Musterlösung zur Aufgabe A5.1

a) Die Varianz σ_x^2 ist gleich dem AKF-Wert bei $\tau = 0$, also 0.04 V². Daraus folgt σ_x = 0.2 V.

b) Die äquivalente AKF-Dauer kann über das flächengleiche Rechteck ermittelt werden und ergibt sich entsprechend der Skizze zu $\nabla\tau_x$ = 1 µs.

c) Das LDS ist die Fouriertransformierte der AKF. Mit der gegebenen Fourierkorrespondenz gilt:

$$\Phi_x(f) = \sigma_x^2 \cdot \nabla\tau_x \cdot \mathrm{e}^{-\pi(\nabla\tau_x \cdot f)^2}.$$

Bei der Frequenz $f = 0$ gilt:

$$\Phi_x(f=0) = \sigma_x^2 \cdot \nabla\tau_x = 0.04\ \mathrm{V}^2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}\ \underline{= 4 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}}.$$

d) Allgemein gilt mit $\Phi_y(f) = \Phi_x(f) \cdot |H(f)|^2$:

$$\Phi_y(f) = \sigma_x^2 \cdot \nabla\tau_x \cdot \mathrm{e}^{-\pi(\nabla\tau_x \cdot f)^2} \cdot H_0^2 \cdot \mathrm{e}^{-2\pi(f/\Delta f)^2}.$$

Durch Zusammenfassen der beiden Exponentialfunktionen erhält man:

$$\Phi_y(f) = \sigma_x^2 \cdot \nabla\tau_x \cdot H_0^2 \cdot \mathrm{e}^{-\pi\cdot(\nabla\tau_x^2 + 2/(\Delta f^2))\cdot f^2}.$$

Auch $\Phi_y(f)$ ist gaußförmig und nie breiter als $\Phi_x(f)$. Für $\Delta f \to \infty$ gilt die Näherung $\Phi_y(f) \approx \Phi_x(f)$. Mit kleiner werdendem Δf wird $\Phi_y(f)$ immer schmäler (also ist die zweite Aussage falsch). H_0 beeinflusst tatsächlich nur die LDS-Höhe und nicht die Breite des LDS. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1 und 3.

e) Analog zum Aufgabenteil (a) kann für das LDS des Ausgangssignals $y(t)$ geschrieben werden:

$$\Phi_y(f) = \sigma_y^2 \cdot \nabla\tau_y \cdot \mathrm{e}^{-\pi\cdot\nabla\tau_y^2\cdot f^2}.$$

Durch Vergleich mit dem Ergebnis aus (d) ergibt sich:

$$\nabla\tau_y^2 = \nabla\tau_x^2 + \frac{2}{\Delta f^2}.$$

Löst man die Gleichung nach Δf auf und berücksichtigt die Werte $\nabla\tau_x$ = 1 µs, $\nabla\tau_y$ = 3 µs, so folgt:

$$\Delta f = \sqrt{\frac{2}{\nabla\tau_y^2 - \nabla\tau_x^2}} = \sqrt{\frac{2}{9-1}}\ \mathrm{MHz}\ \underline{= 0.5\ \mathrm{MHz}}.$$

f) Die Bedingung $\sigma_y = \sigma_x$ ist gleichbedeutend mit $\varphi_y(\tau = 0) = \varphi_x(\tau = 0)$. Da zudem $\nabla\tau_y = 3 \cdot \nabla\tau_x$ vorgegeben ist, muss deshalb auch $\Phi_y(f = 0) = 3 \cdot \Phi_x(f = 0)$ gelten. Daraus erhält man:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\Phi_y(f=0)}{\Phi_x(f=0)}} = \sqrt{3}\ \underline{= 1.732}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.1

a) Die Varianz (Leistung) ⇒ Effektivwert zum Quadrat des Signals $x(t)$ beträgt

$$\sigma_x^2 = \frac{N_0}{2} \cdot 2B_x = N_0 \cdot B_x = 10^{-12}\ \mathrm{V}^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x \ \underline{= 1\ \mu\mathrm{V}}.$$

b) Entsprechend dem Kapitel 3.5 und der hier angegebenen Näherung erhält man:

$$\mathrm{Pr}\left(|x(t)| > 5\ \mu\mathrm{V}\right) = 2 \cdot \mathrm{Q}(5) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \cdot 5} \cdot \mathrm{e}^{-12.5}\ \underline{\approx 6 \cdot 10^{-7}}.$$

c) Das Eingangssignal $x(t)$ ist mittelwertfrei ($m_x = 0$), da sonst $\Phi_x(f)$ noch eine Diracfunktion bei $f = 0$ beinhalten müsste. Der Mittelwert wird durch das lineare Filter nicht verändert ⇒ $m_y \ \underline{= 0}$.

d) Für das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals gilt allgemein:

$$\Phi_y(f) = \frac{N_0}{2} \cdot |H(f)|^2 .$$

Damit kann die Varianz σ_y^2 berechnet werden. Unter Ausnützung der Symmetrie erhält man:

$$\sigma_y^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2\,(f)\ \mathrm{d}f = N_0 \cdot \int_0^{f_0} \cos^4\left(\frac{\pi f}{2f_0}\right)\ \mathrm{d}f.$$

Das bestimmte Integral ist vorgegeben. Bei jedem der drei Lösungsterme ergibt sich für die untere Grenze der Wert 0. Daraus folgt:

$$\sigma_y^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot f_0 + \frac{f_0}{2\pi} \cdot \sin(\pi) + \frac{f_0}{16\pi} \cdot \sin(2\pi)\right) = \frac{3}{8} \cdot N_0 \cdot f_0.$$

$$f_0 = B_x/2: \quad \sigma_y^2 = \frac{3}{16} \cdot N_0 \cdot B_x = \frac{3}{16} \cdot \sigma_x^2 = 0.1875 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{V}^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_y \ \underline{= 0.433\ \mu\mathrm{V}}.$$

e) Nun besitzt das Eingangs-LDS für $|f| > B_x$ keine Anteile. Deshalb gilt:

$$\sigma_y^2 = N_0 \cdot \int_0^{B_x} \cos^4\left(\frac{\pi f}{2f_0}\right)\ \mathrm{d}f = N_0 \cdot \int_0^{f_0/2} \cos^4\left(\frac{\pi f}{2f_0}\right)\ \mathrm{d}f.$$

Die numerische Auswertung liefert hierfür:

$$\sigma_y^2 = N_0 \left(\frac{3}{8} \cdot B_x + \frac{B_x}{2\pi} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{B_x}{16\pi} \cdot \sin(\pi)\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_y^2 = N_0 \cdot B_x \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2\pi}\right) = 0.534 \cdot \sigma_x^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_y \ \underline{= 0.731\ \mu\mathrm{V}}.$$

f) Analog zur Musterlösung der Teilaufgabe (b) gilt:

$$\mathrm{Pr}\left(|y(t)| > 5\ \mu\mathrm{V}\right) = 2 \cdot \mathrm{Q}\left(\frac{5\ \mu\mathrm{V}}{0.731\ \mu\mathrm{V}}\right) = 2 \cdot \mathrm{Q}(6.84).$$

Mit der angegebenen Näherung hat diese Wahrscheinlichkeit den Wert $\underline{8 \cdot 10^{-12}}$.

Musterlösung zur Aufgabe A5.2

a) Bei der AKF-Berechnung gehen Phasenbeziehungen verloren. Die zugehörigen Funktionen $\Phi_x(f)$ und $\Phi_y(f)$ im Spektralbereich sind rein reell, so dass nur der Betrag $|H(f)|$ angegeben werden kann.

Die Aussagen 2 und 3 sind zutreffend, da folgende Gleichungen gelten:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_x(\tau) \quad \Rightarrow \quad H(f) = \frac{\Phi_{xy}(f)}{\Phi_x(f)},$$

$$\varphi_y(\tau) = \varphi_{xy}(\tau) * h(-\tau) \quad \Rightarrow \quad H^\star(f) = \frac{\Phi_y(f)}{\Phi_{xy}(f)}.$$

b) Bei diracförmiger Eingangs-AKF $\varphi_x(\tau)$ ist die Impulsantwort $h(t)$ formgleich mit der KKF:

$$h(t) = \frac{K \cdot \mathrm{e}^{-t/T_0}}{N_0/2} = 1.256 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{e}^{-t/T_0}.$$

Für $t = T_0$ ergibt sich der Wert $\underline{4.62 \cdot 10^{-3}\ 1/\mathrm{s}}$.

c) Die angegebene Fourierkorrespondenz lautet mit $T_0 = 1/\omega_0$ und $C = N_0/2 \cdot T_0/K$:

$$h(t) = \frac{C}{T_0} \cdot \mathrm{e}^{-t/T_0} \circ\!\!-\!\!\bullet\ H(\omega) = \frac{C}{1 + \mathrm{j}\omega T_0}.$$

Die Konstante ergibt sich zu $C = 0.08$. Mit $H(f) = 2\pi \cdot H(\omega)$ folgt daraus:

$$H(f) = \frac{0.5}{1 + \mathrm{j}2\pi f T_0}.$$

Damit ergibt sich der Gleichsignalübertragungsfaktor zu 0.5.

d) Für das Ausgangs-LDS gilt im Allgemeinen bzw. speziell hier:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{0.5^2}{(1 + \mathrm{j}2\pi f T_0)(1 - \mathrm{j}2\pi f T_0)}.$$

Dies führt zum Ergebnis:

$$\Phi_y(f) = N_0/8 \cdot \frac{1}{1 + (2\pi f T_0)^2}.$$

Bei der angegebenen Frequenz ist $\Phi_y(f)$ gegenüber seinem Maximum um die Hälfte abgefallen:

$$\Phi_y(f = 1/(2\pi T_0)) = N_0/16 \ \underline{= 6.25 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{W/Hz}}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.2

a) $H(f)$ ist die Fouriertransformierte zu $h(t)$. Mit dem Verschiebungssatz lautet diese ($\tau_1 = 0$):

$$H(f) = 1 + \alpha \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \tau_2} = 1 + \alpha \cdot \cos(2\pi f \tau_2) - \mathrm{j} \cdot \alpha \cdot \sin(2\pi f \tau_2).$$

Falls $H(f)$ periodisch mit f_0 ist, muss für alle ganzzahligen Werte von i gelten:

$$H(f + i \cdot f_0) = H(f).$$

Mit $f_0 = 1/\tau_2$ $\underline{= 0.25 \text{ kHz}}$ ist diese Bedingung erfüllt.

$$\begin{aligned} H(f + i \cdot f_0) &= 1 + \alpha \cdot \cos(2\pi f \tau_2 + i 2\pi f_0 \tau_2) - \mathrm{j} \cdot \alpha \cdot \sin(2\pi f \tau_2 + i 2\pi f_0 \tau_2) \\ &= 1 + \alpha \cdot \cos(2\pi f \tau_2) - \mathrm{j} \cdot \alpha \cdot \sin(2\pi f \tau_2). \end{aligned}$$

b) Das Betragsquadrat ist die Summe von quadriertem Realteil und quadriertem Imaginärteil:

$$|H(f)|^2 = (1 + \alpha \cdot \cos(A))^2 + (\alpha \cdot \sin(A))^2.$$

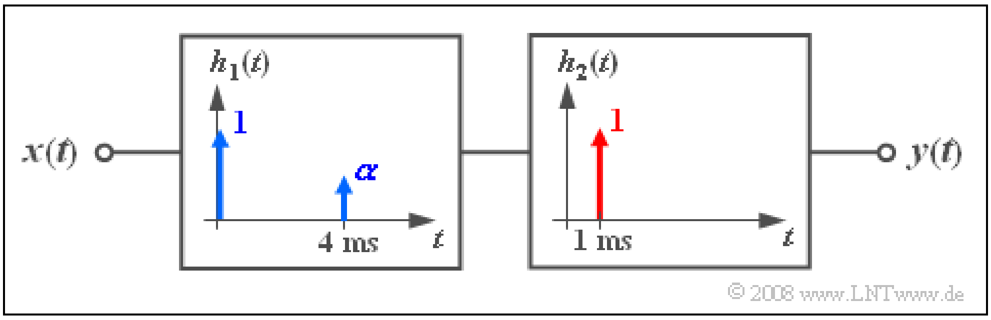
Hierbei ist das Argument der Winkelfunktionen mit $A = 2\pi f \tau_2$ abgekürzt. Nach Ausmultiplizieren unter Berücksichtigung von $\cos^2(A) + \sin^2(A) = 1$ erhält man:

$$|H(f)|^2 = 1 + \alpha^2 + 2\alpha \cdot \cos(A).$$

Bei der Frequenz $f = 0$ (und somit $A = 0$) ergibt sich allgemein bzw. mit $\alpha = 0.5$:

$$|H(f = 0)|^2 = (1 + \alpha)^2 = 1.5^2 \; \underline{= 2.25}.$$

c) Nun lässt sich das Übertragungssystem aus zwei Teilsystemen zusammensetzen (siehe Skizze):



Die Übertragungsfunktion $H_1(f)$ ist wie unter b) berechnet. Für $H_2(f)$ gilt mit $\tau_1 = 1$ ms:

$$H_2(f) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f \tau_1} \quad \Rightarrow \quad |H_2(f)| = 1 \quad \Rightarrow \quad |H_2(f)|^2 = 1.$$

Das bedeutet: Durch die zusätzliche Laufzeit wird $|H(f)|^2$ gegenüber der Teilaufgabe b) nicht verändert. Bei der Frequenz $f = 0$ gilt also weiterhin $|H(f = 0)|^2 \; \underline{= 2.25}$.

d) Durch Vergleich der gezeichneten Funktion $h(t) * h(-t)$ mit dem Ergebnis von b) erhält man:

$$C_0 = 1 + \alpha^2 \; \underline{= 1.25}, \qquad C_3 = \alpha \; \underline{= 0.5}, \qquad \tau_3 = \tau_2 - \tau_1 \; \underline{= 4 \text{ ms}}.$$

e) Das LDS des Ausgangssignals $y(t)$ ist auf den Bereich von $\pm B$ begrenzt und ergibt sich zu

$$\Phi_y(f) = N_0/2 \cdot |H(f)|^2 = N_0/2 \cdot \left(1 + \alpha^2 + 2\alpha \cdot \cos(2\pi f \tau_3)\right).$$

Unter Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften erhält man somit für die Leistung:

$$P_y = N_0 \cdot \int_0^B \left(1 + \alpha^2 + 2\alpha \cdot \cos(2\pi f \tau_3)\right) \, \mathrm{d}f.$$

Da B = 10 kHz ein ganzzahliges Vielfaches der Frequenzperiode $f_0 = 1/\tau_3$ = 250 Hz ist (vgl. Lösung zu Teilaufgabe a), trägt die Cosinus-Funktion nicht zum Integral bei, und man erhält:

$$P_y = N_0 \cdot B \cdot \left(1 + \alpha^2\right) = 1.25 \cdot P_x \underline{= 12.5 \text{ mW}}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A5.3

a) Das Filter ist nichtrekursiv, wenn die Rückführung entfällt: $b_1 = 0$. Sind zusätzlich $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$, so sind die Folgen $\langle x_\nu \rangle$ und $\langle y_\nu \rangle$ und damit natürlich auch die Signale $x(t)$ und $y(t)$ gleich. Mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ ist $y(t) = x(t - T_A)$ um T_A verzögert, mit $a_1 = 0.5$ zusätzlich gedämpft. Verzögerung und Dämpfung haben jedoch keine Verzerrung zur Folge. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 2 und 3.

b) Zum Zeitpunkt $\nu = 0$ ist $y_\nu = x_\nu = 1$. Für alle weiteren Zeitpunkte ν gilt $x_\nu = 0$ und somit auch:

$$y_\nu = b_1 \cdot y_{\nu-1} = {b_1}^\nu.$$

Insbesondere ist $y_3 = {b_1}^3 = 0.6^3 = \underline{0.216}$.

c) Entsprechend der Aufgabenstellung muss gelten:

$$y_{M+1} = {b_1}^{M+1} < 0.001.$$

Dies führt zum Ergebnis:

$$M + 1 \geq \frac{\lg(0.001)}{\lg(0.6)} = \frac{-3}{-0.222} \approx 13.51. \quad \Rightarrow \quad \underline{M = 13}.$$

Die Überprüfung der Werte $y_{13} \approx 0.0013$ und $y_{14} \approx 0.0008$ bestätigt dieses Ergebnis.

d) Aufgrund der Linearität des vorliegenden Filters erhält man das gleiche Ergebnis, wenn man das Filter gegenüber Punkt b) nicht verändert ($a_1 = 0$) und dafür die Eingangsfolge

$$\langle x_\nu \rangle = \langle 1,\ -0.5,\ 0,\ 0,\ \ldots \rangle$$

berücksichtigt. Man erhält dann allgemein für $\nu > 0$:

$$y_\nu = {b_1}^\nu + a_1 \cdot {b_1}^{\nu-1} = (b_1 + a_1) \cdot {b_1}^{\nu-1}.$$

Mit $b_1 = 0.6$ und $a_1 = -0.5$ ergibt sich daraus

$$y_\nu = 0.1 \cdot 0.6^{\nu-1},$$

und somit die Folge:

$$\langle y_\nu \rangle = \langle 1,\ 0.1,\ 0.06,\ 0.036,\ \ldots \rangle\ .$$

Der gesuchte Wert ist $y_4 = \underline{0.036}$.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.3

a) Die Impulsantwort lautet:

$$h(t) = \delta(t) + 2 \cdot \delta(t - T_\mathrm{A}) + \delta(t - 2T_\mathrm{A}).$$

Das Maximum liegt bei T_A, d. h. es ist $\underline{\nu = 1}$.

b) Der Frequenzgang $H(f)$ ist die Fouriertransformierte der Impulsantwort $h(t)$. Die um T_A nach links verschobene Impulsantwort

$$h'(t) = \delta(t + T_\mathrm{A}) + 2 \cdot \delta(t) + \delta(t - T_\mathrm{A})$$

ist symmetrisch um $t = 0$ und hat dementsprechend den rein reellen Frequenzgang

$$H'(f) = 2\,(1 + \cos(2\pi f T_\mathrm{A}))\,.$$

Durch Anwendung des Verschiebungssatzes folgt weiter:

$$H(f) = 2\,(1 + \cos(2\pi f T_\mathrm{A})) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f T_\mathrm{A}}.$$

Der Wert des Frequenzgangs bei der Frequenz $f = 0$ ist demzufolge $\underline{H(f = 0) = 4}$.

c) Die zeitdiskrete Faltung der Eingangsfolge $\langle g_\nu \rangle$ mit der Impulsantwort $\langle h_\nu \rangle = \langle 1, 2, 1 \rangle$ ergibt

$$\langle y_\nu \rangle = \langle\ 1,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \ldots\ \rangle$$

und insbesondere $y_4 = 4$. Mit Ausnahme der Werte y_0 und y_1 (Einschwingvorgang) erhält man auch am Ausgang eine <u>Gleichfolge mit dem Wert 4</u>:

$$y(t) = H(f = 0) \cdot x(t).$$

d) Analog zur Teilaufgabe (c) erhält man nun durch Verschiebung, Gewichtung mit a_1, a_2, a_3 und anschließender Überlagerung:

$$\langle y_\nu \rangle = \langle\ 0,\ 1,\ 2,\ 0,\ -2,\ 0,\ 2,\ 0,\ -2,\ 0,\ \ldots\ \rangle\,.$$

Der gesuchte Wert ist somit $y_4 \underline{= -2}$.

Anderer Lösungsweg: Die Eingangsfolge $\langle x_\nu \rangle$ verläuft sinusförmig mit der Periode $4 \cdot T_\mathrm{A}$. Die Grundfrequenz ist dementsprechend $f_0 = 1/(4 \cdot T_\mathrm{A})$. Bei dieser Frequenz hat der Frequenzgang $H(f)$ folgenden Wert (vgl. Punkt b):

$$H(f = f_0) = 2\,(1 + \cos(\pi/2)) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} = 2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}.$$

Lässt man den Einschwingungsvorgang (abgeschlossen bei $t = 2 \cdot T_\mathrm{A}$) außer Betracht, so ergibt sich mit $\tau = T_\mathrm{A}$ (Phase: 90°) folgender Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal:

$$y(t) = 2 \cdot x(t - T_\mathrm{A}).$$

Aus der Sinusfunktion wird die <u>Funktion „Minus-Cosinus" mit der Amplitude 2</u>.

Musterlösung zur Aufgabe A5.4

a) Die „1" am Eingang wirkt sich am Ausgang erst zum Zeitpunkt $\nu = 1$ aus (wegen $a_0 = 0$):

$$y_0 \underline{= 0}, \quad y_1 \underline{= 0.5}.$$

Bei $\nu = 2$ wird auch der rekursive Teil des Filters wirksam:

$$y_2 = b_1 \cdot y_1 - y_0 = \sqrt{3}/2 \underline{\approx 0.866}.$$

b) Für $\nu \geq 2$ ist das Filter rein rekursiv:

$$y_\nu = b_1 \cdot y_{\nu-1} - y_{\nu-2}.$$

Insbesondere erhält man

$$y_3 = \sqrt{3} \cdot y_2 - y_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 - 1/2 = 1;$$

$$y_4 = \sqrt{3} \cdot y_3 - y_2 = \sqrt{3} \cdot 1 - \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2;$$

$$y_5 = \sqrt{3} \cdot y_4 - y_3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 - 1 = 1/2;$$

$$y_6 = \sqrt{3} \cdot y_5 - y_4 = \sqrt{3} \cdot 1/2 - \sqrt{3}/2 = 0;$$

$$y_7 = \sqrt{3} \cdot y_6 - y_5 = \sqrt{3} \cdot 0 - 1/2 \underline{= -1/2}.$$

c) Durch Fortsetzung des rekursiven Algorithmuses aus (b) erhält man für große ν-Werte:

$$y_\nu = y_{\nu-12}.$$

Daraus folgt $T_0/T \underline{= 12}$. Zum gleichen Ergebnis kommt man durch folgende Überlegungen:

$$a_1 = \sin(\omega_0 \cdot T) = \sin(2\pi \cdot T/T_0) \stackrel{!}{=} 1/2 = \sin(\pi/6)\,.$$

$$\Rightarrow \; 2T/T_0 = 1/6 \quad \Rightarrow \quad T_0/T = 12.$$

Die Überprüfung des Koeffizienten b_1 bestätigt die Rechnung:

$$b_1 = 2 \cdot \cos(\pi/6) = 2 \cdot c\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}.$$

d) Aus $f_0 = 10$ kHz folgt $T_0 = 100$ µs bzw. $T_0/T = 100$. Damit ergibt sich:

$$a_1 = \sin(2\pi \cdot T/T_0) = \sin(3.6°) \; \underline{\approx 0.062},$$

$$b_1 = 2 \cdot \cos(2\pi \cdot T/T_0) = 2 \cdot \cos(3.6°) \; \underline{\approx 1.996}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A5.5

a) Es ist ein nichtrekursives Filter zweiter Ordnung mit den Koeffizienten $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 0.707$ und $\alpha_2 = 1$. Richtig sind somit die beiden ersten Lösungsvorschläge.

b) Die Varianz der Ausgangswerte ist gleich dem AKF-Wert für $k = 0$. Für diesen erhält man:

$$\varphi_y(0) = \sigma_x^2 \cdot \left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) = 1/3 \cdot (1 + 1/2 + 1) = 0.833.$$

Damit ergibt sich für die Streuung (für den Effektivwert):

$$\sigma_y = \sqrt{\varphi_y(0)} \underline{= 0.913}.$$

Hinweis: Die Koeffizienten von Filter 1 sind hier mit α_0, α_1, α_2 („alphas") bezeichnet.

c) Diese beiden AKF-Werte können wie folgt berechnet werden:

$$\varphi_y(T_\mathrm{A}) = \sigma_x^2 \cdot (\alpha_0 \cdot \alpha_1 + \alpha_1 \cdot \alpha_2) = 1/3 \cdot (-1 \cdot 0.707 + 0.707 \cdot 1) \underline{= 0},$$

$$\varphi_y(2T_\mathrm{A}) = \sigma_x^2 \cdot (\alpha_0 \cdot \alpha_2) \underline{= -1/3}.$$

d) Da $\varphi_y(T_\mathrm{A}) = 0$ ist, kann bei geeigneter Wahl von a_0 und a_1 erreicht werden, dass die AKF am Ausgang von Filter 2 identisch ist mit der unter Punkt c) berechneten AKF. Mit $T_\mathrm{A}' = 2 \cdot T_\mathrm{A}$ gilt:

$$\varphi_z(0) = 1/3 \cdot \left(a_0^2 + a_1^2\right) = 0.833 \quad \Rightarrow \quad a_0^2 + a_1^2 = 2.5,$$

$$\varphi_z(T_A') = 1/3\,(a_0 \cdot a_1) = -1/3 \quad \Rightarrow \quad a_0 \cdot a_1 = -1.$$

Mit der Hilfsgröße $H = a_0^2$ führt dies zu der Bestimmungsgleichung

$$H + 1/H = 2.5 \quad \Rightarrow \quad H^2 - 2.5 \cdot H + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad H_{1/2} = 1/2 \cdot \left(2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4}\right) = 1/2 \cdot (2.5 \pm 1.5)\,.$$

Die beiden Lösungen sind $H_1 = 2$ und $H_2 = 0.5$. Daraus erhält man vier mögliche Lösungen:

$$a_0 = \sqrt{2}, \quad a_1 = -1/\sqrt{2}, \qquad a_0 = -\sqrt{2}, \quad a_1 = 1/\sqrt{2},$$

$$a_0 = 1/\sqrt{2}, \quad a_1 = -\sqrt{2}, \qquad a_0 = -1/\sqrt{2}, \quad a_1 = \sqrt{2}.$$

Bei den beiden letzten Lösungspaaren ist die Bedingung $|a_0| > |a_1|$ nicht erfüllt. Bei den beiden oberen Gleichungen gilt dagegen in beiden Fällen:

$$\underline{a_1/a_0 = -0.5}.$$

e) Im allgemeinen (auch bei gleichverteilter Eingangsgröße x) sind die Dichtefunktionen $f_y(y)$ und $f_z(z)$ unterschiedlich. $f_z(z)$ ergibt sich aus der Faltung zweier verschieden breiter Rechtecke; sie ist also trapezförmig. Zur Berechnung von $f_y(y)$ müssen drei Rechtecke miteinander gefaltet werden.

Bei Gaußscher Eingangsgröße x sind auch y und z gaußverteilt, und wegen $m_y = m_z$ und $\sigma_y = \sigma_z$ gilt auch $f_z(z) = f_y(y)$. Richtig sind demnach die Lösungsvorschläge 2 und 3.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.5

a) Der AKF-Wert $\varphi_y(0)$ gibt die Varianz (Leistung) σ_x^2 an, nicht die Streuung (Effektivwert) σ_x. Da ein nichtrekursives Filter erster Ordnung vorliegt, sind alle AKF-Werte $\varphi_y(k \cdot T_A) = 0$ für $k \geq 2$. Der AKF-Wert $\varphi_y(-T_A)$ ist gleich $\varphi_y(T_A)$. Diese beiden AKF-Werte führen zu einer Cosinusfunktion im LDS, zu der sich noch der Gleichanteil $\varphi_y(0)$ hinzuaddiert. Richtig sind also die Lösungsvorschläge 2 und 3.

b) Die allgemeine Gleichung lautet mit $M = 1$ für $k \in \{0, 1\}$:

$$\varphi_y(k \cdot T_A) = \sigma_x^2 \cdot \sum_{\mu=0}^{M-k} a_\mu \cdot a_{\mu+k}.$$

Daraus erhält man mit $\sigma_x = 1$:

$$\varphi_y(0) = a_0^2 + a_1^2 = 0.4^2 + 0.3^2 \underline{= 0.25},$$

$$\varphi_y(T_A) = a_0 \cdot a_1 = 0.4 \cdot 0.3 \underline{= 0.12}.$$

c) Mit den bisherigen Einstellungen ist die Varianz $\sigma_y^2 = 0.25$ und damit die Streuung $\sigma_y = 0.5$. Durch eine Verdoppelung der Koeffizienten erhält man wie gewünscht $\sigma_y = 1$:

$$\underline{a_0 = 0.8}, \qquad \underline{a_1 = 0.6}.$$

d) Die Konstante K hebt die gesamte AKF um K^2 an. Mit dem Ergebnis aus (b) folgt:

$$K^2 = 0.5 - 0.25 = 0.25 \quad \Rightarrow \quad \underline{K = 0.5}.$$

e) Alle AKF-Werte sind nun um den konstanten Wert $K^2 = 0.25$ größer. Somit ist

$$\begin{aligned} \varphi_y(T_A) &= 0.12 + 0.25 \underline{= 0.37}, \\ \varphi_y(2T_A) &= 0 + 0.25 \underline{= 0.25}. \end{aligned}$$

f) Durch die Konstante wird die Streuung nicht verändert, das heißt, es gilt weiterhin $\sigma_y = 0.5$. Formal kann diese Größe wie folgt berechnet werden:

$$\sigma_y^2 = \varphi_y(0) - \lim_{k \to \infty} \varphi_y(k \cdot T_A) = 0.5 - 0.25 = 0.25.$$

Auch hiermit erhält man wieder $\sigma_y \underline{= 0.5}$.

Musterlösung zur Aufgabe A5.6

a) Ein rekursives Filter würde stets eine unendlich weit ausgedehnte Impulsantwort $h(t)$ und damit auch eine unendlich ausgedehnte AKF bewirken. Deshalb ist hier eine nichtrekursive Filterstruktur zu wählen. Die angegebene AKF erfordert die Ordnung $M = 2$.

Da die Eingangswerte gaußverteilt und mittelwertfrei sind, gilt dies auch für die Ausgangswerte. Bei der Filterung stochastischer Signale gilt stets: „Gauß bleibt Gauß und Nicht-Gauß wird nie (exakt) Gauß". Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 3 und 5.

b) Das Gleichungssystem lautet:

$$k = 2: \quad a_0 \cdot a_2 = 1$$

$$k = 1: \quad a_0 \cdot a_1 + a_1 \cdot a_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{u \cdot w} = -1 \quad \Rightarrow \quad u \cdot w = 1$$

$$k = 0: \quad a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 2.25 \quad \Rightarrow \quad u + w = 2.25 + 2a_0 \cdot a_2 = 4.25.$$

Das Gleichungssystem bezüglich u und w hat zwei Lösungen:

1. $u = 4$, $w = 0.25$: Wegen der Bedingung $a_2 = 1/a_0$ (siehe erste obere Gleichung) haben a_0 und a_2 gleiches Vorzeichen und es ist mindestens einer der beiden Koeffizienten 1 oder größer. Somit ist die Bedingung $a_0 + a_2 = w^{1/2} = 0.5$ nicht zu erfüllen.
2. Die richtige Lösung lautet deshalb $\underline{u = 0.25}$ und $\underline{w = 4}$.

c) Das Ergebnis von (b) bedeutet, dass $a_1 = \pm\, (0.25)^{1/2} = \pm\, 0.5$ ist. Der positive Wert führt zu

$$0.5 \cdot (a_0 + a_2) = -1 \quad \Rightarrow \quad a_0 + a_2 = -2,$$

$$a_0 \cdot a_2 = 1.$$

Daraus folgt $a_0 = a_2 = -1$. Mit $a_1 = 0.5$ erhält man als Ergebnis:

$$a_1/a_0 \;\underline{= -0.5}, \qquad a_2/a_0 \;\underline{= 1}.$$

Die Lösung $a_1 = -0.5$ führt zu $a_0 = a_2 = 1$ und damit zu den gleichen Quotienten.

d) Allgemein hat dieses Problem $I = 4$ äquivalente Lösungen (Spiegelung/Verschiebung sowie jeweils die Multiplikation mit –1). Da hier die Impulsantwort symmetrisch ist, gibt es nur $\underline{I = 2}$ Lösungen:

$$a_0 = +1 \quad a_1 = -0.5 \quad a_2 = +1,$$

$$a_0 = -1 \quad a_1 = +0.5 \quad a_2 = -1.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.6

a) Nach einigen Umformungen kommt man zur Bestimmungsgleichung (mit $u = a_0^2$):

$$a_0 \cdot a_1 = \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \varphi_1 / a_0,$$

$$a_0^2 + a_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_0^2 + \varphi_1^2 / a_0^2 - 1 = 0,$$

$$u = a_0^2 \quad \Rightarrow \quad u + \varphi_1^2/u - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2 - u + \varphi_1^2 = 0.$$

Dies führt zu den beiden Lösungen:

$$u_{1/2} = 0.5 \pm \sqrt{0.25 - \varphi_1^2}.$$

Reelle Lösungen gibt es nur für $\varphi_1^2 \le 0.25$. Das bedeutet:

$$\underline{\varphi_{1,\max} = +0.5}, \qquad \underline{\varphi_{1,\min} = -0.5}.$$

b) Mit $\varphi_1 = -0.3$ erhält man $u_1 = 0.9$ und $u_2 = 0.1$. Daraus ergeben sich folgende Parametersätze:

$$a_0 = \sqrt{0.9} = 0.949, \quad a_1 = -\sqrt{0.1} = -0.316;$$

$$a_0 = -\sqrt{0.9} = -0.949, \quad a_1 = \sqrt{0.1} = 0.316;$$

$$a_0 = \sqrt{0.1} = 0.316, \quad a_1 = -\sqrt{0.9} = -0.949;$$

$$a_0 = -\sqrt{0.1} = -0.316, \quad a_1 = \sqrt{0.9} = 0.949.$$

Nur der erste Parametersatz erfüllt die angegebene Nebenbedingung: $\underline{a_0 = 0.949}$ und $\underline{a_1 = -0.316}$.

c) Wird σ_x verdoppelt, so erhöhen sich alle AKF-Werte um den Faktor 4. Insbesondere gilt dann:

$$\varphi_y(T_\text{A}) = -0.3 \cdot 4 \; \underline{= -1.2}.$$

d) Der Gleichanteil $m_x = 1$ am Eingang führt zu folgendem Gleichanteil im Ausgangssignal:

$$m_y = m_x \cdot (a_0 + a_1) = 0.633.$$

Alle AKF-Werte werden deshalb gegenüber Punkt (c) um $m_y^2 \approx 0.4$ vergrößert und man erhält:

$$\varphi_y(T_\text{A}) \; \underline{\approx -0.8}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A5.7

a) Bei gleicher Impulsdauer ($\Delta t_h = \Delta t_g$) handelt es sich um ein Matched-Filter, auch wenn Amplitude ($0.5 \cdot 10^{-6}$ 1/s bzw. 2 V) und zeitliche Lage von $g(t)$ und $h(t)$ nicht übereinstimmen. Damit gibt es auch kein anderes Filter mit besserem Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis. Das Filter mit rechteckförmiger Impulsantwort lässt sich auch als ein Integrator über die Zeitdauer Δt_h interpretieren. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1 und 3.

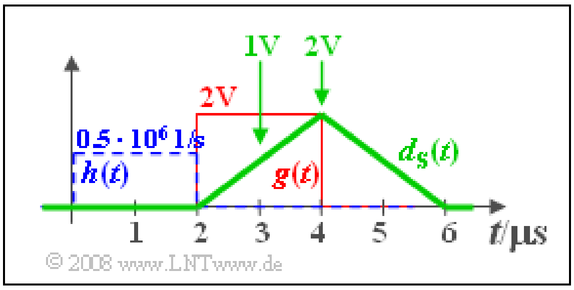
b) Die Impulsantwort des Matched-Filters lautet: $h_{\rm MF}(t) = K_{\rm MF} \cdot g(T_{\rm D} - t)$. Der Eingangsimpuls ist im Bereich von 2 µs bis 4 µs ungleich Null, bei Spiegelung im Bereich von –4 µs bis –2 µs. Durch eine Verschiebung um 4 µs wird erreicht, dass $g(T_{\rm D} - t)$ wie die Impulsantwort $h_{\rm MF}(t)$ zwischen 0 und 2 µs liegt. Daraus folgt: $T_{\rm D,\,opt}$ = 4 µs.

c) Mit $\Delta t_h = \Delta t_g = 2 \cdot 10^{-6}$ s und $g_0 = 2$ V erhält man $K_{\rm MF} = 1/(\Delta t_g \cdot g_0) = 0.25 \cdot 10^6$ 1/Vs.

d) Die Energie des Nutzimpulses $g(t)$ ist $E_g = g_0^2 \cdot \Delta t_g = 8 \cdot 10^{-6}\,{\rm V^2 s}$. Daraus folgt für das maximale S/N-Verhältnis:

$$\rho_d(T_{\rm D,\,opt}) = \frac{2 \cdot E_g}{N_0} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-6}\ {\rm V^2 s}}{4 \cdot 10^{-6}\ {\rm V^2/Hz}} \underline{= 4}.$$

e) Der Ausgangsimpuls $d_{\rm S}(t)$ ist dreieckförmig zwischen 2 und 6 Mikrosekunden mit dem Maximum g_0 = 2 V bei $T_{\rm D,\,opt}$ = 4 µs. Die Störleistung ergibt sich zu:



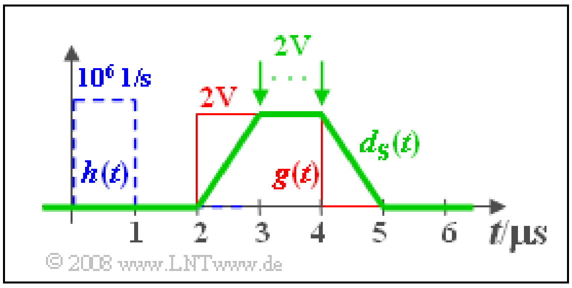
$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2 \cdot \Delta t_h} \underline{= 1\ {\rm V}^2}.$$

Mit diesen beiden Rechengrößen kann man wiederum das maximale S/N-Verhältnis berechnen:

$$\rho_d(T_{\rm D,opt}) = \frac{d_{\rm S}(T_{\rm D,opt})^2}{\sigma_d^2} = \frac{(2\ {\rm V})^2}{1\ {\rm V}^2} = 4.$$

f) Aus obiger Skizze erkennt man, dass nun der Nutzabtastwert nur mehr halb so groß ist, nämlich 1 V. Damit ist für $T_{\rm D}$ = 3 µs das S/N-Verhältnis um den Faktor 4 kleiner, also gleich 1.

g) Die Skizze zeigt, dass nun der Ausgangsimpuls $d_{\rm S}(t)$ trapezförmig verläuft. Im Bereich von 3 µs bis 4 µs ist der Nutzabtastwert konstant gleich g_0 = 2 V.



Wegen der nur halb so breiten Impulsantwort $h(t)$ ist der Frequenzgang $H(f)$ um den Faktor 2 breitbandiger und dadurch die Störleistung größer:

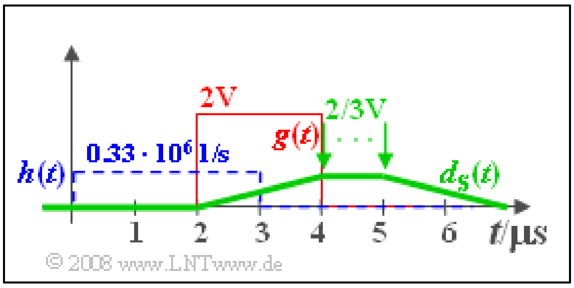
$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t)\,{\rm d}t = \frac{N_0}{2 \cdot \Delta t_h} = 2\ {\rm V}^2.$$

Damit ergibt sich für das S/N-Verhältnis nun der Wert:

$$\rho_d(T_{\rm D,\,opt}) \underline{= 2}.$$

Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1, 3 und 4.

h) Rechts ist der Ausgangsimpuls $d_S(t)$ für Δt_h = 3 µs skizziert. Auch dieses ist trapezförmig. Der optimale Detektionszeitpunkt liegt nun im Bereich zwischen 4 µs und 5 µs, und das Nutzsignal ist nur mehr ein Drittel so groß wie bei Anpassung: $d_S(T_{\rm D,\,opt})$ = 2/3V.



Für die Störleistung gilt nun:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2 \cdot \Delta t_h} = \frac{2}{3}\ {\rm V}^2.$$

Die Störleistung ist zwar kleiner – also günstiger – als bei Anpassung (Punkt e). Trotzdem ist das S/N-Verhältnis aufgrund des kleineren Nutzabtastwertes schlechter als unter Punkt (g) berechnet:

$$\rho_d(T_{\rm D,opt}) = \frac{(2/3\ {\rm V})^2}{2/3\ {\rm V}^2} = 2/3.$$

Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 2 und 4.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.7

a) Für die Energie eines Impulses $g(t)$ gilt allgemein bzw. bei diesem Beispiel:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)^2 \, \mathrm{d}t = g_0^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi(t/\Delta t_g)^2} \, \mathrm{d}t.$$

Diese Gleichung kann wie folgt umgeformt werden:

$$E_g = 2 \cdot g_0^2 \cdot \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\sqrt{2\pi}/\Delta t_g\right)^2 \cdot t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Mit $a = (2\pi)^{1/2}/\Delta t_g$ und der angegebenen Formel gilt folgender Zusammenhang:

$$E_g = 2 \cdot g_0^2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2a} = \sqrt{2} \cdot g_0^2 \cdot \Delta t_g.$$

Löst man diese Gleichung nach g_0 auf, so erhält man als Endergebnis:

$$g_0 = \sqrt{\frac{E_g}{\Delta t_g \cdot \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{0.01 \ \mathrm{V^2 s}}{0.001 \ \mathrm{s} \cdot 1.414}} \underline{= 2.659 \ \mathrm{V}}.$$

b) Unter der Voraussetzung eines Matched-Filters lautet das S/N-Verhältnis am Ausgang:

$$\rho_d(T_{\mathrm{D,\,opt}}) = \frac{2 \cdot E_g}{N_0} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \ \mathrm{V^2 s}}{10^{-4} \ \mathrm{V^2/Hz}} = 200.$$

In logarithmischer Darstellung erhält man

$$10 \cdot \lg \rho_d(T_{\mathrm{D,\,opt}}) = 10 \cdot \lg\,(200) \ \underline{\approx 23 \ \mathrm{dB}}.$$

c) Ein Vergleich zwischen dem Eingangsimpuls und dem Filterfrequenzgang zeigt, dass bei Anpassung $\Delta f_{\mathrm{E}} = 1/\Delta t_g$ gelten muss:

$$\Delta f_{\mathrm{E,\,opt}} \ \underline{= 1 \ \mathrm{kHz}}.$$

d) Eine kleinere Filterbandbreite ist günstig bezüglich Störungen, jedoch ungünstig hinsichtlich des Nutzsignals. Das heißt, der negative Einfluss überwiegt gegenüber dem positiven. Richtig sind also <u>die Lösungsvorschläge 1 und 3</u>.

Musterlösung zur Aufgabe A5.8

a) Bei weißem Rauschen gilt nach den allgemeinen Gleichungen von Kapitel 5.4:

$$\rho_{d,\rm WR} = \frac{2E_g}{N_0} = \frac{2\cdot 2.83\cdot 10^{-3}\ {\rm V^2 s}}{10^{-6}\ {\rm V^2/Hz}} = 5.66\cdot 10^3 \quad\Rightarrow\quad 10\lg\cdot\rho_{d,\rm WR}\ \underline{= 37.53\ {\rm dB}}.$$

b) Für den Frequenzgang bei farbigen Störungen gilt unter der Bedingung $T_{\rm D} = 0$:

$$H_{\rm MF}(f) = K_{\rm MF}\cdot\frac{G^\star(f)}{|H_{\rm N}(f)|^2}\ \text{ mit } G(f) = g_0\cdot\Delta t\cdot {\rm e}^{-\pi(\Delta t\cdot f)^2},\ \frac{1}{|H_{\rm N}(f)|^2} = 1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2.$$

Aus der Bedingung $H_{\rm MF}(f = 0) = 1$ folgt $K_{\rm MF} = 1/(g_0\cdot\Delta t)$. Damit erhält man:

$$H_{\rm MF}(f) = {\rm e}^{-\pi(\Delta t\cdot f)^2}\cdot\left(1+(f/f_0)^2\right).$$

Bei weißem (frequenzunabhängigen) Rauschen wäre das Matched-Filter allein durch den ersten Term gegeben, der die Anpassung an den Nutzimpuls $g(t)$ bewirkt. Bei farbigen Störungen ⇒ Störleistungsdichtespektrum $\Phi_n(f)$ werden höhere Frequenzen durch den Korrekturterm $1 + (f/f_0)^2$ angehoben, da in diesem Bereich die Störungen geringer sind. Für $f = 1/\Delta t = 2f_0 = 1$ kHz erhält man:

$$H_{\rm MF}(f = 1/\Delta t) = {\rm e}^{-\pi}\cdot\left(1+2^2\right)\ \underline{= 0.216}.$$

c) Allgemein gilt für das S/N–Verhältnis am Ausgang des Matched-Filters:

$$\rho_d = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|G(f)|^2}{\Phi_n(f)}\,{\rm d}f = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|G(f)|^2}{N_0/2}\,{\rm d}f \quad + \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|G(f)|^2}{N_0/2}\cdot\frac{f^2}{f_0^2}\,{\rm d}f.$$

Der erste Summand ist gleich dem S/N–Verhältnis bei weißem Rauschen. Für den zweiten Summanden erhält man:

$$\Delta\rho_d = \frac{g_0^2\cdot\Delta t^2}{N_0/2\cdot f_0^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f^2\cdot{\rm e}^{-2\pi(f\cdot\Delta t)^2}\,{\rm d}f.$$

Nach der Substitution $x = 2\cdot\pi^{1/2}\cdot f\cdot\Delta t$ lautet dieses Integral:

$$\Delta\rho_d = \frac{\sqrt{2}\cdot g_0^2\cdot\Delta t}{N_0}\cdot\frac{1}{4\pi\,(\Delta t\cdot f_0)^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot{\rm e}^{-x^2/2}\,{\rm d}x.$$

Dieses bestimmte Integral wurde vorne angegeben; es hat den Wert 1. Der erste Faktor beschreibt wiederum das S/N–Verhältnis bei weißem Rauschen. Damit ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\Delta\rho_d = \rho_{d,\rm WR}\cdot\frac{1}{4\pi\,(\Delta t\cdot f_0)^2},\qquad \rho_d = \rho_{d,\rm WR}+\Delta\rho_d = \rho_{d,\rm WR}\left(1+\frac{1}{4\pi\,(\Delta t\cdot f_0)^2}\right).$$

$$\Rightarrow\quad \Delta t\cdot f_0 = 0.5:\quad \rho_d = 1.318\cdot\rho_{d,\rm WR} = 7.46\cdot 10^3 \quad\Rightarrow\quad 10\lg\rho_d\ \underline{= 38.73\ {\rm dB}}.$$

Es ergibt sich ein um 1.2 dB besseres Ergebnis als bei weißem Rauschen, da hier $\Phi_n(f)$ im gesamten Frequenzbereich mit Ausnahme der Frequenz $f = 0$ (hier gilt das Gleichheitszeichen) kleiner ist als $N_0/2$. Diese Tatsache wird auch vom Matched–Filter ausgenutzt.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z5.8

a) Für alle Frequenzen $|f| < f_G$, bei denen das Nutzsignal Spektralanteile besitzt ($G(f) \neq 0$), ist das Störleistungsdichtespektrum $\Phi_n(f) = N_0/2$. Damit lautet der Frequenzgang des Matched-Filters, $T_D = 0$ vorausgesetzt:

$$H_{\rm MF}(f) = K_{\rm MF} \cdot G(f).$$

Der optimale Frequenzgang $H_{\rm MF}(f)$ ist in diesem Fall ebenso wie $G(f)$ rechteckförmig mit Breite Δf. Für den Nutzanteil des MF-Ausgangssignals gilt:

$$d_S(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad G(f) \cdot H_{\rm MF}(f).$$

Das Produkt zweier Rechteckfunktionen gleicher Breite ergibt wiederum diese Rechteckfunktion. Daraus folgt weiter, dass der Ausgangsimpuls des Matched-Filters ebenfalls si-förmig verläuft. Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1 und 3.

b) Bei weißem Rauschen erhält man:

$$\rho_d = \frac{1}{N_0/2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \, {\rm d}f.$$

Das Integral liefert den Wert $G_0^2 \cdot \Delta f$. Daraus folgt:

$$\rho_d = \frac{G_0^2 \cdot \Delta f}{N_0/2} = \frac{10^{-8}\,({\rm V/Hz})^2 \cdot 10^4\ {\rm Hz}}{10^{-6}\ {\rm V^2/Hz}} = 10^2 \qquad \Rightarrow \qquad 10\,{\rm lg}\,\rho_d = \underline{20\ {\rm dB}}.$$

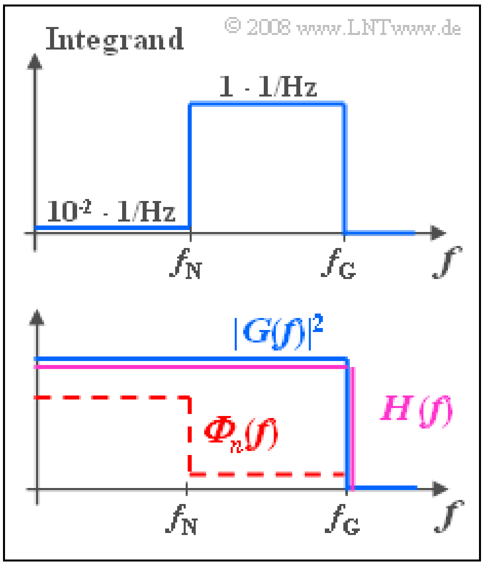
c) Allgemein gilt für das SNR bei farbiger Störung:

$$\rho_d = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{|G(f)|^2}{\Phi_n(f)} \, {\rm d}f.$$

Wie aus der nebenstehenden qualitativen Skizze hervorgeht, ist der Integrand bei den vorgegebenen Frequenzgängen stückweise konstant. Mit $f_G = 5$ kHz und $f_N = f_G/2$ (= 2.5 kHz) erhält man somit:

$$\rho_d = 2 \cdot 2.5\ {\rm kHz} \left(\frac{10^{-2}}{\rm Hz} + \frac{1}{\rm Hz} \right) = 5.05 \cdot 10^3$$

$$\Rightarrow \quad 10 \cdot {\rm lg}\,\rho_d = \underline{37.03\ {\rm dB}}.$$



Interpretation:

Der Matched–Filter–Frequenzgang $H_{\rm MF}(f)$ hat genau den selben Verlauf wie der oben skizzierte Integrand. Wird die Konstante $K_{\rm MF}$ (willkürlich) so gewählt, dass im Bereich $f_N \le f \le f_G$ der MF–Frequenzgang den Wert 1 besitzt, so gilt für tiefe Frequenzen ($|f| < f_N$): $H_{\rm MF}(f) = 0.01$. Das bedeutet: Das Matched–Filter bevorzugt diejenigen Frequenzen, die durch die Störung $\Phi_n(f)$ nur wenig beeinträchtigt werden.

Würde man stattdessen ein Filter $H(f)$ verwenden, das alle Frequenzen des Nutzsignals bis einschließlich

f_G gleich bewertet (violetter Kurvenverlauf in der unteren Skizze), so ergäben sich folgende Verhältnisse:

$$d_\mathrm{S}(T_\mathrm{D}) = G_0 \cdot 2 \cdot f_\mathrm{G} = 1\ \mathrm{V},$$

$$\sigma_d^2 = 10^{-6}\,\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{Hz}} \cdot f_\mathrm{G} + 10^{-8}\,\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{Hz}} \cdot (f_\mathrm{G} - f_\mathrm{N}) = 2.5 \cdot 1.01 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{V}^2$$

$$\Rightarrow \rho_d = \frac{d_\mathrm{S}(T_\mathrm{D})^2}{\sigma_d^2} = \frac{1\ \mathrm{V}^2}{2.525 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{V}^2} = 396 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot \lg \rho_d = 25.98\ \mathrm{dB}.$$

Das Signal–zu–Rauschverhältnis ist somit um ca. 11 dB schlechter, als wenn man das Matched–Filter für farbige Störungen verwendet.

Musterlösung zur Aufgabe A5.9

a) Richtig ist hier nur der letzte Lösungsvorschlag. Die Aufgabenstellung („Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers") weist bereits auf das Filter nach Wiener–Kolmogorow hin. Das Matched–Filter verwendet man dagegen, um die Signalenergie zu bündeln und dadurch für einen vorgegebenen Zeitpunkt das S/N–Verhältnis zu maximieren.

b) Für den optimalen Frequenzgang gilt nach Wiener und Kolmogorow allgemein:

$$H(f) = H_{\rm WF}(f) = \frac{1}{1 + \Phi_n(f)/\Phi_s(f)}.$$

Mit den gegebenen Leistungsdichtespektren kann hierfür auch geschrieben werden:

$$H(f) = \frac{1}{1 + N_0/(2\Phi_0)\cdot[1+(f/f_0)^2]} = \frac{1}{1 + 1/Q\cdot[1+(f/f_0)^2]}.$$

Mit $Q = 3$ folgt daraus:

$$H(f=0) = \frac{1}{1+1/Q} = \frac{Q}{Q+1} \underline{= 0.75},$$

$$H(f=2f_0) = \frac{1}{1+5/Q} = \frac{Q}{Q+5} \underline{= 0.375}.$$

c) Für das unter b) berechnete Filter gilt unter Berücksichtigung der Symmetrie:

$$\text{MQF} = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)\cdot\Phi_n(f)\,{\rm d}f = \int_{0}^{+\infty} \frac{N_0}{1 + N_0/(2\Phi_0)\cdot[1+(f/f_0)^2]}\,{\rm d}f.$$

Hierfür kann mit $Q = 2\Phi_0 / N_0$ und $a^2 = Q + 1$ auch geschrieben werden:

$$\text{MQF} = \int_0^\infty \frac{2\Phi_0}{Q+1+(f/f_0)^2}\,{\rm d}f = 2\Phi_0\cdot f_0 \int_0^\infty \frac{1}{a^2+x^2}\,{\rm d}x.$$

Mit dem angegebenen Integral führt dies zum Ergebnis:

$$\text{MQF} = \frac{2\Phi_0 f_0}{\sqrt{1+Q}}\left(\arctan(\infty) - \arctan(0)\right) = \frac{\Phi_0 f_0 \pi}{\sqrt{1+Q}}.$$

Normiert man MQF auf die Nutzleistung P_s, so erhält man für $Q = 3$:

$$\frac{\text{MQF}}{P_s} = \frac{1}{\sqrt{1+Q}} \underline{= 0.5}.$$

d) Aus der Berechnung in (c) folgt für $\text{MQF}/P_s \le 0.1$ direkt die Bedingung $Q \ge 99 \;\Rightarrow\; Q_{\rm min} \underline{= 99}$. Je größer Q ist, desto kleiner wird der mittlere quadratische Fehler.

e) Ein zum Wiener–Kolmogorow–Filterr formgleicher Frequenzgang $\Rightarrow$ $H(f) = K\cdot H_{\rm WF}(f)$ mit $K \ne 1$ führt stets zu großen Verfälschungen. Dies kann man sich zum Beispiel am rauschfreien Fall ($Q \to \infty$) verdeutlichen. In diesem Fall wäre $d(t) = K\cdot s(t)$ und die Optimierungsaufgabe trotz guter Bedingungen extrem schlecht gelöst.

Aus der Gleichung

$$\text{MQF} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\text{WF}}(f) \cdot \Phi_n(f)\ \text{d}f$$

könnte man fälschlicherweise schließen, dass durch ein Filter $H(f) = 2 \cdot H_{\text{WF}}(f)$ der mittlere quadratische Fehler nur verdoppelt wird. Dem ist jedoch nicht so, da $H(f)$ dann kein Wiener-Filter mehr ist und obige Gleichung auch nicht mehr anwendbar.

Die zweite Aussage ist zutreffend, wie aus der folgenden Skizze hervorgeht. Die Punkte markieren den Frequenzgang $H_{\text{WF}}(f)$ des Wiener–Kolmogorow–Filters für Q = 3 bzw. für Q = 10. Richtig ist also nur der zweite Lösungsvorschlag.

Begründung:
Bei großem Q = 10 werden hohe Anteile weniger gedämpft als bei Q = 3. Deshalb beinhaltet das Filterausgangssignal im Fall Q = 10 mehr höherfrequente Anteile, die auf das Rauschen $n(t)$ zurückgehen.