolut } 480),$$

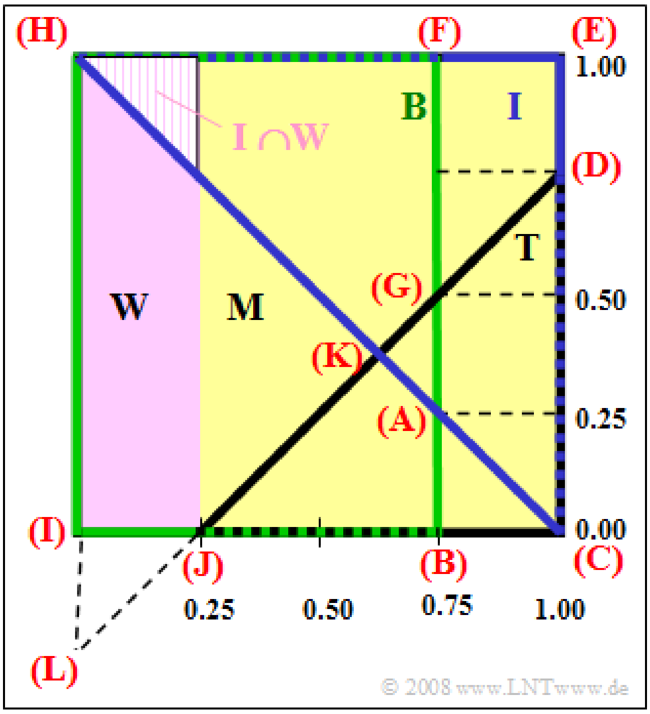
$$\Pr(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{32} \quad (\text{absolut } 270) \quad \Rightarrow \quad \underline{N_\mathrm{T} = 270}.$$

b) Richtig sind die Lösungsvorschläge 2, 3, 5 und 6 $\Rightarrow$ die Lösungsvorschläge 1, 4, 7 sind falsch: Es gibt auch IT-Studentinnen, wenn auch nur sehr wenige. Die Vereinigungsmenge von B, I und T ergibt zwar die Grundmenge, aber kein vollständiges System, da nicht alle Kombinationen von B, I und T zueinander disjunkt sind.

c) Eine IT-Studentin ist mengentheoretisch die Schnittmenge aus I und W (rechts dargestellt als schraffierte Fläche):

$$\Pr[\text{IT}-\text{Studentin}] = \Pr(I \cap W) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32} \underline{\approx 0.0313}.$$

In Worten: Unter den 960 Studierenden gibt es 30 IT–Studentinnen.



d) Die Wahrscheinlichkeit ist als Summe dreier Einzelwahrscheinlichkeiten berechenbar:

$$\begin{aligned}\Pr[\text{ein Studienfach}] &= \Pr(\overline{B} \cap \overline{I} \cap T) + \Pr(\overline{B} \cap I \cap \overline{T}) + Pr(B \cap \overline{I} \cap \overline{T}) \\ &= p_1 + p_2 + p_3.\end{aligned}$$

Jede einzelne Wahrscheinlichkeit entspricht einer Fläche im Venndiagramm und kann durch Addition bzw. Subraktion von Dreiecken oder Rechtecken bestimmt werden (siehe obiges Bild):

$$p_1 = \text{Dreieck (ABC)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32} \underline{\approx 0.0313},$$

$$p_2 = \text{Viereck (DEFG)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32} \underline{\approx 0.0938},$$

$$\begin{aligned}p_3 &= \text{Viereck (HIJK)} = \text{Dreieck (HLK)} - \text{Dreieck (ILJ)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{23}{64} \underline{\approx 0.3594}.\end{aligned}$$

$$\text{Oder} \quad p_3 = \text{Dreieck (HIC)} - \text{Dreieck (KJC)}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{23}{64}.$$

Die Summe dieser drei Wahrscheinlichkeiten führt zum Endergebnis 31/64 ≈ 0.4843.

e) Diese Wahrscheinlichkeit wird durch das Dreieck (AGK) ausgedrückt. Dieses hat die Fläche

$$\Pr[\text{drei Studienfächer}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64} \underline{\approx 0.0156}.$$

f) Die drei Ereignisse

- „nur ein Studienfach",
- „zwei Studienfächer",
- „drei Studienfächer"

bilden ein vollständiges System. Damit erhält man mit den Ergebnissen der letzten Teilaufgaben:

$$\Pr[\text{zwei Studienfächer}] = 1 - \Pr(1) - \Pr(3) = 1 - \frac{31}{64} - \frac{1}{64} \underline{= 0.5}.$$

Zum genau gleichen Ergebnis – aber mit deutlich mehr Aufwand – käme man auf dem direkten Weg entsprechend:

$$\Pr[\text{zwei Studienfächer}] = \Pr(B \cap I \cap \overline{T}) + \Pr(B \cap \overline{I} \cap T) + \Pr(\overline{B} \cap I \cap T).$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.3

a) Der Spieler verliert jeweils 1 Euro, wenn eine der Zahlen „1“ bis „36“ gezogen wird. Er gewinnt 33 Euro, wenn tatsächlich die Null getroffen wird. Daraus folgt:

$$G_a = \frac{36}{37} \cdot (-1 \text{ Euro}) + \frac{1}{37} \cdot (33 \text{ Euro}) \;\underline{= -0.081 \text{ Euro (Verlust)}}.$$

b) Der Spieler gewinnt und verliert nichts, wenn nicht die Null gezogen wird. Erscheint die Null, so verliert er seinen Einsatz:

$$G_b = \frac{1}{37} \cdot (-2 \text{ Euro}) \;\underline{= -0.054 \text{ Euro (Verlust)}}.$$

c) Kommt „Rot“, so gewinnt er 9 Euro. Kommt die Null, gewinnt er effektiv 25 Euro. Wird „Schwarz“ gezogen, so verliert er seinen gesamten Einsatz von 11 Euro:

$$G_c = \frac{18}{37} \cdot (10-1) + \frac{1}{37} \cdot (35-10) + \frac{18}{37} \cdot (-10-1) \;\underline{= -0.297 \text{ Euro}}.$$

d) Den höchsten Gewinn erzielt er bei <u>Z = „23“</u>. Dann gewinnen vier seiner fünf Chips:

$$G_d = 10 \text{ Euro (da Rot)} + 10 \text{ Euro (da Passe)} + 10 \text{ Euro (da Impair)} +$$

$$+11 \text{ Euro (da zwischen 22 und 24)} - 1 \text{ Euro (da nicht 0)} \;\underline{= 40 \text{ Euro}}.$$

Kommt dagegen die Null, so gewinnt er lediglich = 35 – 31 = 4 Euro.

e) <u>Nein, leider nicht. Im statistischen Mittel gewinnt immer die Bank</u>.

Musterlösung zur Aufgabe A1.4

a) Nur wenn das Symbol **L** gesendet wurde, kann sich der Empfänger beim gegebenen Kanal für das Symbol **L** entscheiden. Die Wahrscheinlichkeit für ein empfangenes **L** ist allerdings um den Faktor 0.7 kleiner als für ein gesendetes. Daraus folgt:

$$\mathrm{Pr}(E_\mathrm{L}) = \mathrm{Pr}(S_\mathrm{L}) \cdot \mathrm{Pr}(E_\mathrm{L}|S_\mathrm{L}) = 0.3 \cdot 0.7 \underline{= 0.21}.$$

b) Zum Ereignis E_H kommt man sowohl von S_H als auch von S_L aus. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}(E_\mathrm{H}) &= \mathrm{Pr}(S_\mathrm{H}) \cdot \mathrm{Pr}(E_\mathrm{H}|S_\mathrm{H}) + \mathrm{Pr}(S_\mathrm{L}) \cdot \mathrm{Pr}(E_\mathrm{H}|S_\mathrm{L}) \\ &= 0.7 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.1 \underline{= 0.66}.\end{aligned}$$

c) Die Ereignisse E_H, E_L und E_K bilden zusammen ein vollständiges System. Daraus folgt:

$$\mathrm{Pr}(E_\mathrm{K}) = 1 - \mathrm{Pr}(E_\mathrm{L}) - \mathrm{Pr}(E_\mathrm{H}) \underline{= 0.13}.$$

d) Eine falsche Entscheidung kann man mengentheoretisch wie folgt charakterisieren:

$$\mathrm{Pr}(\text{falsche Entscheidung}) = \mathrm{Pr}(S_\mathrm{L} \cap E_\mathrm{H} \cup S_\mathrm{H} \cap E_\mathrm{L}) = 0.3 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0 \underline{= 0.03}.$$

e) Wenn das Symbol **L** empfangen wurde, kann nur **L** gesendet worden sein. Daraus folgt:

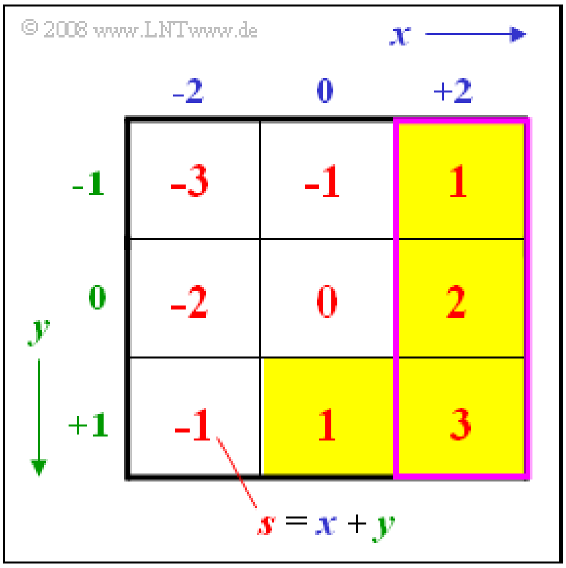
$$\mathrm{Pr}(S_\mathrm{L}|E_\mathrm{L}) \underline{= 1}.$$

f) Zur Lösung dieser Aufgabe eignet sich z. B. der **Satz von Bayes:**

$$\mathrm{Pr}(S_\mathrm{L}|E_\mathrm{K}) = \frac{\mathrm{Pr}(E_\mathrm{K}|S_\mathrm{L}) \cdot \mathrm{Pr}(S_\mathrm{L})}{\mathrm{Pr}(E_\mathrm{K})} = \frac{0.2 \cdot 0.3}{0.13} = \frac{6}{13} \underline{\approx 0.462}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.4

In der nebenstehenden Grafik sind die drei zum Ereignis „$x > 0$“ gehörenden Felder violett umrandet, während die Felder für „$s > 0$“ gelb hinterlegt sind. Alle gesuchten Wahrscheinlichkeiten können hier mit Hilfe der klassischen Definition ermittelt werden.



a) Dieses Ereignis ist durch die gelb hinterlegten Felder gekennzeichnet:

$$\Pr(s > 0) = 4/9 \approx \underline{0.444}.$$

b) Hier gilt folgender Sachverhalt:

$$\Pr((x > 0) \cap (s > 0)) = \Pr(x > 0) = 3/9 \approx \underline{0.333}.$$

c) Mit den Ergebnissen aus (a) und (b) folgt:

$$\Pr(x > 0\,|\,s > 0) = \frac{\Pr((x > 0) \cap (s > 0))}{\Pr(s > 0)} = \frac{3/9}{4/9} \underline{= 0.75}.$$

d) Analog zur Teilfrage (c) gilt nun:

$$\Pr(s > 0\,|\,x > 0) = \frac{\Pr((x > 0) \cap (s > 0))}{\Pr(x > 0)} = \frac{3/9}{3/9} \underline{= 1}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A1.5

a) Bei jeder Karte ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ass genau gleich groß (1/8):

$$p_{\rm a} = {\rm Pr}(3\ {\rm Asse}) = {\rm Pr}(A_1) \cdot {\rm Pr}(A_2) \cdot {\rm Pr}(A_3) = \left(1/8\right)^3 \; \underline{\approx 0.002}.$$

b) Nun erhält man mit dem allgemeinen Multiplikationstheorem:

$$p_{\rm b} = {\rm Pr}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = {\rm Pr}(A_1) \cdot {\rm Pr}(A_2 | A_1) \cdot {\rm Pr}(A_3 | (A_1 \cap A_2)).$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten können nach der klassischen Definition berechnet werden. Man erhält somit jeweils k/m (bei m Karten sind noch k Asse enthalten):

$$p_{\rm b} = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} \; \underline{\approx 0.0008}.$$

$p_{\rm b}$ ist kleiner als $p_{\rm a}$, da nun das zweite und dritte Ass unwahrscheinlicher sind als zuvor.

c) Analog zu Punkt (b) erhält man hier:

$$p_{\rm c} = {\rm Pr}(\overline{A_1}) \cdot {\rm Pr}(\overline{A_2} \,|\, \overline{A_1}) \cdot {\rm Pr}(\overline{A_3} \,|\, (\overline{A_1} \cap \overline{A_2})) = \frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} \cdot \frac{26}{30} \; \underline{\approx 0.6605}.$$

d) Diese Wahrscheinlichkeit kann man als die Summe dreier Wahrscheinlichkeiten ausdrücken, da die zugehörigen Ereignisse disjunkt sind:

$$p_{\rm d} = {\rm Pr}(D_1 \cup D_2 \cup D_3)\ {\rm mit:}$$

$${\rm Pr}(D_1) = {\rm Pr}(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = \frac{4}{32} \cdot \frac{28}{31} \cdot \frac{27}{30} = 0.1016,$$

$${\rm Pr}(D_2) = {\rm Pr}(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = \frac{28}{32} \cdot \frac{4}{31} \cdot \frac{27}{30} = 0.1016,$$

$${\rm Pr}(D_3) = {\rm Pr}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = \frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} \cdot \frac{4}{30} = 0.1016.$$

Diese Wahrscheinlichkeiten sind alle gleich – warum sollte es auch anders sein? Wenn man bei drei Karten genau ein Ass zieht, ist es genau so wahrscheinlich, ob man dieses als erste, als zweite oder als dritte Karte zieht. Damit erhält man für die Summe $p_{\rm d} \; \underline{= 0.3048}$.

e) Definiert man die Ereignisse E_i = „Es werden bei drei Karten genau i Asse gezogen" mit den Indizes i = 0, 1, 2 und 3, so beschreiben E_0, E_1, E_2 und E_3 ein vollständiges System. Deshalb gilt:

$$p_{\rm e} = {\rm Pr}(E_2) = 1 - p_{\rm b} - p_{\rm c} - p_{\rm d} \; \underline{= 0.0339}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.5

a) Da die beiden Teilgeräte unabhängig voneinander ausfallen, gilt mengentheoretisch:

$$\Pr(\,G \text{ fällt aus}) = \Pr(\,T_1 \text{ fällt aus}) \cdot \Pr(\,T_2 \text{ fällt aus}).$$

Da die Teilgeräte T_1 und T_2 baugleich sind, fallen sie mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p_T aus. Daraus folgt:

$$p_\text{G} = p_\text{T}^2 \quad \text{bzw.} \quad p_\text{T} = \sqrt{p_\text{G}} \le \sqrt{0.0004} \;\underline{= 0.02}.$$

b) Dieses Ergebnis ist einfacher über das Komplementärereignis zu bestimmen:

$$\Pr(\,T_1 \text{ funktioniert}) = \Pr(B_1 \text{ funktioniert} \cap B_2 \text{ funktioniert} \cap B_3 \text{ funktioniert}).$$

$$\Rightarrow 1 - p_\text{T} = (1 - p_\text{A})^3 \quad \Rightarrow \quad 1 - \text{p}_\text{T} = (0.9)^3 = 0.729 \quad \Rightarrow \quad \text{p}_\text{T} \;\underline{= 0.271 = 27.1\%}.$$

c) Mit p_A = 0.01 erhält man p_T $\underline{= 0.0297}$. Allgemein gilt die Näherung: $p_\text{T} \approx n \cdot p_\text{A}$ (= 3%).

d) Mit der Näherung aus (c) folgt direkt n = 5. Bei größerem p_A müsste man wie folgt vorgehen:

$$0.996^n \ge 0.98 \quad \Longrightarrow \quad n \le \frac{\log(0.98)}{\log(0.996)} = 5.0406 \;\; \underline{\approx 5}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A1.6

a) Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind:

- $\Pr(A_{\nu=0})$ = 17/20 = 0.85,
- $\Pr(A_{\nu=1})$ = 2/20 = 0.10,
- $\Pr(A_{\nu=9})$ = 8/20 = 0.40.

b) Nach A folgt B sehr viel häufiger als A, das heißt, es wird sicher $\Pr(B \mid A) > \Pr(A \mid A)$ sein. Alle vier Übergänge zwischen den zwei Ereignissen A und B sind möglich. Daraus folgt weiter, dass alle vier Übergangswahrscheinlichkeiten ungleich 0 sein werden. Wegen $\Pr(B_{\nu=0}) \neq 0$ und $\Pr(B \mid B) \neq 0$ kann natürlich auch die Folge B B B B ... erzeugt werden, auch wenn diese bei den 20 hier ausgegebenen Markovketten nicht dabei ist. Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 2.

c) Bei einer Markovkette erster Ordnung gilt mit der Abkürzung $\Pr(A_0) = \Pr(A_{\nu=0})$ usw.:

$$\Pr(A_1) = \Pr(A\,|\,A) \cdot \Pr(A_0) \;+\; \Pr(A\,|\,B) \cdot \Pr(B_0).$$

Die ergodischen Wahrscheinlichkeiten sind $\Pr(A) = \Pr(A_{\nu>4}) = 0.4$ und $\Pr(B) = \Pr(B_{\nu>4}) = 0.6$. Zwischen diesen besteht folgender Zusammenhang:

$$\Pr(A) = \Pr(A\,|\,A) \cdot \Pr(A) \;+\; \Pr(A\,|\,B) \cdot \Pr(B).$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten erhält man aus diesen letzten beiden Gleichungen:

$$0.15 = \Pr(A\,|\,A) \cdot 0.90 \;+\; \Pr(A\,|\,B) \cdot 0.10,$$

$$0.40 = \Pr(A\,|\,A) \cdot 0.40 \;+\; \Pr(A\,|\,B) \cdot 0.60.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit 6 und subtrahiert davon die zweite, so ergibt sich:

$$0.5 = 5 \cdot \Pr(A\,|\,A) \;\;\Rightarrow\;\; \Pr(A\,|\,A) \underline{= 0.1}.$$

Setzt man dieses Ergebnis in eine der oberen Gleichungen ein, so erhält man $\Pr(A \mid B) = 0.6$. Die weiteren Wahrscheinlichkeiten sind $\Pr(B \mid A) = 1 - \Pr(A \mid A) = 0.9$, $\Pr(B \mid B) = 1 - \Pr(A \mid B) \underline{= 0.4}$.

d) Dieser Fall ist nur dann möglich, wenn die Markovkette mit B beginnt und danach neunmal ein Übergang von B nach B stattfindet:

$$\Pr(B_0, \ldots, B_9) = \Pr(B_0) \cdot \Pr(B\,|\,B)^9 = 0.1 \cdot 0.4^9 \;\underline{\approx 2.62 \cdot 10^{-5}}.$$

e) Hier muss von der ergodischen Wahrscheinlichkeit $\Pr(A)$ ausgegangen werden und man erhält:

$$\Pr(A_\nu,\, B_{\nu+1},\, B_{\nu+2},\, A_{\nu+3}) = \Pr(A) \cdot \Pr(B\,|\,A) \cdot \Pr(B\,|\,B) \cdot \Pr(A\,|\,B) \;\underline{\approx 8.64 \cdot 10^{-2}}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.6

a) Gemäß der Angabe gilt $p = 1 - p$, also $\underline{p = 1/2}$, und $q = (1 - q)/2$. Daraus folgt $\underline{q = 1/3}$.

b) Für die Ereigniswahrscheinlichkeit von A gilt:

$$\Pr(A) = \frac{\Pr(A\,|\,B)}{\Pr(A\,|\,B) + \Pr(B\,|\,A)} = \frac{1-q}{1-q+1-p} = \frac{2/3}{2/3+1/2} = \frac{4}{7} \underline{\approx 0.571}.$$

Damit ergibt sich $\Pr(B) = 1 - \Pr(A) = 3/7 \underline{\approx 0.429}$.

c) Über den Zeitpunkt $\nu{-}1$ ist keine Aussage getroffen. Zu diesem Zeitpunkt kann das Ereignis A oder das Ereignis B aufgetreten sein. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned}\Pr(B_\nu\,|\,A_{\nu-2}) &= \Pr(A\,|\,A)\cdot\Pr(B\,|\,A) + \Pr(B\,|\,A)\cdot\Pr(B\,|\,B) \\ &= p\cdot(1-p) + q\cdot(1-p) = \frac{5}{12} \underline{\approx 0.417}.\end{aligned}$$

d) Nach dem Satz von Bayes gilt:

$$\Pr(A_{\nu-2}\,|\,B_\nu) = \frac{\Pr(B_\nu\,|\,A_{\nu-2})\cdot\Pr(A_{\nu-2})}{\Pr(B_\nu)} = \frac{5/12\cdot 4/7}{3/7} = \frac{5}{9} \underline{\approx 0.556}.$$

Die Wahrscheinlichkeit $\Pr(B_\nu\,|\,A_{\nu\text{-}2}) = 5/12$ wurde bereits im Unterpunkt c) berechnet. Aufgrund der Stationarität gilt $\Pr(A_{\nu\text{-}2}) = \Pr(A) = 4/7$ und $\Pr(B_\nu) = \Pr(B) = 3/7$. Damit erhält man für die gesuchte Rückschlusswahrscheinlichkeit den Wert 5/9.

e) Entsprechend Punkt b) gilt mit $p = 1/2$ für die Wahrscheinlichkeit von A allgemein:

$$\Pr(A) = \frac{1-q}{1.5-q}.$$

Aus $\Pr(A) = 2/3$ folgt somit $\underline{q = 0}$.

e) Im Fall der statistischen Unabhängigkeit muss beispielsweise gelten:

$$\Pr(A\,|\,A) = \Pr(A\,|\,B) = \Pr(A).$$

Daraus folgt $p = 1 - \underline{q = 2/3}$ und dementsprechend $\underline{q = 1/3}$.

Musterlösung zur Aufgabe A1.7

a) Allgemein bzw. in diesem Sonderfall muss gelten:

$$p_{\rm AA} = 1 - p_{\rm AB} - p_{\rm AC} \quad \Rightarrow \quad p_{\rm AA} = 1 - 0.75 - 0 \underline{= 0.25},$$

$$p_{\rm BB} = 1 - p_{\rm BA} - p_{\rm BC} \quad \Rightarrow \quad p_{\rm BB} = 1 - 0.75 - 0.25 \underline{= 0},$$

$$p_{\rm CC} = 1 - p_{\rm CA} - p_{\rm CB} \quad \Rightarrow \quad p_{\rm CC} = 1 - 0 - 0.25 \underline{= 0.75}.$$

Damit lautet die Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{array} \right].$$

b) Wegen $\Pr(B_0) = 1$ und $p_{\rm BB} = 0$ kann zum Zeitpunkt $\nu = 1$ das Ereignis B nicht auftreten und das Ereignis A ist sehr viel wahrscheinlicher als das Ereignis C:

$$\underline{\Pr(A_1) = 3/4}; \quad \Pr(B_1) = 0; \quad \Pr(C_1) = 1/4.$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man durch Anwendung der Vektor-Matrixdarstellung.

c) Für den Wahrscheinlichkeitsvektor zum Zeitpunkt $\nu = 2$ gilt:

$$\mathbf{p}^{(\nu=2)} = \mathbf{P}^{\rm T} \cdot \mathbf{p}^{(\nu=1)} = \left[\begin{array}{ccc} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 3/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 3/16 \\ 10/16 \\ 3/16 \end{array} \right].$$

Damit ist die Ereigniswahrscheinlichkeit $\underline{\Pr(A_2) = 3/16 = 0.1875}$.

d) Zur Lösung dieser Aufgabe sollen verschiedene Möglichkeiten angegeben werden. Zum einen das Lösen eines Gleichungssystems mit drei Unbekannten:

$$\Pr(A) = 1/4 \cdot \Pr(A) \ + 3/4 \cdot \Pr(B),$$

$$\Pr(B) = 3/4 \cdot \Pr(A) \qquad\qquad + 1/4 \cdot \Pr(C),$$

$$\Pr(C) = \qquad\qquad 1/4 \cdot \Pr(B) + 3/4 \cdot \Pr(C).$$

Aus der ersten Gleichung erhält man $\Pr(B) = \Pr(A)$, aus der letzten $\Pr(C) = \Pr(A)$. Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich 1 ist, folgt $\underline{\Pr(A) = \Pr(B) = \Pr(C) = 1/3}$.

Zum gleichen Ergebnis kommt man durch Analyse der Übergangsmatrix. Da die Summe jeder Spalte gleich 1 ist (das heißt: die Summe einer jeden Zeile der transponierten Matrix ergibt ebenfalls 1), ist offensichtlich, dass alle Ereigniswahrscheinlichkeiten gleich sein müssen.

Auch durch kurzes Nachdenken hätte man das Ergebnis ohne Rechnung vorhersagen können. Da bei jedem Ereignis die Zahlenwerte bei den abgehenden Pfeilen (nur zu anderen Ereignissen) mit denen bei den ankommenden gleich sind, ist nicht einzusehen, warum eines der Ereignisse bevorzugt sein sollte.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z1.7

a) Die Summe aller abgehenden Pfeile muss immer 1 sein. Deshalb gilt $q = 1 - p$. Aufgrund der Symmetrie des Markovdiagramms sind die ergodischen Wahrscheinlichkeiten alle gleich:

$$\Pr(A) = \Pr(B) = \Pr(R) = 1/3.$$

Richtig sind somit der zweite und der dritte Lösungsvorschlag.

b) Wenn man zum Zeitpunkt ν im Zustand B ist, ist für den Zeitpunkt $\nu + 1$ wegen $\Pr(B|B) = 0$ der Zustand B nicht möglich. Man scheitert hier bereits beim Anfangsbuchstaben „*B*": $p_{\rm B} = 0$.

Für die Berechnung von $p_{\rm A}$ ist zu beachten: Ausgehend von A geht man im Markovdiagramm zunächst zu B (mit der Wahrscheinlichkeit q), dann fünfmal im Uhrzeigersinn (jeweils mit der Wahrscheinlichkeit p) und schließlich noch von R nach A (mit der Wahrscheinlichkeit q). Das bedeutet:

$$p_{\rm A} = q^2 \cdot p^5 = 3^2/4^7 \approx 5.49 \cdot 10^{-4}.$$

In ähnlicher Weise erhält man:

$$p_{\rm R} = q \cdot p^6 = 3/4^7 \approx 1.83 \cdot 10^{-4}.$$

c) Durch Mittelung über die bedingten Wahrscheinlichkeiten erhält man:

$$\Pr(BARBARA) = p_{\rm A} \cdot \Pr(A) + p_{\rm B} \cdot \Pr(B) + p_{\rm R} \cdot \Pr(R).$$

Dies führt zu dem Ergebnis:

$$\Pr(BARBARA) = \frac{1}{3} \cdot (q^2 \cdot p^5 + 0 + q \cdot p^6) = \frac{q \cdot p^5}{3} \cdot (p+q) = \\ = \frac{q \cdot p^5}{3} \approx 2.44 \cdot 10^{-4}.$$

d) Die im Punkt c) berechnete Wahrscheinlichkeit lautet $p^5 \cdot (1-p)/3$, wobei $q = 1 - p$ berücksichtigt ist. Durch Nullsetzen des Differentials erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$5 \cdot p^4 - 6 \cdot p^5 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 5/6 \approx 0.833.$$

Damit ergibt sich ein gegenüber c) etwa um den Faktor 90 größerer Wert: Pr(*BARBARA*) ≈ 0.022.