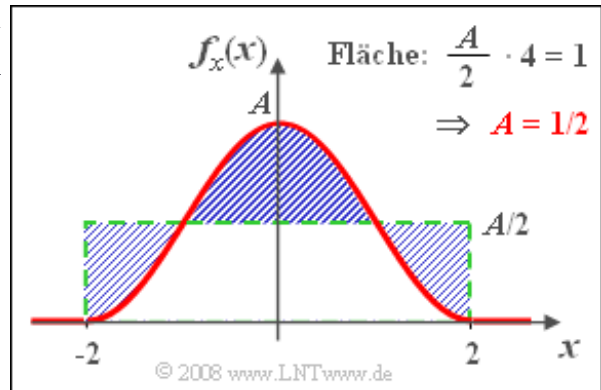


## Musterlösung zur Aufgabe A3.1

a) Richtig sind die Aussagen 1, 2 und 4:  $x$  ist wertkontinuierlich und  $y$  wertdiskret ( $M = 5$ ). Die WDF liefert keine Aussagen darüber, ob eine Zufallsgröße zeitdiskret oder zeitkontinuierlich ist.

b) Die Fläche unter der WDF muss 1 ergeben. Durch einfache geometrische Überlegungen kommt man zum Ergebnis  $A = 0.5$ .



c) Die Wahrscheinlichkeit, dass die wertkontinuierliche Zufallsgröße  $x$  einen festen Wert  $x_0$  annimmt, ist stets vernachlässigbar klein  $\Rightarrow \Pr(x = 0) = 0$ . Für die wertdiskrete Zufallsgröße  $y$  gilt dagegen gemäß der Angabe:  $\Pr(y = 0) = 0.4$  (Gewicht der Diracfunktion bei  $y = 0$ ).

d) Wegen  $\Pr(x = 0) = 0$  und der WDF-Symmetrie ergibt sich  $\Pr(x > 0) = 0.5$ .

e) Da  $y$  eine diskrete Zufallsgröße ist, addieren sich die Wahrscheinlichkeiten für  $y = 1$  und  $y = 2$ :

$$\Pr(y > 0) = \Pr(y = 1) + \Pr(y = 2) = 0.3.$$

f) Das Ereignis „ $|y| < 1$ “ ist hier identisch mit „ $y = 0$ “. Damit erhält man:

$$\Pr(|y| < 1) = \Pr(y = 0) = 0.4.$$

g) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Integral von  $-1$  bis  $+1$  über die WDF der kontinuierlichen Zufallsgröße  $x$ . Unter Berücksichtigung der Symmetrie und der angegebenen Gleichung erhält man:

$$\Pr(|x| < 1) = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \approx 0.818.$$

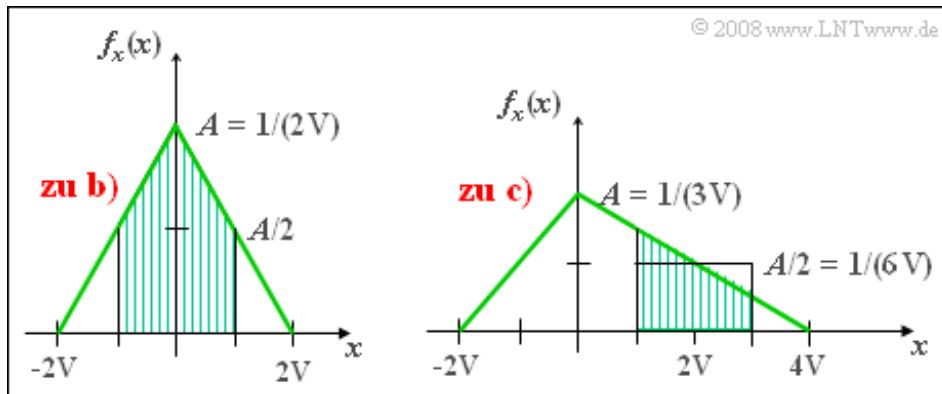
## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.1

a) Die Fläche unter der WDF muss stets den Wert 1 ergeben. Daraus folgt:

$$\frac{A}{2} \cdot 4V = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \underline{0.5 \text{ 1/V.}}$$

b) Mit  $x_{\max} = 2V$  ergibt sich die WDF nach der linken Grafik. Die Schraffierung markiert die gesuchte Wahrscheinlichkeit und man erhält durch einfache geometrische Überlegungen:

$$\Pr(|x| < 1V) = \underline{0.75}.$$



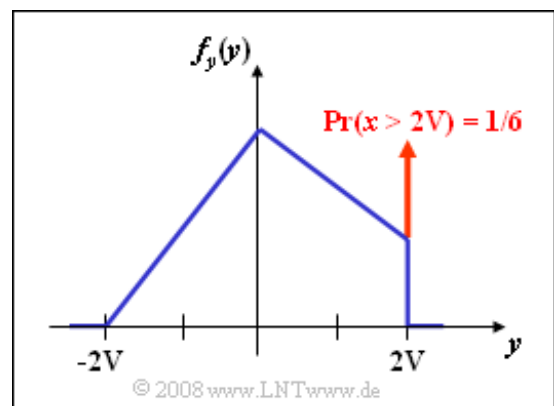
c) Mit  $x_{\max} = 4V$  erhält man die rechts dargestellte WDF und den Maximalwert  $A = 1/(3V)$ . Die schraffierte Fläche gibt wieder die gesuchte Wahrscheinlichkeit an, die man zum Beispiel über das flächengleiche Rechteck bestimmen kann:

$$\Pr(1V < x < 3V) = \frac{1}{6V} \cdot 2V = 1/3 = \underline{0.333}.$$

d) Die Wahrscheinlichkeit  $\Pr(x = 2 \text{ V})$  ist definitionsgemäß gleich null, da  $x$  eine kontinuierliche Zufallsgröße darstellt.

e) Nur die letzte Aussage der vorgegebenen Antworten ist zutreffend. Die WDF  $f_y(y)$  beinhaltet einen kontinuierlichen Anteil, aber auch eine Diracfunktion an der Stelle  $y = 2V$  mit dem Gewicht  $\Pr(x > 2V)$ .

f) Nebenstehend ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsgröße  $y$  dargestellt.



Aus der oberen rechten Abbildung zur Teilaufgabe (c) erkennt man den Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \Pr(y = 2V) &= \Pr(x > 2V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6V} \cdot 2V = \\ &= 1/6 = \underline{0.167}. \end{aligned}$$

## Musterlösung zur Aufgabe A3.2

a) Da  $x$  eine kontinuierliche Zufallsgröße und auf den Bereich  $|x| < 2$  begrenzt ist, sind alle drei vorgegebenen Aussagen richtig.

b) Bei einer diskreten Zufallsgröße steigt die Verteilungsfunktion nur schwach monoton an, d. h. es gibt außer Sprüngen ausschließlich horizontale Abschnitte der VTF. Da an den Sprungstellen jeweils der rechtsseitige Grenzwert gilt, ist demzufolge  $F_y(-2) = 0.1$ , also ungleich 0. Richtig sind somit die Aussagen 2 und 3.

c) Die VTF  $F_x(r)$  berechnet sich als das Integral von  $-\infty$  bis  $r$  über die WDF  $f_x(x)$ . Aufgrund der Symmetrie kann hierfür im Bereich  $0 \leq r \leq 2$  geschrieben werden:

$$F_x(r) = \frac{1}{2} + \int_0^r f_x(x) \, dx = \frac{1}{2} + \int_0^r \frac{1}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) \, dx.$$

In gleicher Weise wie bei Aufgabe A3.1(g) erhält man somit:

$$F_x(r) = \frac{1}{2} + \frac{r}{4} + \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(\pi/2 \cdot r),$$

$$F_x(r = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(0) = 0.500,$$

$$F_x(r = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(\pi/2) = \underline{0.909},$$

$$F_x(r = 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(\pi) = 1.000.$$

d) Aufgrund der Punktsymmetrie um  $r = 0$  bzw.  $F_x(0) = 1/2$  und wegen  $\sin(-x) = -\sin(x)$  gilt diese Formel im gesamten Bereich, wie die folgende Kontrollrechnung zeigt:

$$F_x(r = -2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(\pi) = 0,$$

$$F_x(r = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(\pi/2) = \underline{0.091}.$$

e) Für die Wahrscheinlichkeit, dass  $x$  zwischen  $-1$  und  $+1$  liegt, gilt:

$$\Pr(|x| < 1) = F_x(1) - F_x(-1) = 0.909 - 0.091 = \underline{0.818}.$$

Dieses Ergebnis stimmt exakt mit dem Resultat von Aufgabe A3.1(g) überein, das durch direkte Integration über die WDF ermittelt wurde.

f) Die VTF der diskreten Zufallsgröße  $y$  an der Stelle 0 ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten von  $-2$ ,  $-1$  und 0, also gilt  $F_y(r = 0) = 0.7$ .

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.2

a) Die Aussagen 1, 3 und 4 sind immer richtig. Ist jedoch  $x$  auf den Bereich von  $x_{\min}$  bis  $x_{\max}$  begrenzt, so ist  $F_x(r) = 0$  für  $r < x_{\min}$  und  $F_x(r) = 1$  für  $r > x_{\max}$ . In diesem Sonderfall wäre auch die Aussage 2 zutreffend.

Ein horizontaler Abschnitt in der VTF weist darauf hin, dass die Zufallsgröße in diesem Bereich keine Werte besitzt. Dagegen weist ein vertikaler Abschnitt in der VTF auf eine Diracfunktion in der WDF (an gleicher Stelle  $x_0$ ) hin. Dies bedeutet, dass die Zufallsgröße den Wert  $x_0$  sehr häufig annimmt, nämlich mit endlicher Wahrscheinlichkeit. Alle anderen Werte treten exakt mit der Wahrscheinlichkeit 0 auf.

b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann man aus der Differenz der VTF-Werte an den Grenzen berechnen:

$$\Pr(x > 0) = F_x(\infty) - F_x(0) = \underline{0.25}.$$

c) Für die Wahrscheinlichkeit, dass  $x$  größer als 0.5 ist, gilt:

$$\Pr(x > 0.5) = 1 - F_x(0.5) = 0.25 \cdot e^{-1} \approx 0.092.$$

Aus Symmetriegründen ist  $\Pr(x < -0.5)$  genauso groß. Daraus folgt:

$$\Pr(|x| > 0.5) = \underline{0.184}.$$

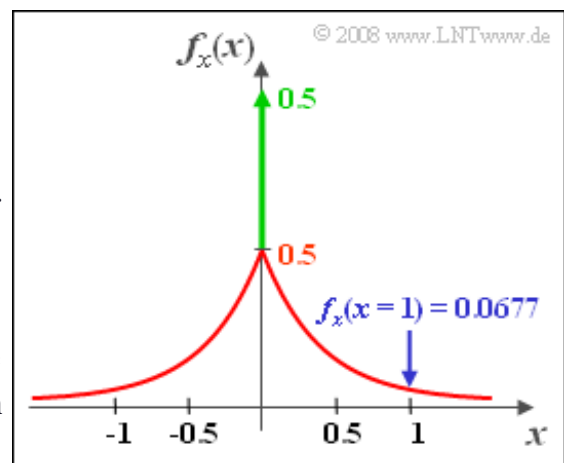
d) Die WDF erhält man aus der zugehörigen VTF durch Differenzieren der zwei Bereiche. Es ergibt sich eine zweiseitige Exponentialfunktion sowie eine Diracfunktion bei  $x = 0$ :

$$f_x(x) = 0.5 \cdot e^{-2 \cdot |x|} + 0.5 \cdot \delta(x).$$

Für  $x = 1$  ergibt sich der Zahlenwert 0.0677.

*Hinweis.* Für die zweiseitige Exponentialverteilung ist der Begriff „Laplaceverteilung“ gebräuchlich.

e) Im Bereich um 1 beschreibt  $x$  eine kontinuierliche Zufallsgröße. Die Wahrscheinlichkeit, dass  $x$  exakt den Wert 1 aufweist, ist deshalb 0.



f) In 50% der Zeit wird  $x = 0$  gelten:  $\Pr(x = 0) = 0.5$ . *Hinweis:* Die WDF eines Sprachsignals wird häufig durch eine zweiseitige Exponentialfunktion beschrieben (siehe Lernvideo zu Kap. 3.1). Die Diracfunktion bei  $x = 0$  berücksichtigt vor allem Sprachpausen – hier in 50% aller Zeiten.

## Musterlösung zur Aufgabe A3.3

a) Unter allen Umständen richtig sind die Aussagen 3, 4 und 5. Die erste Aussage ist nie erfüllt, wie aus dem *Satz von Steiner* ersichtlich ist. Die zweite Aussage gilt nur in dem einen Sonderfall  $x = 0$ . Es gibt aber auch mittelwertfreie Zufallsgrößen mit unsymmetrischer WDF. Das bedeutet: Die Aussage 6 trifft nicht immer zu.

b) Aufgrund der WDF-Symmetrie bezüglich  $x = 0$  ergibt sich für den linearen Mittelwert  $m_x \underline{=} 0$ .

c) Der Effektivwert des Signals  $x(t)$  ist gleich der Streuung  $\sigma_x$  bzw. gleich der Wurzel aus der Varianz  $\sigma_x^2$ . Da die Zufallsgröße  $x$  den Mittelwert  $m_x = 0$  aufweist, ist die Varianz nach dem *Satz von Steiner* gleich dem quadratischen Mittelwert. Dieser wird in Zusammenhang mit Signalen auch als die Leistung (bezogen auf 1  $\Omega$ ) bezeichnet. Somit gilt:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_x(x) dx = 2 \cdot \int_0^2 \frac{x^2}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) dx.$$

Mit der Beziehung  $\cos^2(\alpha) = 0.5 \cdot (1 + \cos(2\alpha))$  folgt daraus:

$$\sigma_x^2 = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx + \int_0^2 \frac{x^2}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) dx.$$

Diese beiden Standardintegrale findet man in Tabellen (bzw. auf dem Angabenblatt). Man erhält mit  $a = \pi/2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \left[ \frac{x^3}{6} + \frac{x}{a^2} \cdot \cos(a \cdot x) + \left( \frac{x^2}{2a} - \frac{1}{a^3} \right) \sin(a \cdot x) \right]_{x=0}^{x=2} \\ \Rightarrow \sigma_x^2 &= \frac{4}{3} - \frac{8}{\pi^2} \approx 0.524 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x \approx \underline{0.722}. \end{aligned}$$

d) Richtig ist der erstgenannte Vorschlag. Die Variante  $y = 2x$  würde eine zwischen  $-4$  und  $+4$  verteilte Zufallsgröße liefern. Beim letzten Vorschlag wäre der Mittelwert  $m_y = -1$ .

e) Aus der Grafik auf dem Angabenblatt ist bereits offensichtlich, dass  $m_y \underline{=} 1$  gilt.

f) Der Mittelwert ändert nichts an der Varianz und an der Streuung. Durch die Stauchung um den Faktor 2 wird die Streuung gegenüber Teilaufgabe c) ebenfalls um diesen Faktor kleiner:

$$\sigma_y = \sigma_x / 2 \approx \underline{0.361}.$$

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.3

a) Für das Moment  $k$ -ter Ordnung gilt nach den Gleichungen von Kapitel 3.3:

$$m_k = \frac{1}{2} \cdot \int_0^4 x^k \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) dx.$$

Dies führt zu dem Ergebnis:

$$m_k = \frac{x^{k+1}}{2 \cdot (k+1)} \Big|_0^4 - \frac{x^{k+2}}{8 \cdot (k+2)} \Big|_0^4 = \frac{2 \cdot 4^k}{(k+1) \cdot (k+2)}.$$

Daraus erhält man für den linearen Mittelwert ( $k = 1$ ):

$$m_x = 4/3 \approx \underline{1.333}.$$

b) Der quadratische Mittelwert ( $k = 2$ ) beträgt  $m_2 = 8/3$ . Daraus folgt mit dem *Satz von Steiner*:

$$\sigma_x^2 = \frac{8}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow \sigma_x \approx \underline{0.943}.$$

c) Mit  $m_1 = 4/3$ ,  $m_2 = 8/3$  und  $m_3 = 32/5$  erhält man mit der angegebenen Gleichung für das Zentralmoment dritter Ordnung:  $\mu_3 = 64/135 \approx 0.474$ . Daraus folgt für die *Charliersche Schiefe*:

$$S_x = \frac{64/135}{\left(\sqrt{8/9}\right)^3} = \frac{\sqrt{8}}{5} \approx \underline{0.566}.$$

Aufgrund der unsymmetrischen WDF ist  $S_x \neq 0$ .

d) Bei symmetrischer WDF sind alle ungeraden Momente 0, unter anderem auch der Mittelwert  $m_y$ . Deshalb gibt es hinsichtlich der Zufallsgröße  $y$  keinen Unterschied zwischen den Momenten  $m_k$  und den Zentralmomenten  $\mu_k$ .

Die Momente  $m_k$  mit geradzahligem  $k$  sind für die Zufallsgrößen  $x$  und  $y$  gleich. Offensichtlich wird dies an den Zeitmittelwerten. Da  $x^2(t) = y^2(t)$  ist, sind für  $k = 2n$  auch die Momente gleich:

$$m_k = m_{2n} = \dots \int [x^2(t)]^n dx = \dots \int [y^2(t)]^n dy.$$

Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1, 3 und 4.

e) Mit dem Ergebnis aus b) gilt:

$$m_2 = \mu_2 = \sigma_y^2 = \frac{8}{3} = 2.667 \Rightarrow \sigma_y \approx \underline{1.633}.$$

f) Das Zentralmoment vierter Ordnung ist bei symmetrischer WDF gleich dem Moment  $m_4$ . Aus der im Punkt a) berechneten allgemeinen Gleichung erhält man  $\mu_4 = 256/15$ . Daraus folgt für die Kurtosis:

$$K_y = \frac{\mu_4}{\sigma_y^4} = \frac{256/15}{(8/3)^2} \approx \underline{2.4}.$$

Dieser Zahlenwert gilt für die Dreieck-WDF allgemein und liegt zwischen den Kurtosiswerten von Gleichverteilung ( $K = 1.8$ ) und Gaußverteilung ( $K = 3$ ). Dies ist eine qualitative Bewertung der Tatsache, dass hier die Ausläufer ausgeprägter sind als bei einer gleichverteilten Zufallsgröße, aber aufgrund der Begrenzung weniger stark als bei Gaußschen Größen.

Anschließend soll noch nachgewiesen werden, dass auch die unsymmetrische Dreieck-WDF  $f_x(x)$  entsprechend der oberen Skizze auf dem Angabenblatt die gleiche Kurtosis besitzt:

$$\begin{aligned}\mu_4 &= m_4 - 4 \cdot m_3 \cdot m_1 + 6 \cdot m_2 \cdot m_1^2 - 3 \cdot m_1^4 = \\ &= \frac{256}{15} - 4 \cdot \frac{32}{5} \cdot \frac{4}{3} + 6 \cdot \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{15 \cdot 9}\end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis der Teilaufgabe (c)  $\Rightarrow \sigma_x^2 = 8/9$  folgt daraus:

$$K_x = \frac{256/(15 \cdot 9)}{8/9 \cdot 8/9} = 2.4.$$

## Musterlösung zur Aufgabe A3.4

a)  $C_x(\Omega)$  ist nicht die Fouriertransformierte zu  $f_x(x)$ , sondern die Fourierrücktransformierte:

$$C_x(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) \cdot e^{j\Omega x} dx.$$

Auch bei dieser ist der Realteil stets gerade und der Imaginärteil ungerade. Für  $\Omega = 0$  gilt:

$$C_x(\Omega = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1.$$

Die letzte Alternative trifft nicht immer zu: Eine zweipunktverteilte Zufallsgröße  $x \in \{-1; +3\}$  mit den Wahrscheinlichkeiten 0.75 und 0.25 ist zwar mittelwertfrei ( $m_x = 0$ ), besitzt aber trotzdem eine komplexe charakteristische Funktion. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 2, 3 und 4.

b) Entsprechend der allgemeinen Definition gilt:

$$C_y(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(y) \cdot e^{j\Omega y} dy = 0.5 \int_1^3 e^{j\Omega y} dy.$$

Nach Lösen dieses Integrals ergibt sich:

$$C_y(\Omega) = \frac{e^{j3\Omega} - e^{j\Omega}}{2j\Omega} = \frac{e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}}{2j\Omega} \cdot e^{j2\Omega}.$$

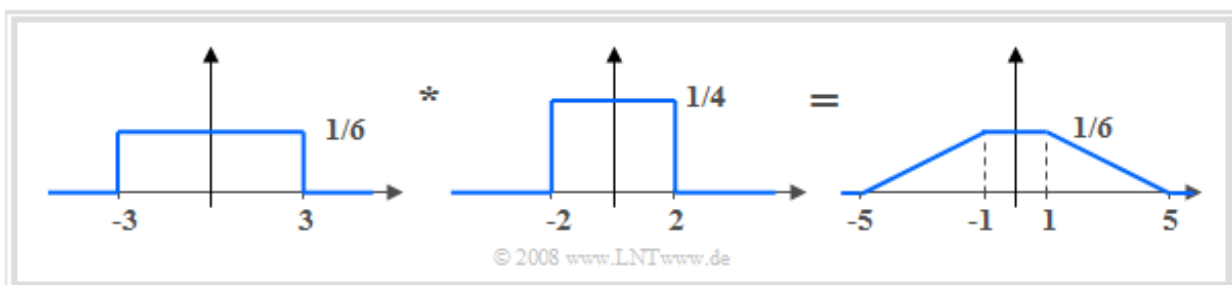
Mit dem Satz von Euler kann hierfür auch geschrieben werden:

$$C_y(\Omega) = \frac{\sin(\Omega)}{\Omega} \cdot e^{j2\Omega}.$$

Für  $\Omega = \pi/2$  erhält man somit einen rein reellen Zahlenwert:

$$\operatorname{Re}[C_y(\Omega = \pi/2)] = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} \cdot e^{j\pi} = -\frac{2}{\pi} \approx -0.637, \quad \operatorname{Im}[C_y(\Omega = \pi/2)] = 0.$$

c) Aus der angegebenen Korrespondenz kann abgelesen werden, dass  $\operatorname{si}(3\Omega)$  auf eine zwischen  $\pm 3$  gleichverteilte Zufallsgröße zurückgeht und  $\operatorname{si}(2\Omega)$  die Transformierte einer Gleichverteilung zwischen  $\pm 2$  angibt. In der charakteristischen Funktion sind diese beiden Anteile multiplikativ verknüpft. Damit ist die resultierende WDF  $f_z(z)$  die Faltung dieser beiden Rechteckfunktionen:



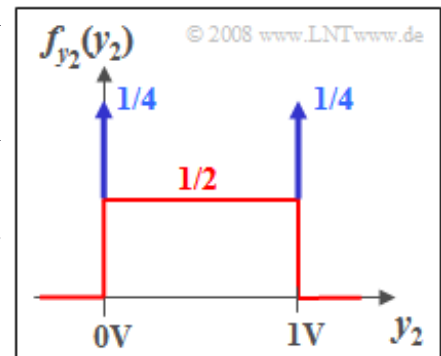
Die drei WDF-Parameter lauten somit:

$$\underline{a = 1}, \quad \underline{b = 5}, \quad \underline{c = 1/6}.$$



## Musterlösung zur Aufgabe A3.5

a) Die Zufallsgröße  $y_1$  ist gleichverteilt und dadurch natürlich auch eine kontinuierliche Zufallsgröße. Die WDF von  $y_2$  weist diskrete Anteile bei 0 V und 1 V auf. Zwischen diesen zwei Begrenzungen gibt es selbstverständlich auch kontinuierliche Anteile. In diesem Bereich gilt  $f_x(x) = 1/2$ . Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1, 3 und 4.



b) Der lineare Mittelwert  $m_{y_1} = 1V$  ist aus der Angabenskizze direkt abzulesen, könnte aber auch formal mit der Gleichung für die Gleichverteilung (zwischen 0 V und 2 V) berechnet werden. Eine weitere Lösungsmöglichkeit bietet die Beziehung:

$$m_{y_1} = m_x \cdot H_1(f = 0) = 1V \cdot 1 \underline{=} 1V.$$

c) Eigentlich müsste die Mittelung über den gesamten Zeitbereich (beidseitig bis ins Unendliche) erfolgen. Aus Symmetriegründen genügt jedoch die Mittelung über das Zeitintervall  $0 \leq t \leq T$ :

$$P_{y_1} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T y_1(t)^2 dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (2V \cdot \frac{t}{T})^2 dt = 4/3 V^2 \underline{=} 1.333 V^2.$$

d) Die Scharmittelung liefert das gleiche Ergebnis. Mit der WDF  $f_{y_1}(y_1) = 1/(2V)$  gilt nämlich:

$$P_{y_1} = \int_0^{2V} y_1^2 \cdot f_{y_1}(y_1) dy_1 = \frac{1}{2V} \cdot \int_0^{2V} y_1^2 dy_1 = \frac{8 V^3}{3 \cdot 2 V} \underline{=} 1.333 V^2.$$

Die Varianz kann mit dem Satz von Steiner ermittelt werden und ergibt  $4/3 V^2 - 1 V^2 = 1/3 V^2$ . Die Wurzel daraus ist die gesuchte Streuung (der Effektivwert):

$$\sigma_{y_1} \underline{=} 0.577 V.$$

e) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist das Integral über die WDF von 0.75V bis 2V, also 0.625.

f) Die WDF besteht aus zwei Diracfunktionen bei 0 V und 1 V (jeweils mit dem Gewicht 1/4) und einem konstanten kontinuierlichen Anteil von 0.5 (mal 1/V). Bei  $y_2 = 0.5 V$  gibt es deshalb nur den kontinuierlichen Anteil.

g) Der Mittelwert  $m_{y_2} \underline{=} 0.5V$  kann direkt aus obiger WDF-Skizze abgelesen werden oder – wie bei b) – über die Beziehung  $m_{y_2} = m_x \cdot H_2(f = 0) = 1 V \cdot 0.5$  berechnet werden.

h) Mit obiger WDF gilt für die Leistung:

$$P_{y_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} y_2^2 \cdot f_{y_2}(y_2) dy_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 V^2 + \frac{1}{4} \cdot 1 V^2 = 5/12 V^2 = 0.417 V^2.$$

Der erste Anteil geht auf die kontinuierliche WDF zurück, der zweite auf die WDF-Diracfunktion bei 1 V. Die Diracfunktion bei 0 V liefert keinen Beitrag zur Leistung. Daraus folgt für den Effektivwert:

$$\sigma_{y_2} = \sqrt{5/12V^2 - 1/4V^2} = \sqrt{1/6V^2} \approx \underline{0.409 V}.$$

**i)** Diese Wahrscheinlichkeit setzt sich ebenfalls aus zwei Anteilen zusammen:

$$\Pr(y_2 > 0.75V) = \Pr(0.75V \leq y_2 < 1V) + \Pr(y_2 = 1V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \approx \underline{0.375}.$$

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.5

a) Es liegt eine Gleichverteilung vor und es gilt für die WDF im Bereich  $-\pi < \alpha \leq +\pi$ :

$$f_{\alpha}(\alpha) = 1/(2 \cdot \pi).$$

Bei  $\alpha = 0$  ergibt sich somit – wie bei allen zulässigen Werten auch – der WDF-Wert 0.159.

b) Es gilt  $E[\alpha] = 0$ . Es hat keinen Einfluss, dass  $\alpha = +\pi$  erlaubt, aber  $\alpha = -\pi$  ausgeschlossen ist.

c) Für die Varianz gilt:

$$\sigma_{\alpha}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha^2 \cdot f_{\alpha}(\alpha) \, d\alpha = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\alpha^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2 \cdot \pi^3}{2 \cdot \pi \cdot 3} = \frac{\pi^2}{3} = 3.29.$$

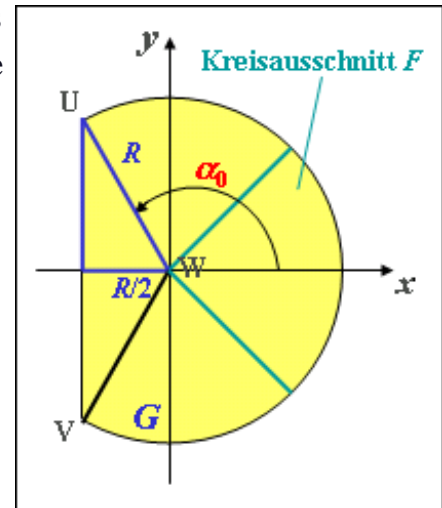
Damit ist die Streuung  $\sigma_{\alpha} = \underline{1.814}$ .

d) Da der vorgegebene Kreisausschnitt genau ein Viertel der gesamten Kreisfläche ausmacht, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit 25%.

e) Aus einfachen geometrischen Überlegungen (rechtwinkliges Dreieck, in der nebenstehenden Skizze blau markiert) erhält man die Bestimmungsgleichung für den Winkel  $\alpha_0$ :

$$\cos(\pi - \alpha_0) = \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \pi - \alpha_0 = \frac{\pi}{3} \quad (60^\circ).$$

Daraus folgt  $\alpha_0 = 2\pi/3 = \underline{2.094}$  (dies entspricht  $120^\circ$ ).



f) Richtig ist der Lösungsvorschlag 3: Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)  $f_{\alpha}(\alpha)$  ist für einen gegebenen Winkel  $\alpha$  direkt proportional zum Abstand  $A$  zwischen der Antenne und der Begrenzungslinie. Bei  $\alpha = \pm 2\pi/3$  ( $120^\circ$ ) gilt  $A = R$ , bei  $\alpha = \pm\pi$  ( $180^\circ$ ) dagegen  $A = R/2$ . Dazwischen wird der Abstand sukzessive kleiner. Das heißt: die WDF fällt zu den Rändern hin ab. Der Abfall erfolgt hierbei nach folgendem Verlauf:

$$A = \frac{R/2}{\cos(\pi - \alpha)}.$$

g) Die Fläche  $G$  kann aus der Summe des  $240^\circ$ -Sektors und des durch die Eckpunkte  $UVW$  gebildeten Dreiecks berechnet werden:

$$G = \frac{2}{3} \cdot R^2 \cdot \pi + \frac{R}{2} \cdot R \cdot \sin(60^\circ) = R^2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot \pi} \right).$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich als das Verhältnis der Flächen  $F$  und  $G$  (siehe Bild):

$$\Pr(-\pi/4 \leq \alpha \leq +\pi/4) = \frac{F}{G} = \frac{1/4}{2/3 + \sin(60^\circ)/(2\pi)} = \frac{0.25}{0.805} \approx \underline{0.311}.$$

Obwohl sich gegenüber Punkt d) an der Fläche  $F$  nichts geändert hat, wird die Wahrscheinlichkeit nun aufgrund des kleineren Gebietes  $G$  um den Faktor  $1/0.805 \approx 1.242$  größer.

**h)** Da die WDF-Fläche insgesamt konstant gleich 1 ist und die WDF an den Rändern abnimmt, muss sie im Bereich  $|\alpha| < 2\pi/3$  einen größeren Wert als unter a) berechnet besitzen. Mit den Ergebnissen aus a) und g) gilt:

$$f_\alpha(\alpha = 0) = \frac{1/(2\pi)}{2/3 + \sin(60^\circ)/(2\pi)} = \frac{1}{4 \cdot \pi/3 + \sin(60^\circ)} \approx \underline{0.198}.$$

Wie die unter Punkt g) berechnete Wahrscheinlichkeit nimmt auch gleichzeitig der WDF-Wert im Bereich  $|\alpha| < 2\pi/3$  um den Faktor 1.242 zu, wenn das Versorgungsgebiet kleiner wird.

## Musterlösung zur Aufgabe A3.6

a) Das Gleichsignal  $s(t)$  ist natürlich nicht gleichverteilt, vielmehr besteht dessen WDF aus nur einer Diracfunktion bei 2 V mit Gewicht 1. Das Signal  $n(t)$  ist gaußverteilt und mittelwertfrei. Deshalb ist auch das Summensignal  $x(t)$  gaußverteilt, aber nun mit Mittelwert  $m_x = 2$  V. Dieser rührt allein vom Gleichsignal  $s(t) = 2$  V her. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 2 und 4.

b) Nach dem Satz von Steiner gilt:

$$\sigma_x^2 = m_{2x} - m_x^2.$$

Der quadratische Mittelwert ist gleich der (auf 1  $\Omega$  bezogenen) Gesamtleistung  $P_x = 5$  V<sup>2</sup>. Mit dem Mittelwert  $m_x = 2$  V folgt daraus für die Streuung:  $\sigma_x = 1$  V.

c) Die Verteilungsfunktion (VTF) einer gaußverteilten Zufallsgröße mit Mittelwert  $m_x$  und Streuung  $\sigma_x$  lautet mit dem Gaußschen Fehlerintegral:

$$F_x(r) = \Phi\left(\frac{r - m_x}{\sigma_x}\right).$$

Die Verteilungsfunktion an der Stelle  $r = 0$  V ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass  $x$  kleiner oder gleich 0 V ist. Bei kontinuierlichen Zufallsgrößen gilt aber auch  $\Pr(x \leq r) = \Pr(x < r)$ . Mit dem komplementären Gaußschen Fehlerintegral erhält man somit:

$$\Pr(x < 0 \text{ V}) = \Phi\left(\frac{-2 \text{ V}}{1 \text{ V}}\right) = Q(2) = \underline{2.27\%}.$$

d) Wegen der Symmetrie um den Wert 2V ergibt sich hierfür die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich 2.27%.

e) Die Wahrscheinlichkeit, dass  $x(t)$  größer ist als 3V, ergibt sich zu

$$\Pr(x > 3 \text{ V}) = 1 - F_x\left(\frac{3 \text{ V} - 2 \text{ V}}{1 \text{ V}}\right) = Q(1) = 0.1587.$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhält man daraus:

$$\Pr(3 \text{ V} \leq x \leq 4 \text{ V}) = \Pr(x > 3 \text{ V}) - \Pr(x > 4 \text{ V}).$$

Dies liefert den Zahlenwert  $0.1587 - 0.0227 = \underline{13.6\%}$ .

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.6

a) Nach dem zentralen Grenzwertsatz erhält man für die Summe vieler unabhängiger Größen eine Gaußverteilung. Im Umkehrschluss ergibt sich bei nur wenigen und dazu noch abhängigen Aufgaben keine Gaußverteilung. Eine einzige Ja/Nein-Frage führt zu einer Zweipunktverteilung (0 Punkte oder Maximalpunktzahl). Auch bei Einhaltung dieser Gebote wird man bei sehr wenigen Teilnehmern nicht mit einer Normalverteilung rechnen können. Richtig sind demnach die Lösungsvorschläge 1 und 3.

b) Man bekommt 1.0 mit 82 Punkten oder mehr. Deshalb gilt mit Mittelwert 60 und Streuung 10:

$$\Pr(z \geq 82) = Q\left(\frac{82 - 60}{10}\right) = Q(2.2) = 0.0139.$$

Bei 1000 Teilnehmern folgt daraus  $N_{1.0} = 14$ .

c) Mit weniger als 46 Punkten hat man die Prüfung nicht bestanden:

$$\Pr(z < 46) = \Pr(z \leq 46) = \Phi\left(\frac{46 - 60}{10}\right) = \Phi(-1.4) = Q(1.4) = 0.0807.$$

Also müssen wohl 81 Studenten nochmals antreten.

d) Die Differenz  $82 - 46 = 36$  muss auf neun Notenstufen (1.3, ... , 4.0) aufgeteilt werden. Jedes Intervall umfasst somit 4 Punkte. Beispielsweise erhält man die Note 3.0, wenn man 58 bis 62 Punkte erreicht. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Punktzahl in diesem Bereich liegt, ergibt sich zu

$$\Pr(58 < z < 62) = \Phi\left(\frac{62 - 60}{10}\right) - \Phi\left(\frac{58 - 60}{10}\right).$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie erhält man:

$$\begin{aligned} \Pr(58 < z < 62) &= \Phi(0.2) - \Phi(-0.2) \\ &= 0.5792 - 0.4207 = 0.1587 \quad \underline{(159 \text{ Teilnehmer})}. \end{aligned}$$

$z$  ist als kontinuierliche Zufallsgröße aufzufassen. Deshalb ist die Punktzahl 62 gleichzeitig die obere Grenze für den 3.0-Bereich als auch die untere Grenze für die Note 2.7 ist. Wäre  $z$  nur ganzzahlig, so müsste „62“ entweder der Note 3.0 oder der Note 2.7 zugeordnet werden.

e) Analog zur Musterlösung von d) gilt für die Note 2.7:

$$\Pr(62 < z < 66) = \Phi(0.6) - \Phi(0.2) = 0.7257 - 0.5792 = 0.1465.$$

Aus Symmetriegründen erhält man für die Note 3.3 den gleichen Wert:

$$\Pr(54 < z < 58) = \Phi(-0.2) - \Phi(-0.6) = Q(0.2) - Q(0.6) = 0.1465.$$

Also erhalten je 146 Teilnehmer die Note 2.7 bzw. 3.3.

f) Mit der hier getroffenen Punkte-/Notenzuordnung sind nicht nur die Punkte um  $m_x = 60$  symmetrisch verteilt, sondern auch die Noten um „3.0“. Es gibt genau so viele „2.7“ wie „3.3“ (um  $\pm 0.3$  von 3.0 entfernt), genau so viele „2.3“ wie „3.7“ ( $3.0 \pm 0.7$ ) und genau so viele „1.0“ wie „5.0“. Deshalb ergibt sich die Mittelnote exakt zu 3.0.

## Musterlösung zur Aufgabe A3.7

a) Die beiden letzten Aussagen stimmen: Bezüglich der Zufallsgröße  $n_B$  liegt der klassische Fall einer Binomialverteilung vor: Es wird die Summe über  $N$  binäre Zufallsgrößen gebildet. Die möglichen Werte von  $n_B$  liegen somit zwischen 0 und  $N$ . Der lineare Mittelwert ergibt

$$m_{n_B} = p_B \cdot N = 10^{-3} \cdot 10^5 = 100.$$

b) Für die Streuung der Binomialverteilung gilt mit guter Näherung:

$$\sigma_{n_B} = \sqrt{N \cdot p_B \cdot (1 - p_B)} \approx \underline{10}.$$

c) Mögliche Werte von  $h_B$  sind alle ganzzahligen Vielfachen von  $1/N$ , die zwischen 0 und 1 liegen. Für den Mittelwert erhält man:

$$m_{h_B} = m_{n_B}/N = p_B = 10^{-3}.$$

Die Streuung ergibt sich zu

$$\sigma_{h_B} = \frac{\sigma_{n_B}}{N} = \sqrt{\frac{p_B \cdot (1 - p_B)}{N}} \approx \underline{10^{-4}}.$$

d) Richtig ist der erste Vorschlag. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Pr(h_B > p_B + \varepsilon) &= Q\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{h_B}}\right), & \Pr(h_B < p_B - \varepsilon) &= Q\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{h_B}}\right), \\ \Rightarrow \Pr(|h_B - p_B| \leq \varepsilon) &= 1 - 2 \cdot Q\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{h_B}}\right). \end{aligned}$$

e) Man erhält mit den Zahlenwerten  $\varepsilon = \sigma_{h_B} = 10^{-4}$ :

$$p_\varepsilon = 1 - 2 \cdot Q\left(\frac{10^{-4}}{10^{-4}}\right) = 1 - 2 \cdot Q(1) \approx \underline{0.684}.$$

$\Rightarrow$  Bestimmt man die Bitfehlerquote per Simulation über  $10^5$  Symbole, so erhält man mit einem Konfidenzniveau von 68.4% einen Wert zwischen  $0.9 \cdot 10^{-3}$  und  $1.1 \cdot 10^{-3}$ , wenn  $p_B = 10^{-3}$  ist.

f) Aus der Beziehung  $p_\varepsilon = 1 - 2 \cdot Q(\alpha) = 0.95$  folgt direkt:

$$\alpha = Q^{-1}\left(\frac{1 - p_\varepsilon}{2}\right) = Q^{-1}(0.025) \approx \underline{1.96} \approx 2.$$

g) Es muss  $\alpha = \varepsilon/\sigma_{h_B}$  gelten. Mit dem Ergebnis aus b) folgt dann:

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{p_B \cdot (1 - p_B)/N}} \geq 2 \quad \Rightarrow \quad N \geq \frac{4 \cdot p_B \cdot (1 - p_B)}{\varepsilon^2} \approx \frac{4 \cdot 10^{-3}}{10^{-8}} = \underline{400000}.$$

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.7

- a) Beide Aussagen sind richtig. Bei  $f$  handelt es sich um den klassischen Fall einer binomialverteilten Zufallsgröße, nämlich der Summe über  $N$  Binärwerte (0 oder 1). Da das Produkt  $N \cdot p = 64$  und dadurch sehr viel größer als 1 ist, kann die Binomialverteilung mit guter Näherung durch eine Poissonverteilung mit der Rate  $\lambda = 64$  angenähert werden.
- b) Der Mittelwert ergibt sich zu  $m_f = N \cdot p = \underline{64}$  unabhängig davon, ob man von der Binomial- oder der Poissonverteilung ausgeht.
- c) Für die Streuung erhält man:

$$\sigma_f = \sqrt{64000 \cdot 10^{-3} \cdot 0.999} \approx \sqrt{64} = 8.$$

Der Fehler durch Anwendung der Poisson- anstelle der Binomialverteilung ist kleiner als 0.0005.

- d) Bei einer Gaußschen Zufallsgröße  $f$  mit Mittelwert 64 ist die Wahrscheinlichkeit  $\Pr(f \leq 64)$  etwa 50%. *Anmerkung:* Bei einer kontinuierlichen Zufallsgröße wäre die Wahrscheinlichkeit exakt 0.5. Da  $f$  nur ganzzahlige Werte annehmen kann, ist sie hier geringfügig größer.

- e) Mit  $\lambda = N \cdot p$  lautet die entsprechende Bedingung:

$$Q\left(\frac{64 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \leq 0.002 \quad \text{bzw.} \quad \frac{64 - \lambda}{\sqrt{\lambda}} > 2.9.$$

Der Maximalwert von  $\lambda$  kann nach folgender Gleichung ermittelt werden:

$$\lambda + 2.9 \cdot \sqrt{\lambda} - 64 = 0.$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung lautet:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{-2.9 \pm \sqrt{8.41 + 256}}{2} = 6.68.$$

Daraus folgt direkt  $\lambda = 44.6$  und  $p_{\max} = \underline{0.69 \cdot 10^{-3}}$ . Die zweite Lösung obiger Gleichung ist negativ und muss nicht weiter berücksichtigt werden.



## Musterlösung zur Aufgabe A3.8

a) Die Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ergibt

$$F = 2 \cdot A \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \frac{2 \cdot A}{-2} \cdot e^{-2x} \Big|_0^{\infty} = A.$$

Da diese Fläche definitionsgemäß gleich 1 sein muss, gilt  $A = 1$ .

b) Alle Momente mit ungeradem Index  $k$  sind aufgrund der symmetrischen WDF gleich Null. Bei geradem  $k$  kann der linke Teil der WDF in den rechten gespiegelt werden und man erhält:

$$m_k = 2 \cdot \int_0^{\infty} x^k \cdot e^{-2x} dx = \frac{2 \cdot \Gamma(k+1)}{2^{k+1}} = \frac{k!}{2^k}.$$

Daraus folgt mit  $k = 2$  unter Berücksichtigung des Mittelwertes  $m_1 = 0$ :

$$m_2 = \frac{2!}{2^2} = 0.5 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_x = \sqrt{m_2} = \underline{0.707}.$$

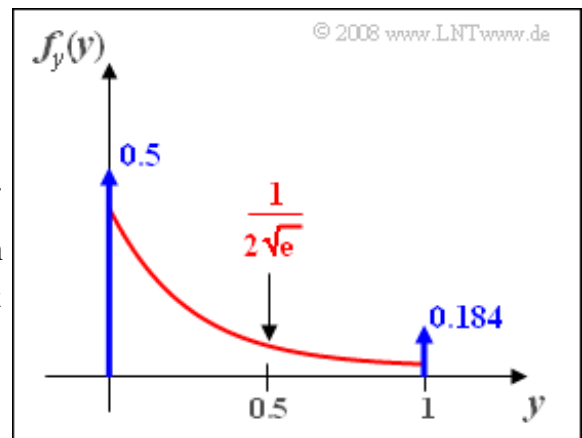
c) Das Zentralmoment vierter Ordnung ist  $\mu_4 = m_4 = 4!/2^4 = 1.5$ . Daraus folgt für die Kurtosis:

$$K_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} = \frac{1.5}{0.25} = \underline{6}.$$

d) Mit dem Ergebnis aus a) erhält man:

$$\Pr(x > 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2e} = \underline{0.184}.$$

e) Die WDF  $f_y(y)$  beinhaltet eine Diracfunktion an der Stelle  $y = 0$  mit dem Gewicht  $\Pr(x < 0) = 0.5$  und zudem eine weitere Diracfunktion bei  $y = 1$  mit dem Gewicht  $\Pr(x > 0.5) = 0.184$ . Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1 und 3.



f) Der Signalbereich  $0 \leq x \leq 0.5$  wird am Ausgang auf den Bereich  $0 \leq y \leq 1$  linear abgebildet. Die Ableitung der Kennlinie ist hier konstant gleich 2 (Verstärkung). Daraus erhält man:

$$f_y(y) = \frac{f_x(x)}{|g'(x)|} \Big|_{x=h(y)} = \frac{e^{-2x}}{2} \Big|_{x=y/2} = 0.5 \cdot e^{-y}.$$

Bei  $y = 0.5$  beträgt dementsprechend der kontinuierliche WDF-Anteil etwa 0.304.

g) Für den Mittelwert der Zufallsgröße  $y$  gilt:

$$m_y = \frac{1}{2e} \cdot 1 + \int_0^1 \frac{y}{2} \cdot e^{-y} dy = \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} = \underline{0.316}.$$

Der erste Term stammt vom Dirac bei  $y = 1$ , der zweite vom kontinuierlichen WDF-Anteil.

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.8

a) Die Gleichung der Kreisfläche ist gleichzeitig die Transformationskennlinie:  $A = \pi \cdot r^2$ . Daraus ergibt sich mit  $r = 6$  für den Minimalwert:  $A_{\min} = 113.09$ .

b) Entsprechend gilt mit  $r = 8$  für den Maximalwert:  $A_{\max} = 201.06$ .

c) Am einfachsten löst man diese Aufgabe wie folgt:

$$m_A = E[A] = E[g(r)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(r) \cdot f_r(r) dr.$$

Mit  $g(r) = \pi \cdot r^2$  und  $f_r(r) = 1/2$  im Bereich von 6 ... 8 erhält man:

$$m_A = \int_6^8 \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 dr = \frac{\pi}{6} \cdot (8^3 - 6^3) = 154.98.$$

d) Die WDF der transformierten Zufallsgröße  $A$  lautet:

$$f_A(A) = \frac{f_r(r)}{|g'(r)|} \Big|_{r=h(y)=\sqrt{A/\pi}}.$$

Im Bereich zwischen 113.09 und 201.06 (siehe Teilaufgaben a und b) gilt dann:

$$f_A(A) = \frac{1/2}{2 \cdot \pi \cdot r} \Big|_{r=\sqrt{A/\pi}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{A \cdot \pi}}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhält man durch Integration:

$$\Pr(A > 150) = \int_{150}^{A_{\max}} \frac{1}{4 \cdot \sqrt{A \cdot \pi}} dA = \frac{2 \cdot \sqrt{A}}{4 \cdot \sqrt{\pi}} \Big|_{150}^{A_{\max}}.$$

Die obere Integrationsgrenze liefert den Wert 4 und die untere Grenze 3.455. Daraus ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu 0.545.

e) Für die Kreisringfläche  $R$  gilt bei gegebenem Radius  $r$ :

$$R = (r + b/2)^2 \cdot \pi - (r - b/2)^2 \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot b.$$

Zwischen  $R$  und  $r$  besteht also ein linearer Zusammenhang.  $\Rightarrow R$  ist ebenfalls gleichverteilt und zwar unabhängig von der Breite  $b$ , solange  $b$  sehr viel kleiner als  $r$  ist. Für den Minimalwert gilt:

$$R_{\min} = 2\pi \cdot 6 \cdot 0.1 \approx 3.77.$$

f) Entsprechend ist der Maximalwert:

$$R_{\max} = 2\pi \cdot 8 \cdot 0.1 \approx 5.03.$$

g) Aufgrund des linearen Zusammenhangs zwischen der Kreisringfläche  $R$  und des Radius  $r$  führt der mittlere Radius  $r = 7$  auch zur mittleren Kreisringfläche:

$$E[R] = 2\pi \cdot 7 \cdot 0.1 \approx 4.4.$$

## Musterlösung zur Aufgabe A3.9

a) Richtig sind die Aussagen 1 und 3: Da  $x$  nur Werte zwischen  $\pm 1$  annehmen kann, ist der Verlauf der Kennlinie außerhalb dieses Bereichs für die Zufallsgröße  $y$  ohne Belang.

Die Bedingung  $g(-x) = g(x)$  muss nicht eingehalten werden. Es gibt beliebig viele Kennlinien, die die gewünschte WDF erzeugen können. Allerdings ist die unter Punkt e) berechnete Kennlinie punktsymmetrisch:  $g(-x) = -g(x)$ .

Schon die grafischen Darstellungen der beiden Dichtefunktionen zeigen, dass  $\sigma_y$  kleiner als  $\sigma_x$  ist.

b) Das Integral über die WDF muss stets gleich 1 sein. Daraus folgt:

$$\int_{-1}^1 A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot y\right) dy = \frac{A \cdot 4}{\pi} \Rightarrow A = \frac{\pi}{4} \equiv 0.785.$$

c) Die Transformationsformel kann wie folgt umgeformt werden:

$$f_y(y) = \frac{f_x(x)}{|g'(x)|} \Big|_{x=h(y)} = f_x(x) \cdot |h'(y)| \Big|_{x=h(y)}.$$

Die Umkehrfunktion  $h(y)$  einer monoton ansteigenden Kennlinie steigt ebenfalls monoton an. Deshalb kann auf die Betragsbildung verzichtet werden und man erhält:

$$h'(y) = \frac{f_y(y)}{f_x(x) \Big|_{x=h(y)}} = \pi/2 \cdot \cos(\pi/2 \cdot y).$$

An der Stelle  $y = 0$  hat die Steigung den Wert  $\pi/2 \approx 1.571$ .

d) Man erhält durch (unbestimmte) Integration:

$$h(y) = \int h'(y) dy + C = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot y\right) + C.$$

Die Nebenbedingung  $h(y = 0) = 0$  führt zur Konstanten  $C = 0$  und damit zum Ergebnis:

$$h(y) = \sin(\pi/2 \cdot y) \Rightarrow h(y = 1) \equiv 1.$$

e) Die Umkehrfunktion der in (d) ermittelten Funktion  $x = h(y)$  lautet:

$$y = g(x) = 2/\pi \cdot \arcsin(x).$$

Diese Kennlinie steigt im Bereich  $-1 \leq x \leq 1$  von  $y = -1$  bis  $y = +1$  monoton an. Der gesuchte Wert ist also  $g(x = +1) \equiv +1$ .

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.9

**a)** Aufgrund des Wertebereichs von  $x$  und der gegebenen Kennlinie kann  $y$  keine Werte kleiner als 0 bzw. größer als 1 annehmen. Der Wert  $y = 0$  kann ebenfalls nicht auftreten, da weder  $x = 0$  noch  $x = 2$  möglich sind. Mit diesen Eigenschaften ergibt sich sicher  $m_y < 1$ , also ein kleinerer Wert als für  $m_x$ . Richtig sind also der zweite und der dritte Lösungsvorschlag.

**b)** Zur Lösung dieser Aufgabe könnte man beispielsweise zunächst die WDF  $f_y(y)$  bestimmen und daraus in gewohnter Weise  $m_y$  berechnen. Zum gleichen Ergebnis führt der direkte Weg:

$$m_y = E[y] = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_x(x) dx.$$

Mit den aktuellen Funktionen  $g(x)$  und  $f_x(x)$  erhält man:

$$m_y = \int_0^2 \sin^3\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) dx = \frac{2}{3 \cdot \pi} \cdot \cos^3\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - \frac{2}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{2} \cdot x\right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3 \cdot \pi} \approx 0.849.$$

**c)** In Analogie zu Punkt b) gilt:

$$m_{2y} = E[y^2] = E[g^2(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) \cdot f_x(x) dx.$$

Dies führt zum Ergebnis:

$$m_{2y} = \int_0^2 \sin^4\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) dx = \frac{3}{8} \cdot x - \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sin(\pi \cdot x) + \frac{1}{16 \cdot \pi} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot x) \Big|_0^2 = 0.75.$$

Mit dem Ergebnis aus b) folgt somit für die Streuung:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{3}{4} - \left(\frac{8}{3 \cdot \pi}\right)^2} \approx 0.172.$$

**d)** Aufgrund der Symmetrie von WDF  $f_x(x)$  und Kennlinie  $y = g(x)$  um  $x = 1$  liefern die beiden Bereiche „ $0 \leq x \leq 1$ “ und „ $1 \leq x \leq 2$ “ jeweils den gleichen Beitrag für  $f_y(y)$ . Im ersten Bereich ist die Ableitung der Kennlinie positiv,

$$g'(x) = \pi/2 \cdot \cos(\pi/2 \cdot x),$$

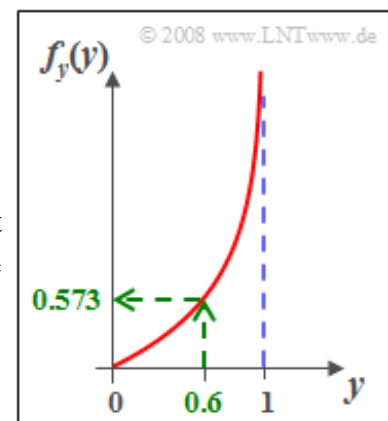
und die Umkehrfunktion lautet:

$$x = h(y) = 2/\pi \cdot \arcsin(y).$$

Unter Berücksichtigung des zweiten Beitrags durch den Faktor 2 erhält man für die gesuchte WDF im Bereich „ $0 \leq y \leq 1$ “ (außerhalb ist  $f_y(y) = 0$ ):

$$f_y(y) = 2 \cdot \frac{\sin^2(\pi/2 \cdot x)}{\pi/2 \cdot \cos(\pi/2 \cdot x)} \Big|_{x=2/\pi \cdot \arcsin(y)}.$$

Dies führt zum Zwischenergebnis:



$$f_y(y) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin^2(\arcsin(y))}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))}}$$

Wegen  $\sin(\arcsin(y)) = y$  erhält man schließlich:

$$f_y(y) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{y^2}{\sqrt{1 - y^2}}$$

An der Stelle  $y = 0.6$  erhält man den Wert 0.573. Rechts ist die WDF  $f_y(y)$  grafisch dargestellt.

**e)** Die WDF ist an der Stelle  $y = 1$  unendlich groß. Dies hängt damit zusammen, dass an dieser Stelle die Ableitung  $g'(x)$  der Kennlinie horizontal verläuft. Da aber  $y$  eine kontinuierliche Zufallsgröße ist, gilt trotzdem  $\Pr(y = 1) = 0$ . Das bedeutet: Eine Unendlichkeitsstelle in der WDF ist nicht identisch mit einer Diracfunktion.

## Musterlösung zur Aufgabe A3.10

a) Die erste Aussage trifft aufgrund der Exponentialverteilung für  $p(t)$  zu. Ein Phasenwinkel  $\phi(t)$  von  $\pm 90^\circ$  bedeutet, dass der Realteil  $x(t) = 0$  ist. Bei positivem Imaginärteil  $\Rightarrow y(t) > 0$  ist der Phasenwinkel  $\phi(t) = +90^\circ$ , bei negativem Imaginärteil beträgt der Phasenwinkel  $-90^\circ$ . Richtig sind also der erste und der dritte Lösungsvorschlag.

b) Mit  $\sigma = 1$  gilt für die WDF der Momentanleistung:

$$f_p(p) = 1/2 \cdot e^{-p/2}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach:

$$\Pr(p(t) > 4) = \int_4^\infty \frac{1}{2} \cdot e^{-p/2} dp = e^{-2} \approx \underline{0.135}.$$

c) Da  $p = a^2$  gilt und  $a < 0$  nicht möglich, ist das Ereignis „ $a > 2$ “ identisch mit dem Ereignis „ $p > 4$ “. Es ergibt sich die gleiche Wahrscheinlichkeit 0.135 wie unter (b) berechnet.

d) Allgemein gilt:

$$f_a(a) = \left. \frac{f_p(p)}{|g'(p)|} \right|_{p=h(a)}.$$

Die Transformationskennlinie lautet:

$$g'(p) = \frac{da}{dp} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{p}}.$$

Diese ist stets positiv. Daraus folgt für die Rayleigh-WDF:

$$f_a(a) = \left. \sqrt{p} \cdot e^{-p/2} \right|_{p=a^2} = a \cdot e^{-a^2/2}.$$

Für  $a = 1$  ergibt sich somit der Wert  $e^{-0.5} \approx \underline{0.607}$ .

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.10

a) Aufgrund der gegebenen WDF liegt keine Riceverteilung, sondern eine Rayleighverteilung vor. Diese ist um den Mittelwert  $m_x$  unsymmetrisch, so dass  $\mu_3 \neq 0$  ist.

Nur bei einer gaußverteilten Zufallsgröße gilt für die Kurtosis  $K = 3$ . Bei der Rayleighverteilung ergibt sich aufgrund ausgeprägter WDF-Ausläufer ein größerer Wert ( $K = 3.245$ ), und zwar unabhängig von  $\lambda$ . Richtig ist allein der zweite Lösungsvorschlag.

b) Die Ableitung der WDF nach  $x$  liefert:

$$\frac{df_x(x)}{dx} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-x^2/(2\lambda^2)} + \frac{x}{\lambda^2} \cdot e^{-x^2/(2\lambda^2)} \cdot \left(-\frac{2x}{2\lambda^2}\right).$$

Daraus folgt als Bestimmungsgleichung für  $x_0$  (nur die positive Lösung ist sinnvoll):

$$\frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-x_0^2/(2\lambda^2)} \cdot \left(1 - \frac{x_0^2}{\lambda^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \lambda.$$

Somit erhält man für den Verteilungsparameter  $\lambda = x_0 = \underline{2}$ .

c) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich der Verteilungsfunktion an der Stelle  $r = x_0 = \lambda$ :

$$\Pr(x < x_0) = \Pr(x \leq x_0) = F_x(x_0) = 1 - e^{-\lambda^2/(2\lambda^2)} = 1 - e^{-0.5} = \underline{0.393}.$$

d) Der Mittelwert kann beispielsweise nach folgender Gleichung ermittelt werden:

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\lambda^2} \cdot e^{-x^2/(2\lambda^2)} dx = \sqrt{\pi/2} \cdot \lambda = \underline{2.506}.$$

Der Mittelwert ist natürlich größer als der häufigste Wert  $x_0$  (= Maximalwert der WDF), da die WDF zwar nach unten, aber nicht nach oben begrenzt ist.

e) Allgemein gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\Pr(x > m_x) = 1 - F_x(m_x).$$

Mit der angegebenen Verteilungsfunktion und dem Ergebnis aus (d) erhält man:

$$\Pr(x > m_x) = e^{-m_x^2/(2\lambda^2)} = e^{-\pi/4} \approx \underline{0.456}.$$

## Musterlösung zur Aufgabe A3.11

a) Die erste Aussage ist falsch. Die Tschebyscheffsche Ungleichung liefert hier die Schranke  $1/9$ . Bei keiner Verteilung kann die hier betrachtete Wahrscheinlichkeit größer sein.

Für  $\varepsilon < \sigma_x$  liefert Tschebyscheff einen Wert größer als 1. Da eine Wahrscheinlichkeit nie größer als 1 sein kann, ist diese Information nutzlos.

Auch die letzte Aussage ist zutreffend. Beispielsweise gilt bei der Gleichverteilung:

$$\Pr(|x - m_x| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 1 - \varepsilon/\varepsilon_0 & \text{für } \varepsilon < \varepsilon_0 = \sqrt{3} \cdot \sigma_x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Richtig sind demnach die Lösungsvorschläge 2 und 3

b) Bei der Gaußverteilung gilt:

$$p_k = \Pr(|x - m_x| \geq k \cdot \sigma_x) = 2 \cdot Q(k).$$

Daraus ergeben sich folgende Zahlenwerte (in Klammern: Schranke nach Tschebyscheff):

$$k = 1 : \Pr(|x - m_x| \geq \sigma_x) = 0.317 \quad (1.000),$$

$$k = 2 : \Pr(|x - m_x| \geq 2 \cdot \sigma_x) = 0.454 \cdot 10^{-1} \quad (0.250),$$

$$k = 3 : \Pr(|x - m_x| \geq 3 \cdot \sigma_x) = \underline{0.26 \cdot 10^{-2}} \quad (0.111),$$

$$k = 4 : \Pr(|x - m_x| \geq 4 \cdot \sigma_x) = 0.64 \cdot 10^{-4} \quad (0.0625).$$

c) Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit setzen wir  $\lambda = 1 \Rightarrow m_x = \sigma_x = 1$ . Dann gilt:

$$\Pr(|x - m_x| \geq k \cdot \sigma_x) = \Pr(|x - 1| \geq k).$$

Da in diesem Sonderfall die Zufallsgröße  $x$  stets größer als 0 ist, gilt weiter:

$$p_k = \Pr(x \geq k + 1) = \int_{k+1}^{\infty} e^{-x} dx = e^{-(k+1)}.$$

Daraus ergeben sich folgende Zahlenwerte für die Exponentialverteilung:

$$k = 1 : \Pr(|x - m_x| \geq \sigma_x) = e^{-2} = 0.1353,$$

$$k = 2 : \Pr(|x - m_x| \geq 2 \cdot \sigma_x) = e^{-3} = 0.0497,$$

$$k = 3 : \Pr(|x - m_x| \geq 3 \cdot \sigma_x) = e^{-4} = \underline{0.0183},$$

$$k = 4 : \Pr(|x - m_x| \geq 4 \cdot \sigma_x) = e^{-5} = 0.0067.$$



## Musterlösung zur Aufgabe A3.12

a) Vergleicht man die vorgegebene WDF mit der allgemeinen Gleichung im Kapitel 3.7, so erkennt man, dass der Parameter  $\lambda = 2$  ist. Daraus folgt (nach Integration über die WDF):

$$F_x(r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(r/2).$$

Insbesondere sind

$$F_x(r = 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 0.75,$$

$$F_x(r = -2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 0.25.$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit als die Differenz zu 50%.

b) Nach dem Ergebnis aus (a) ist  $F_x(4.0) = 0.5 + 1/\pi = 0.852$ . Damit gilt für die „komplementäre“ Wahrscheinlichkeit  $\Pr(x > 4) = 0.148$ . Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist doppelt so groß:

$$\Pr(|x| > 4) \equiv \underline{0.296}.$$

c) Alle Lösungsvorschläge treffen zu. Für die Varianz der Cauchyverteilung gilt nämlich:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1 + (x/2)^2} dx.$$

Für große  $x$  liefert der Integrand den konstanten Wert 4. Deshalb divergiert das Integral. Mit  $\sigma_x \rightarrow \infty$  liefert aber auch die Tschebyscheffsche Ungleichung keine auswertbare Schranke.

„Natürliche“ Zufallsgrößen (physikalisch interpretierbar) können nie cauchyverteilt sein, da sie sonst eine unendlich große Leistung besitzen müssten. Dagegen unterliegt eine „künstliche“ (oder mathematische) Zufallsgröße – wie z. B. der Quotient zweier mittelwertfreier Gaußgrößen – nicht dieser Beschränkung.