Überblick zu Kapitel 2 des Buches Stochastische Signaltheorie

Dieses Kapitel soll Sie mit **diskreten Zufallsgrößen** vertraut machen, wobei diese als statistisch unabhängig vorausgesetzt werden. Solche Zufallsgrößen werden in der Nachrichtentechnik zum Beispiel für die Simulation eines binären oder mehrstufigen Digitalsignals benötigt, aber ebenso zur Nachbildung eines Kanals mit statistisch unabhängigen Fehlern durch ein digitales Modell wie z. B. dem BSC-Modell.

Im Einzelnen werden behandelt:

- der Zusammenhang zwischen *Wahrscheinlichkeit* und *relativer Häufigkeit*,
- die *Erwartungswerte* und *Momente*,
- die *Binomial-* und die *Poissonverteilung* als Sonderfälle diskreter Verteilungen,
- die Erzeugung pseudozufälliger Binärsymbole mittels *PN-Generatoren* und
- die *Erzeugung mehrstufiger Zufallsgrößen* an einem Digitalrechner.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 21 Bildschirmseiten dargestellt. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel noch 25 Grafiken, sieben Aufgaben und fünf Zusatzaufgaben mit insgesamt 57 Teilaufgaben, sowie drei Lernvideos (LV) und drei Interaktionsmodule (IM):

- **Das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen** (LV zu Kap. 2.1 – Dauer 4:25)
- **Momente von diskreten Zufallsgrößen** (LV zu Kap. 2.2 – Dauer 6:32)
- **Ereigniswahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung** (IM zu Kap. 2.3)
- **Gegenüberstellung Binomialverteilung/Poissonverteilung** (IM zu Kap. 2.3 und Kap. 2.4)
- **Ereigniswahrscheinlichkeiten der Poissonverteilung** (IM zu Kap. 2.4)
- **Erläuterung der PN–Generatoren** (LV zu Kap. 2.5 – Dauer 5:10)

Literaturhinweise: **[BFS87] – [Hän97] – [Hau03] – [Kre85] – [PP02] – [Söd88] – [Söd93] – [ZP85]**

Hinweise zur Nomenklatur
Wir bezeichnen Binärsymbole wie in der digitalen Schaltungstechnik mit **L** (Low) und **H** (High), um Verwechslungen zu vermeiden. In der Codierungstheorie wird {**L**, **H**} stets auf die Werte {0, 1} abgebildet, um die Modulo-Algebra nutzen zu können. Zur Beschreibung der Modulation mit bipolaren (antipodalen) Signalen wählt man besser die Zuordnung {**L**, **H**} ⇔ {–1, +1}.

Weitere Informationen zum Thema sowie Aufgaben, Simulationen und Programmierübungen finden Sie in Kapitel 1 und 2 des Praktikums *Simulationsmethoden in der Nachrichtentechnik* (Prof. Söder), das auf den 24 DOS-Programmen des Lehrsoftwarepakets *LNTsim* basiert.

- Kapitel 1: *Diskrete Zufallsgrößen*, Programm *dis*
- Kapitel 2: *Pseudonoise–Generatoren*, Programm *png*

Hinweise zum Herunterladen des Programmpakets *LNTsim* und der Versuchsanleitung:

Lehrsoftwarepaket LNTsim (Zip–Version, mehr als 50 MB)

Praktikumsanleitung – Teil A (PDF–Version, ca. 8.5 MB)

Zum Begriff der Zufallsgröße

In Kapitel 1.1 wurde bereits der Begriff **Zufallsexperiment** erläutert. Darunter versteht man einen unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbaren Versuch mit ungewissem Ergebnis E, bei dem jedoch die Menge $\{E_\mu\}$ der möglichen Ergebnisse angebbar ist.

Häufig sind die Versuchsergebnisse Zahlenwerte, z. B. beim Zufallsexperiment *Werfen eines Würfels*. Dagegen liefert das Experiment *Münzwurf* die zwei möglichen Ergebnisse *Zahl* und *Bild*.

Zur einheitlichen Beschreibung verschiedenartiger Experimente und auch wegen der besseren Handhabbarkeit verwendet man den Begriff *Zufallsgröße*, oft auch als *Zufallsvariable* bezeichnet.

Definition: Eine **Zufallsgröße** z ist eine ein-eindeutige Abbildung der Ergebnismenge $\{E_\mu\}$ auf die Menge der reellen Zahlen. Ergänzend zu dieser Definition wird noch zugelassen, dass die Zufallsgröße neben dem Zahlenwert auch eine Einheit besitzt.

Nachfolgend werden einige Beispiele für Zufallsgrößen genannt:

- Beim Zufallsexperiment *Werfen einer Roulettekugel* hat eine Unterscheidung zwischen E und z keine praktischen Auswirkungen, kann aber aus formalen Gründen durchaus sinnvoll sein. So bezeichnet „$E_\mu = 8$”, dass die Kugel in der mit „8“ markierten Vertiefung der Roulettescheibe zum Liegen gekommen ist. Arithmetische Operationen (zum Beispiel eine Erwartungswertbildung) sind anhand der Ergebnisse nicht möglich. Dagegen bezeichnet die Zufallsgröße z tatsächlich einen Zahlenwert (hier ganzzahlig zwischen 0 und 36), aus dem der zu erwartende Mittelwert der Zufallsgröße (hier 18) ermittelt werden kann. Durchaus möglich, aber nicht sinnvoll wäre zum Beispiel die Zuordnung $E_\mu = 8 \Leftrightarrow z_\mu \neq 8$.
- Beim Experiment *Münzwurf* sind die möglichen Ergebnisse *Zahl* und *Bild*, worauf keine arithmetische Operationen angewendet werden können. Erst durch die zwar willkürliche, aber ein-eindeutige Zuordnung zwischen der Ereignismenge $\{E_\mu\}$ = $\{$*Zahl*, *Bild*$\}$ und der Zahlenmenge $\{z_\mu\} = \{0,\ 1\}$ kann hier überhaupt ein Kennwert angegeben werden. Ebenso könnte man die Zuordnung „*Bild* $\Leftrightarrow$ 0; *Zahl* $\Leftrightarrow$ 1” festlegen.
- In der Schaltungstechnik bezeichnet man die beiden möglichen logischen Zustände einer Speicherzelle – z. B. eines Flipflops – gemäß den möglichen Spannungspegeln mit **L** (Low) und **H** (High). Diese Bezeichnungen übernehmen wir hier auch für Binärsymbole. Für praktische Arbeiten bildet man diese Symbole meist wieder auf Zufallsgrößen ab, wobei auch diese Zuordnung willkürlich ist, aber sinnvoll sein sollte. In der Codierungstheorie wird sinnvollerweise $\{\mathbf{L}, \mathbf{H}\}$ auf $\{0,\ 1\}$ abgebildet, um die Möglichkeiten der Modulo-Algebra nutzen zu können. Zur Beschreibung der Modulation mit bipolaren (antipodalen) Signalen wählt man dagegen besser die Zuordnung $\{\mathbf{L}, \mathbf{H}\} \Leftrightarrow \{–1, +1\}$.

Kontinuierliche und diskrete Zufallsgrößen

Nach den möglichen Zahlenwerten $z_\mu = z(E_\mu)$ unterscheiden wir hier zwischen **kontinuierlichen** und **diskreten** Zufallsgrößen:

- Eine kontinuierliche Zufallsgröße z kann – zumindest in gewissen Bereichen – unendlich viele verschiedene Werte annehmen. Genauer gesagt: Die Menge der zulässigen Werte ist bei solchen Größen auch nicht abzählbar. Beispiele für kontinuierliche Zufallsgrößen sind die Geschwindigkeit eines Autos (bei angemessener Fahrweise zwischen 0 und 120 km/h) oder auch die Rauschspannung bei einem Nachrichtensystem. Beide Zufallsgrößen haben neben einem Zahlenwert auch eine Einheit.
- Ist dagegen die Menge $\{z_\mu\}$ abzählbar, so bezeichnet man die Zufallsgröße als diskret. Meist ist die Zahl der möglichen Werte von z auf M begrenzt. In der Nachrichtentechnik nennt man M den **Symbolumfang** (im Sinne der Codierungs- und Informationstheorie) bzw. die **Stufenzahl** (aus Sicht der Übertragungstechnik).

Zunächst beschränken wir uns auf diskrete, M-stufige Zufallsgrößen ohne innere statistischen Bindungen, die gemäß **Kapitel 1.1** durch die M Auftrittswahrscheinlichkeiten $p_\mu = \Pr(z = z_\mu)$ vollständig charakterisiert sind. Per Definition ist die Summe über alle M Wahrscheinlichkeiten gleich 1.

Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr(z = z_\mu)$ dafür, dass eine kontinuierliche Zufallsgröße z einen ganz bestimmten Wert z_μ annimmt, identisch Null. Hier muss, wie im folgenden Kapitel „Kontinuierliche Zufallsgrößen” beschrieben wird, auf die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) übergegangen werden. Weitere Informationen hierüber finden Sie in **Kapitel 3.**

Zufallsprozess und Zufallsfolge

Ein **Zufallsprozess** unterscheidet sich von dem bisher betrachteten Zufallsexperiment dadurch, dass er nicht nur ein Ergebnis (Ereignis) liefert, sondern eine zeitliche Folge von Ergebnissen (Ereignissen). Damit kommt man zur **Zufallsfolge** $\langle z_\nu \rangle$ mit folgenden in unserer Darstellung festgelegten Eigenschaften:

- Die Laufvariable ν beschreibt den zeitlichen Prozessablauf und kann Werte zwischen 1 und N annehmen. Häufig wird eine solche Folge auch als **N-dimensionaler Vektor** dargestellt.
- Zu jeder Zeit ν kann die Zufallsgröße z_ν einen von M verschiedenen Werten annehmen:

  $$z_\nu \in z_\mu \quad \text{mit} \quad \nu = 1, \ldots, N \quad \text{und} \quad \mu = 1, \ldots, M.$$

- Ist der Prozess **ergodisch**, so weist jede Zufallsfolge $\langle z_\nu \rangle$ gleiche statistische Eigenschaften auf und kann als Repräsentant für den gesamten Prozess herangezogen werden.
- Wir setzen hier voraus, dass zwischen den einzelnen Folgenelementen keine statistischen Bindungen bestehen, das heißt, es gilt für die **bedingten Wahrscheinlichkeiten**:

  $$\Pr(z_\nu | z_{\nu-1} \ldots z_1) = \Pr(z_\nu).$$

Mehr und vor allem Genaueres zu der Charakterisierung von Zufallsprozessen finden Sie im **Kapitel 4.4** (Autokorrelationsfunktion).

Beispiel: Wiederholt man das Zufallsexperiment *Werfen einer Roulettekugel* zehnmal, so ergibt sich z. B. die folgende Zufallsfolge: $\langle z_\nu \rangle = \langle\ 8;\ 23;\ 0;\ 17;\ 36;\ 0;\ 33;\ 11;\ 11;\ 25\ \rangle$. Zu jedem Zeitpunkt sind trotzdem – unabhängig von der Vergangenheit – alle Zufallsgrößen zwischen 0 und 36 möglich und auch gleichwahrscheinlich, was aber aus einer solch kurzen Folge nicht abgelesen werden kann.

Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen

Zur Beschreibung einer M-stufigen Zufallsgröße verwendet man folgende Beschreibungsgrößen, deren Summe über alle $\mu = 1, \ldots , M$ jeweils den Wert 1 ergeben:

- Die **Wahrscheinlichkeiten** $p_\mu = \Pr(z = z_\mu)$ liefern Vorhersagen über das zu erwartende Ergebnis eines statistischen Versuchs und sind somit so genannte *A-priori-Kenngrößen*.
- Die **relativen Häufigkeiten** $h_\mu^{(N)}$ sind *A-posteriori-Kenngrößen* und erlauben statistische Aussagen bezüglich eines vorher durchgeführten Versuches. Sie werden wie folgt ermittelt:

$$h_\mu^{(N)} = \frac{n_\mu}{N} = \frac{\text{Anzahl der Versuche mit dem Ergebnis } z_\mu}{\text{Anzahl aller Versuche}} \qquad (\mu = 1, \ldots, M).$$

Nur im Grenzfall $N \to \infty$ stimmen die relativen Häufigkeiten exakt mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten überein, zumindest im statistischen Sinne. Dagegen gilt für endliche Werte von N nach dem von **Bernoulli** formulierten **Gesetz der großen Zahlen**:

$$\Pr\left(\mid h_\mu^{(N)} - p_\mu \mid \ge \varepsilon \right) \le \frac{1}{4 \cdot N \cdot \varepsilon^2}.$$

Daraus folgt auch die Aussage, dass bei unendlich langen Zufallsfolgen ($N \to \infty$) die relativen Häufigkeiten $h_\mu^{(N)}$ und die Wahrscheinlichkeiten p_μ mit der Wahrscheinlichkeit 1 identisch sind.

Beispiel: Eine Binärdatei besteht aus $N = 10^6$ Binärsymbolen (Bit), wobei die Nullen und Einsen gleichwahrscheinlich sind: $p_0 = p_1 = 0.5$. Das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen (mit $\varepsilon = 0.01$) besagt nun, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „die Anzahl der Einsen in der Datei liegt zwischen 495000 und 505000" größer oder gleich 1 – 0.0025 = 99.75% ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die relative Häufigkeit $h_\mu^{(N)}$ eines Ereignisses E_μ und die zugehörige Wahrscheinlichkeit p_μ betragsmäßig um mehr als einen Wert ε unterscheiden, ist also nicht größer als $1/(4 \cdot N \cdot \varepsilon^2)$. Für ein gegebenes ε und eine zu garantierende Wahrscheinlichkeit kann daraus der minimal erforderliche Wert von N berechnet werden. Weiter ist anzumerken:

- Der monotone Abfall mit N gilt nur im statistischen Sinne und nicht für jede einzelne Realisierung. So können beim Experiment *Münzwurf* durchaus nach $N = 1000$ Würfen die relative Häufigkeiten von *Zahl* und *Bild* exakt gleich 0.5 sein (wenn $n_\text{Zahl} = n_\text{Bild} = 500$ ist) und nach $N = 2000$ Würfen wieder mehr oder weniger stark davon abweichen.
- Führen mehrere Probanden parallel dass Experiment *Münzwurf* durch und stellt man jeweils die relative Häufigkeit in Abhängigkeit von N dar, so ergeben sich dementsprechend Kurvenverläufe, die zwar tendenziell, aber nicht monoton abfallen.
- Berechnet man aber den Mittelwert über unendlich viele solcher Kurven, so erhält man den monoton mit N abfallenden Verlauf gemäß Bernouilli.

Mit dieser Thematik, speziell mit dem Experiment von **Pearson,** beschäftigt sich das Lernvideo

Das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen (Dauer 4:25)

Berechnung als Schar- bzw. Zeitmittelwert

Die Wahrscheinlichkeiten bzw. die relativen Häufigkeiten liefern weitreichende Informationen über eine diskrete Zufallsgröße. Reduzierte Informationen erhält man durch die so genannten **Momente** m_k, wobei k eine natürliche Zahl darstellt.

Unter der hier stillschweigend vorausgesetzten **Ergodizität** gibt es für das Moment k-ter Ordnung zwei unterschiedliche Berechnungsmöglichkeiten:

- die **Scharmittelung** bzw. *Erwartungswertbildung* (Mittelung über alle möglichen Werte):

$$m_k = \mathrm{E}[z^k] = \sum_{\mu=1}^{M} p_\mu \cdot z_\mu^k \qquad\qquad \text{mit } \mathrm{E}[\ldots]: \text{Erwartungswert},$$

- die **Zeitmittelung** über die Zufallsfolge $\langle z_\nu \rangle$ mit der Laufvariablen $\nu = 1, \ldots, N$:

$$m_k = \overline{z_\nu^k} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} z_\nu^k \qquad\qquad \text{mit überstreichender Linie: Zeitmittelwert}.$$

Beide Berechnungsarten führen für genügend große Werte von N zum gleichen asymptotischen Ergebnis. Bei endlichem N ergibt sich ein vergleichbarer Fehler, als wenn die Wahrscheinlichkeit durch die relative Häufigkeit angenähert wird.

Linearer Mittelwert - Gleichanteil

Mit k = 1 erhält man aus der allgemeinen Gleichung für die Momente den **linearen Mittelwert**:

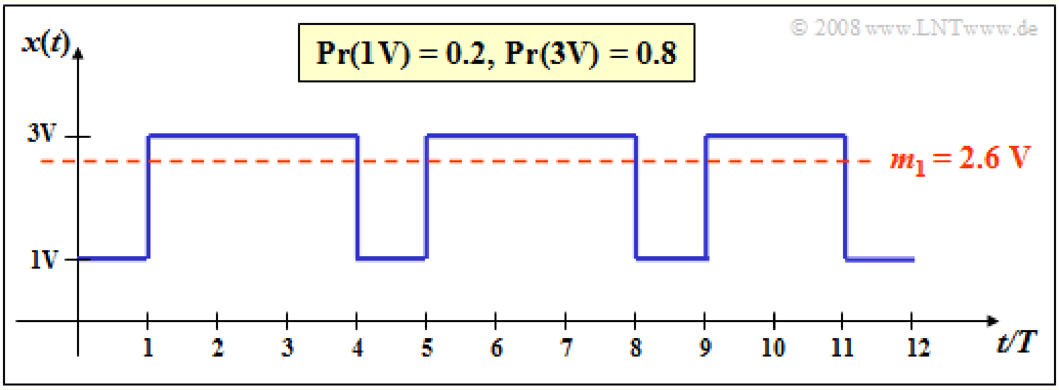
$$m_1 = \sum_{\mu=1}^{M} p_\mu \cdot z_\mu = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} z_\nu .$$

Der linke Teil dieser Gleichung beschreibt die Scharmittelung (über alle möglichen Werte), während die rechte Gleichung die Bestimmung als Zeitmittelwert angibt. In Zusammenhang mit Signalen wird diese Größe auch als der **Gleichanteil** bezeichnet.

Beispiel: Ein Binärsignal mit den beiden Amplitudenwerten 1V (für das Symbol **L**) und 3V (für das Symbol **H**) sowie den Auftrittswahrscheinlichkeiten $p_{\rm L}$ = 0.2 bzw. $p_{\rm H}$ = 0.8 besitzt den linearen Mittelwert

$$m_1 = 0.2 \cdot 1\,{\rm V} + 0.8 \cdot 3\,{\rm V} = 2.6\,{\rm V}.$$

Dieser Gleichanteil ist in der Grafik als rote Linie eingezeichnet.



Bestimmt man diese Kenngröße durch Zeitmittelung über die dargestellten N = 12 Signalwerte, so wird man einen etwas kleineren Wert erhalten:

$$m_1' = 1/3 \cdot 1\,{\rm V} + 2/3 \cdot 3\,{\rm V} = 2.33\,{\rm V}.$$

Hier wurden die Auftrittswahrscheinlichkeiten $p_{\rm L}$ = 0.2 bzw. $p_{\rm H}$ = 0.8 durch die entsprechenden Häufigkeiten $h_{\rm L}$ = 4/12 und $h_{\rm H}$ = 8/12 ersetzt. Der relative Fehler aufgrund der unzureichenden Folgenlänge N ist im Beispiel größer als 10%.

Quadratischer Mittelwert – Varianz – Streuung

Analog zum linearen Mittelwert erhält man mit k = 2 für den **quadratischen Mittelwert**:

$$m_2 = \sum_{\mu=1}^{M} p_\mu \cdot z_\mu^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} z_\nu^2.$$

Bei Nachrichtensignalen gibt m_2 die (mittlere) *Leistung* an, bezogen auf den Widerstand 1 Ω. Beschreibt z eine Spannung, so besitzt m_2 die Einheit „V²". Zusammen mit dem Gleichanteil m_1 kann daraus als weitere Kenngröße die **Varianz** σ^2 bestimmt werden (*Satz von Steiner*):

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2.$$

Als **Streuung** σ bezeichnet man in der Statistik die Quadratwurzel der Varianz; manchmal wird diese Größe auch *Standardabweichung* genannt.

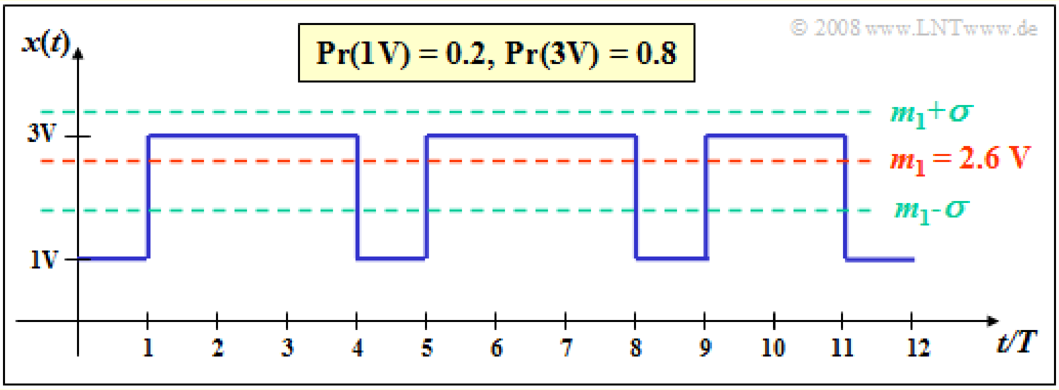
Die Varianz σ^2 eines Zufallssignals entspricht physikalisch der *Wechselleistung* und die Streuung σ dem *Effektivwert*. Dieser Definition liegt wiederum der Bezugswiderstand 1 Ω zugrunde.

Nachfolgendes Lernvideo verdeutlicht die definierten Größen am Beispiel eines Digitalsignals:
Bedeutung und Berechnung der Momente bei diskreten Zufallsgrößen (Dauer 6:30)

Beispiel: Ein Binärsignal mit den Amplitudenwerten 1 V (Symbol **L**) und 3 V (Symbol **H**) sowie den Auftrittswahrscheinlichkeiten $p_{\rm L}$ = 0.2 bzw. $p_{\rm H}$ = 0.8 hat eine Signalleistung von 7.4 V². Mit m_1 = 2.6 V (siehe vorherige Seite) folgt daraus σ^2 = 0.64 V² bzw. σ = 0.8 V.

Hinweis: Bei anderem Bezugswiderstand ⇒ $R \ne 1$ Ω gelten obige Bezeichnungen nur bedingt. Beispielsweise haben die Leistung P, die Wechselleistung $P_{\rm W}$ und der Effektivwert $s_{\rm eff}$ mit R = 50 Ω folgende Werte:

$$P = \frac{m_2}{R} = \frac{7.4\,{\rm V}^2}{50\,\Omega} = 0.148\,{\rm W}, \quad P_{\rm W} = \frac{\sigma^2}{R} = 12.8\,{\rm mW}\,, \quad s_{\rm eff} = \sqrt{R \cdot P_{\rm W}} = \sigma = 0.8\,{\rm V}.$$



Die gleiche Varianz und der gleiche Effektivwert ergeben sich für die Amplitudenwerte 0 V (für das Symbol **L**) und 2 V (für das Symbol **H**), vorausgesetzt, die Auftrittswahrscheinlichkeiten $p_{\rm L}$ = 0.2 und $p_{\rm H}$ = 0.8 bleiben gleich. Dagegen stimmen die Momente – zum Beispiel der lineare Mittelwert m_1 und der quadratische Mittelwert m_2 – dann nicht mehr überein.

Allgemeine Beschreibung der Binomialverteilung

Die **Binomialverteilung** stellt einen wichtigen Sonderfall für die Auftrittswahrscheinlichkeiten einer diskreten Zufallsgröße dar.

Zur Herleitung der Binomialverteilung gehen wir davon aus, dass I binäre und statistisch voneinander unabhängige Zufallsgrößen b_i den Wert „1” mit der Wahrscheinlichkeit $\Pr(b_i = 0) = p$ und den Wert „0” mit der Wahrscheinlichkeit $\Pr(b_i = 1) = 1 - p$ annehmen kann. Dann ist die Summe

$$z = \sum_{i=1}^{I} b_i$$

ebenfalls eine diskrete Zufallsgröße mit dem Symbolvorrat $\{0, 1, 2, \ldots, I\}$, die man als binomialverteilt bezeichnet. Der Symbolumfang beträgt somit $M = I + 1$.

Beispiele: Die Binomialverteilung findet in der Nachrichtentechnik ebenso wie in anderen Disziplinen mannigfaltige Anwendungen. Sie

- beschreibt die Verteilung von Ausschussstücken in der statistischen Qualitätskontrolle,
- erlaubt die Berechnung der Restfehlerwahrscheinlichkeit bei blockweiser Codierung.

Die per Simulation gewonnene Bitfehlerquote eines digitalen Übertragungssystems ist im Grunde genommen ebenfalls eine binomialverteilte Zufallsgröße.

Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung

Für die **Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung** gilt mit $\mu = 0, \ \dots \ , I$:

$$p_\mu = \Pr(z = \mu) = \binom{I}{\mu} \cdot p^\mu \cdot (1-p)^{I-\mu}.$$

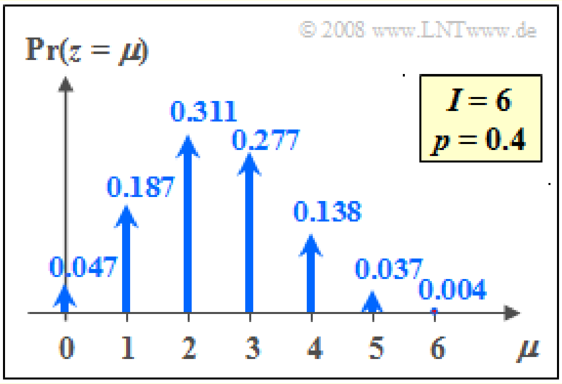
Der erste Term gibt hierbei die Anzahl der Kombinationen („I über μ”) an:

$$\binom{I}{\mu} = \frac{I!}{\mu! \cdot (I-\mu)!} = \frac{I \cdot (I-1) \cdot \ldots \cdot (I-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \mu}.$$

Beispiel: Die Grafik zeigt die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung sind für $I = 6$ und $p = 0.4$.

Für $I = 6$ und $p = 0.5$ ergeben sich die folgenden symmetrischen Binomialwahrscheinlichkeiten:

$$\Pr(z=0) = \Pr(z=6) = 1/64 = 0.015625,$$
$$\Pr(z=1) = \Pr(z=5) = 6/64 = 0.09375,$$
$$\Pr(z=2) = \Pr(z=4) = 15/64 = 0.234375,$$
$$\Pr(z=3) = 20/64 = 0.3125\ .$$



Mit nachfolgendem Berechnungsmodul können Sie die Binomialwahrscheinlichkeiten auch für andere Parameterwerte I und p ermitteln:
Ereigniswahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung

Weitere Hinweise:

- Für sehr große Werte von I kann die Binomialverteilung durch die im nächsten Abschnitt beschriebene **Poissonverteilung** angenähert werden.
- Ist gleichzeitig das Produkt $I \cdot p$ sehr viel größer als 1, so geht nach dem *Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace* die Poissonverteilung (und damit auch die Binomialverteilung) in eine diskrete **Gaußverteilung** über.

Beispiel „Blockfehlerwahrscheinlichkeit”

Überträgt man jeweils Blöcke von I = 10 Binärsymbolen über einen Kanal, der mit der Wahrscheinlichkeit p = 0.01 das Symbol verfälscht (e_i = 1) und entsprechend mit der Wahrscheinlichkeit 1 – p = 0.99 das Symbol unverfälscht überträgt (e_i = 0), so gilt für die neue Zufallsgröße f (Fehler pro Block):

$$f = \sum_{i=1}^{I} e_i .$$

Die Zufallsgröße f kann nun alle ganzzahligen Werte zwischen 0 (kein Symbol verfälscht) und I (alle Symbole falsch) annehmen; die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind p_μ.

- Der Fall, dass alle I Symbole richtig übertragen werden, tritt mit der Wahrscheinlichkeit p_0 = 0.99^{10} ≈ 0.9044 ein. Dies ergibt sich auch aus der Binomialformel für μ = 0 unter Berücksichtigung der Definition „10 über 0“ = 1.
- Ein einziger Symbolfehler (f = 1) tritt mit folgender Wahrscheinlichkeit auf:

  $$p_1 = 10 \cdot 0.01 \cdot 0.99^9 \approx 0.0914.$$

  Der erste Faktor berücksichtigt, dass es für die Position eines einzigen Fehlers genau „10 über 1“ = 10 Möglichkeiten gibt. Die beiden weiteren Faktoren beücksichtigen, dass ein Symbol verfälscht und neun richtig übertragen werden müssen, wenn f = 1 gelten soll.
- Für f = 2 gibt es deutlich mehr Kombinationen, nämlich „10 über 2“ = 45, und man erhält

  $$p_2 = 45 \cdot 0.01^2 \cdot 0.99^8 \approx 0.0041 .$$

Kann ein Blockcode bis zu zwei Fehlern korrigieren, so ist die Restfehlerwahrscheinlichkeit

$$p_{\rm R} = p_3 + \ldots + p_{10} \approx 10^{-4},$$

oder

$$p_{\rm R} = 1 - p_0 - p_1 - p_2 \approx 10^{-4}.$$

Man erkennt, dass die zweite Berechnungsmöglichkeit über das Komplement schneller zum Ziel führt. Man könnte aber auch berücksichtigen, dass bei diesen Zahlenwerten $p_{\rm R} \approx p_3$ gilt.

Momente der Binomialverteilung

Die Momente können mit den Gleichungen von **Kapitel 2.2** und den Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung allgemein berechnet werden. Für das **Moment *k*-ter Ordnung** gilt:

$$m_k = \mathrm{E}[z^k] = \sum_{\mu=0}^{I} \mu^k \cdot \binom{I}{\mu} \cdot p^\mu \cdot (1-p)^{I-\mu}.$$

Daraus erhält man nach einigen Umformungen für

- den linearen Mittelwert:

$$m_1 = I \cdot p,$$

- den quadratischen Mittelwert:

$$m_2 = (I^2 - I) \cdot p^2 + I \cdot p.$$

Die Varianz und die Streuung erhält man durch Anwendung des **Steinerschen Satzes**:

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = I \cdot p \cdot (1-p) \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{I \cdot p \cdot (1-p)}.$$

Die maximale Varianz $\sigma^2 = I/4$ ergibt sich für die charakteristische Wahrscheinlichkeit $p = 1/2$. In diesem Fall sind die Wahrscheinlichkeit symmetrisch um den Mittelwert $m_1 = I/2 \Rightarrow p_\mu = p_{I-\mu}$.

Je mehr die charakteristische Wahrscheinlichkeit p vom Wert 1/2 abweicht,

- um so kleiner ist die Streuung σ, und
- um so unsymmetrischer werden die Wahrscheinlichkeiten um den Mittelwert $m_1 = I \cdot p$.

Beispiel: Wir betrachten wie im letzten Beispiel einen Block von $I = 10$ Symbolen, die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.01$ unabhängig voneinander verfälscht werden. Dann ist

- ist die mittlere Anzahl von Fehlern pro Block gleich $m_f = \mathrm{E}[f] = I \cdot p = 0.1$, und
- die Streuung (Standardabweichung) der Zufallsgröße f beträgt $\sigma_f \approx 0.315$.

Im vollständig gestörten Kanal $\Rightarrow$ charakteristische Wahrscheinlichkeit $p = 1/2$ ergeben sich demgegenüber die Werte $m_f = 5$ und $\sigma_f \approx 1.581$.

Wahrscheinlichkeiten der Poissonverteilung

Die **Poissonverteilung** ist ein Grenzfall der Binomialverteilung, wobei

- zum einen von den Grenzübergängen $I \to \infty$ und $p \to 0$ ausgegangen wird,
- zusätzlich vorausgesetzt ist, dass das Produkt $I \cdot p = \lambda$ einen endlichen Wert besitzt.

Der Parameter λ gibt die mittlere Anzahl der „Einsen" in einer festgelegten Zeiteinheit an und wird als die **Rate** bezeichnet. Weiter i9st zu vermerken:

- Im Gegensatz zur Binomialverteilung ($0 \le \mu \le I$) kann hier die Zufallsgröße beliebig große (ganzzahlige, positive) Werte annehmen, was bedeutet, dass die Menge der möglichen Werte hier nicht abzählbar ist. Da jedoch keine Zwischenwerte auftreten können, spricht man auch hier von einer diskreten Verteilung.
- Berücksichtigt man die oben genannten Grenzübergänge in der Gleichung für die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung, so folgt für die Auftrittswahrscheinlichkeiten der poissonverteilten Zufallsgröße z:

$$p_\mu = \Pr(z = \mu) = \lim_{I \to \infty} \cdot \frac{I!}{\mu! \cdot (I-\mu)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{I}\right)^\mu \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mathrm{I}}\right)^{\mathrm{I}-\mu}.$$

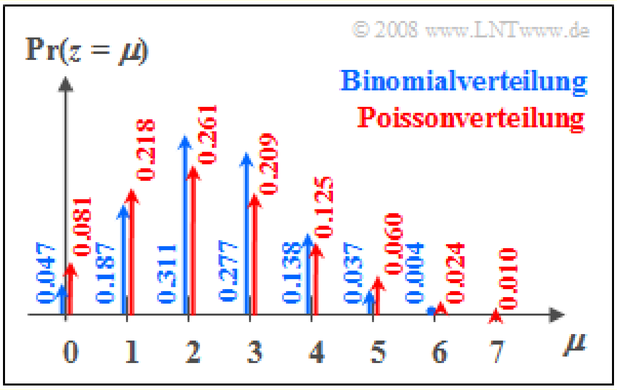
Daraus erhält man nach einigen algebraischen Umformungen:

$$p_\mu = \frac{\lambda^\mu}{\mu!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeiten von

- Binomialverteilung (mit $I = 6$, $p = 0.4$)
- und Poissonverteilung (mit $\lambda = 2.4$)

sind nebenstehender Grafik zu entnehmen:



- Beide Verteilungen besitzen den gleichen Mittelwert $m_1 = 2.4$.
- Bei der Poissonverteilung (rote Pfeile) sind die äußeren Werte wahrscheinlicher als bei der Binomialverteilung.
- Zudem sind auch Zufallsgrößen $z > 6$ möglich, auch wenn deren Wahrscheinlichkeiten bei der gewählten Rate eher klein sind.

Momente der Poissonverteilung

Mittelwert und **Streuung** der Poissonverteilung ergeben sich direkt aus den entsprechenden Gleichungen der Binomialverteilung durch zweifache Grenzwertbildung:

$$m_1 = \lim_{\substack{I \to \infty \\ p \to 0}} I \cdot p = \lambda,$$

$$\sigma = \lim_{\substack{I \to \infty \\ p \to 0}} \sqrt{I \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\lambda}.$$

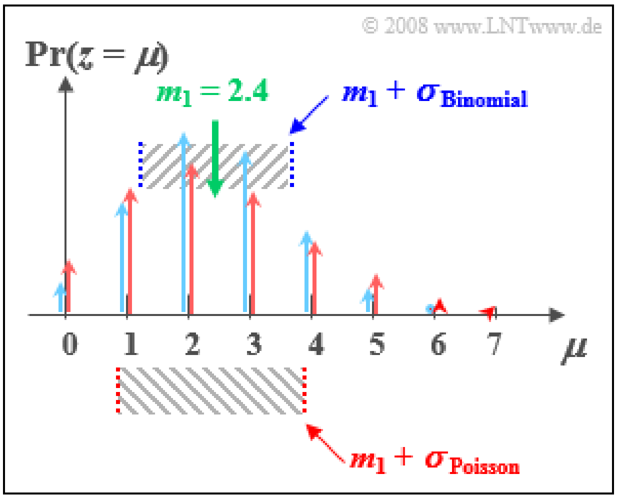
Daraus ist ersichtlich, dass bei der Poissonverteilung stets $\sigma^2 = m_1 = \lambda$ gilt.

Beispiel: Wie im letzten Beispiel werden hier

- Binomialverteilung (mit $I = 6$, $p = 0.4$)
- und Poissonverteilung (mit $\lambda = 2.4$)

miteinander verglichen:

- Beide Verteilungen besitzen genau den gleichen Mittelwert $m_1 = 2.4$.
- Bei der Poissonverteilung (im Bild rot markiert) beträgt die Streuung $\sigma \approx 1.55$.
- Bei der (blauen) Binomialverteilung ist die Standardabweichung nur $\sigma = 1.2$.



Mit den nachfolgend genannten Modulen können Sie die Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte der Poissonverteilung für beliebige λ–Werte ermitteln:

Ereigniswahrscheinlichkeiten der Poissonverteilung (für zwei unterschiedliche Raten)

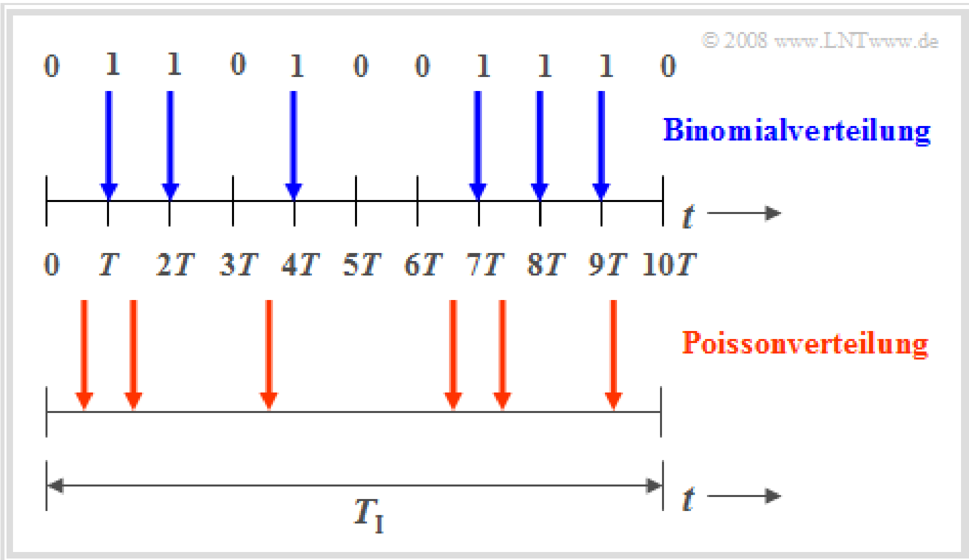
Gegenüberstellung Binomialverteilung - Poissonverteilung

Gegenüberstellung Binomialverteilung - Poissonverteilung

Im Folgenden sollen die **Gemeinsamkeiten** als auch die **Unterschiede** zwischen binomial- und poissonverteilten Zufallsgrößen nochmals herausgearbeitet werden.

Die **Binomialverteilung** ist zur Beschreibung von solchen stochastischen Ereignissen geeignet, die durch einen vorgegebenen Takt T gekennzeichnet sind. Beispielsweise beträgt bei **ISDN** (*Integrated Services Digital Network*) mit 64 kbit/s die Taktzeit T etwa 15.6 µs.

- Nur in diesem Zeitraster treten binäre Ereignisse auf. Solche Ereignisse sind beispielsweise die fehlerfreie ($e_i = 0$) oder fehlerhafte ($e_i = 1$) Übertragung einzelner Symbole.
- Die Binomialverteilung ermöglicht nun statistische Aussagen über die Anzahl der in einem längeren Zeitintervall $T_\text{I} = I \cdot T$ zu erwartenden Übertragungsfehler entsprechend des oberen Zeitdiagramms (blau markierte Zeitpunkte).



Auch die **Poissonverteilung** macht Aussagen über die Anzahl eintretender Binärereignisse in einem endlichen Zeitintervall:

- Geht man hierbei vom gleichen Betrachtungszeitraum T_I aus und vergrößert die Anzahl I der Teilintervalle immer mehr, so wird die Taktzeit T, zu der jeweils ein neues Binärereignis („0” oder „1”) eintreten kann, immer kleiner. Im Grenzfall geht T gegen Null.
- Das heißt: Bei der Poissonverteilung sind die binären Ereignisse nicht nur zu diskreten, durch ein Zeitraster vorgegebenen Zeitpunkten möglich, sondern jederzeit. Das untere Bild verdeutlicht diesen Sachverhalt.
- Um im Mittel während der Zeit T_I genau so viele „Einsen” wie bei der Binomialverteilung zu erhalten (im Beispiel: sechs), muss allerdings die (charakteristische) Wahrscheinlichkeit $p = \text{Pr}(e_i = 1)$ gegen Null tendieren.

Das folgende Interaktionsmodul erlaubt die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten und Momente:
Gegenüberstellung Binomialverteilung – Poissonverteilung

Anwendungen der Poissonverteilung

Die Poissonverteilung ist das Ergebnis eines so genannten **Poissonprozesses**. Ein solcher dient häufig als Modell für Folgen von Ereignissen, die zu zufälligen Zeitpunkten eintreten können. Beispiele für derartige Ereignisse sind

- der Ausfall von Geräten – eine wichtige Aufgabenstellung in der **Zuverlässigkeitstheorie**,
- das **Schrotrauschen** bei der optischen Übertragung, und
- der Beginn von Telefongesprächen in einer Vermittlungsstelle (**„Verkehrstheorie”**).

Beispiel: Gehen bei einer Vermittlungsstelle im Langzeitmittel neunzig Vermittlungswünsche pro Minute (entsprechend λ = 1.5 pro Sekunde) ein, so lauten die Wahrscheinlichkeiten p_μ, dass in einem beliebigen Zeitraum von einer Sekunde genau μ Belegungen auftreten:

$$p_\mu = \frac{1.5^\mu}{\mu!} \cdot \mathrm{e}^{-1.5}.$$

Es ergeben sich die Zahlenwerte $p_0 = 0.223$, $p_1 = 0.335$, $p_2 = 0.251$, usw.

Daraus lassen sich weitere Kenngrößen ableiten:

- Die Abtand τ zwischen zwei Vermittlungswünschen genügt der **Exponentialverteilung.**
- Die mittlere Zeitspanne zwischen Vermittlungswünschen beträgt $\mathrm{E}[\tau] = 1/\lambda \approx 0.667$ s.

Pseudozufallsgrößen

Eine Möglichkeit zur Erzeugung einer binären Zufallsfolge $\langle z_\nu \rangle \in \{0, 1\}$ mit guten statistischen Eigenschaften bieten die so genannten Pseudozufallsgeneratoren, auch bekannt unter dem Namen **PN-Generatoren**, wobei „PN" für *Pseudonoise* steht. Diese besitzen folgende Eigenschaften:

- Die durch einen solchen Generator erzeugte Binärfolge ist im strengen Sinne nicht stochastisch, sondern weist periodische und damit deterministische Eigenschaften auf.
- Ist die Periodenlänge P jedoch hinreichend groß, so erscheint die Folge für einen Betrachter als zufällig mit für viele Anwendungsfälle hinreichend guten statistischen Eigenschaften.
- Der Vorteil eines Pseudozufallsgenerators gegenüber einer „echten" stochastischen Quelle ist, dass die Zufallsfolge bei Kenntnis einiger weniger Parameter reproduzierbar ist.

Beispiele: Aus der letzten Eigenschaft heraus ergeben sich auch die wichtigsten Anwendungen der Pseudonoise-Generatoren:

- zum einen die *Fehlerhäufigkeitsmessung* bei der Digitalsignalübertragung,
- zum zweiten zur Bandspreizung bei CDMA (*Code Division Multiple Access*).

Bei einem solchen *Spread Spectrum System* wird das Sendesignal mit einer binären Zufallsfolge moduliert, deren Symbolfolgefrequenz deutlich größer als die Bitfrequenz ist. Dadurch bietet sich die Möglichkeit der Mehrfachausnutzung von Kanälen. Da am Empfänger die gleiche Folge phasenrichtig zugesetzt werden muss, ist auch hier der Einsatz von reproduzierbaren PN-Sequenzen üblich.

Au7sführliche Informationen zu den Bandspreizverfahren finden Sie im Buch „Beispiele von Nachrichtensysteme" im Kapitel 4: **UMTS – Universal Mobile Telecommunication System.**

Realisierung von PN-Generatoren

Pseudozufallsgeneratoren werden meist durch **rückgekoppelte Schieberegister** realisiert, wobei zu jedem Taktzeitpunkt der Inhalt des Registers um eine Stelle nach rechts geschoben wird (siehe Grafik). Für das aktuell erzeugte Symbol gilt mit $g_l \in \{0, 1\}$ und $l = 1, \ldots , L–1$:

$$z_\nu = (g_1 \cdot z_{\nu-1} + g_2 \cdot z_{\nu-2} + \ldots + g_l \cdot z_{\nu-l} + \ldots + g_{L-1} \cdot z_{\nu-L+1} + z_{\nu-L}) \bmod 2.$$

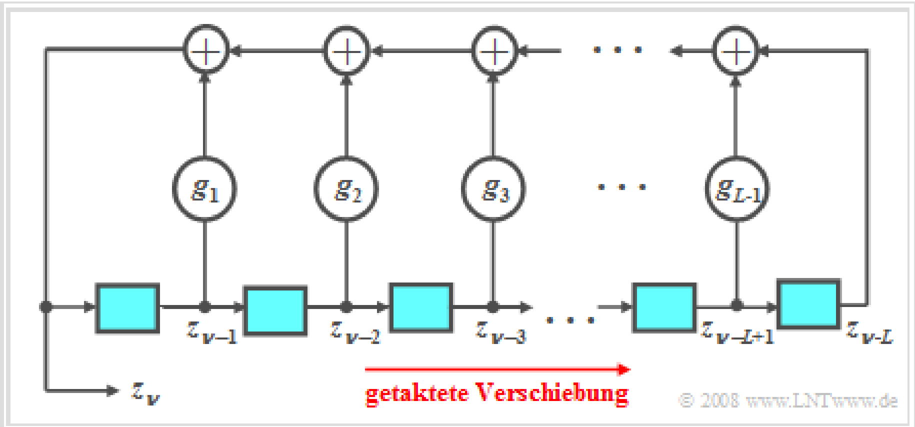
Die zu vorherigen Zeitpunkten generierten Binärwerte $z_{\nu-1}$ bis $z_{\nu-L}$ sind in den Speicherzellen des Schieberegisters abgelegt. Die Koeffizienten g_1 ... g_{L-1} sind ebenfalls Binärwerte, wobei eine „1” eine Rückkopplung an der entsprechenden Stelle kennzeichnet und eine „0” keine Rückführung.

Die Modulo-2-Addition kann zum Beispiel durch eine XOR-Verknüpfung realisiert werden:

$$(x + y) \bmod 2 = x \,\mathrm{XOR}\, y = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Voraussetzung für die Entstehung einer PN-Folge ist, dass nicht alle Speicherelemente mit Nullen vorbelegt sind, da sonst die Modulo-2-Addition immer nur das Symbol „0” erzeugen würde.

Die statistischen Eigenschaften der erzeugten Zufallsfolge werden im Wesentlichen durch den **Grad** L und die **Rückführungskoeffizienten** g_l (mit $l = 1, \ldots , L–1$) bestimmt.



Zur Kennzeichnung unterschiedlicher PN-Generatoren verwendet man in der Literatur alternativ:

- die sogenannten **Generatorpolynome** von der Art

  $$G(D) = g_L \cdot D^L + g_{L-1} \cdot D^{L-1} + \ldots + g_1 \cdot D + g_0.$$

  Hierbei ist stets $g_0 = g_L = 1$ zu setzen und D ein formaler Parameter, der eine Verzögerung um einen Takt angibt. D^L kennzeichnet dann eine Verzögerung um L Takte.
- die **Oktaldarstellung** der Binärzahl (g_L ... g_2 g_1 g_0). Wichtig ist, dass hierbei die Rückkopplungskoeffizienten – von rechts mit g_0 beginnend – zu Tripeln zusammengefasst und diese oktal (0 ... 7) geschrieben werden.

Beispiel: Das Generatorpolynom $D^4 + D^3 + 1$ gehört zu einem Schieberegister vom Grad $L = 4$ mit der Oktaldarstellung $(g_4\, g_3\, g_2\, g_1\, g_0) = (11001)_{\rm bin} = (31)_{\rm oct}$.

Folgen maximaler Länge (M-Sequenzen)

Sind nicht alle L Speicherzellen des Schieberegisters mit Nullen vorbelegt, so entsteht stets eine periodische Zufallsfolge $\langle z_\nu \rangle$. Die Periodenlänge P dieser Folge hängt im starken Maße von den Rückkopplungskoeffizienten ab. Für jeden Grad L gibt es zumindest eine Konfiguration mit **maximaler Periodenlänge**

$$P_{max} = 2^L - 1.$$

Eine solche PN-Folge bezeichnet man auch oft als **M-Sequenz**, wobei das „M" für „Maximal" steht. Eine M-Sequenz kann man daran erkennen, dass das Generatorpolynom $G(D)$ primitiv ist. Wie im Buch **Kanalcodierung** noch ausführlich dargelegt werden wird, bezeichnet man ein Polynom $G(D)$ vom Grad L dann als primitiv, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{(D^n + 1)}{G(D)} \neq 0 \quad \text{für} \quad n < P_{max} = 2^L - 1.$$

Beispiel: Ein Schieberegister vom Grad L = 4 mit Oktalkennung (31) und Generatorpolynom $G(D) = D^4 + D^3 + 1$ führt zu einer Folge maximaler Länge: $P_{max} = 2^4 - 1 = 15$. Der mathematische Nachweis hierfür ist aufwändig:

- Man muss anhand obiger Polynomdivision für n = 1, ... , 14 zeigen, dass der Quotient stets ungleich 0 ist. Erst die Division $(D^{15} + 1)/G(D)$ liefert ein Ergebnis ohne Rest.
- Hierbei ist zu berücksichtigen, dass in der Modulo-2-Algebra +1 und –1 identisch sind.

Grad L	Polynom $G(D)$	Polynom $G_R(D)$	Periode P
2	$D^2 + D + 1$	identisch	3
3	$D^3 + D^2 + 1$	$D^3 + D + 1$	7
4	$D^4 + D^3 + 1$	$D^4 + D + 1$	15
5	$D^5 + D^3 + 1$	$D^5 + D^2 + 1$	31
6	$D^6 + D^5 + 1$	$D^6 + D + 1$	63
7	$D^7 + D^4 + 1$	$D^7 + D^3 + 1$	127
9	$D^9 + D^5 + 1$	$D^9 + D^4 + 1$	511
10	$D^{10} + D^7 + 1$	$D^{10} + D^3 + 1$	1.023
15	$D^{15} + D^{14} + 1$	$D^{15} + D + 1$	32.767
23	$D^{23} + D^{18} + 1$	$D^{23} + D^5 + 1$	8.388.607
31	$D^{31} + D^{28} + 1$	$D^{31} + D^3 + 1$	2.147.483.647

In der Tabelle sind einige PN-Generatoren maximaler Länge bis zum Grad L = 31 aufgeführt. Die Auswahl ist auf Konfigurationen mit nur einer Anzapfung – also mit zwei Rückführungen – beschränkt. Das bedeutet, dass die zugehörigen Polynome jeweils aus drei Summanden bestehen. Für Applikationen, die eine hohe Geschwindigkeit erfordern, sind solche Generatoren sehr nützlich.

Reziproke Polynome

Das zum Generatorpolynom $G(D)$ gehörige **reziproke Polynom** lautet:

$$G_{\rm R}(D) = D^L \cdot G(D^{-1}).$$

Zwischen den beiden Schiebregistern mit den Polynomen $G(D)$ bzw. $G_{\rm R}(D)$ bestehen folgende Zusammenhänge:

- Liefert $G(D)$ eine Folge maximaler Länge $\Rightarrow P_{\rm max} = 2^L - 1$, so ist auch die Periodenlänge des reziproken Polynoms $G_{\rm R}(D)$ maximal.
- Die Ausgangsfolgen reziproker Konfigurationen sind zueinander invers: Die Folge von $G(D)$ – von rechts nach links gelesen – ergibt die Folge der reziproken Anordnung $G_{\rm R}(D)$.

In der **Tabelle** auf der vorherigen Seite sind die zu $G(D)$ zugehörigen reziproken Polynome $G_{\rm R}(D)$ bis zum Registergrad $L = 31$ angegeben.

Beispiel: Betrachten wir wieder den Grad $L = 4$. Ausgehend von der Schieberegisterstruktur $(31)_{\rm oct}$ erhält man für das reziproke Polynom

$$G_{\rm R}(D) = D^4 \cdot (1 + D^{-3} + D^{-4}) = D^4 + D^1 + 1$$

und damit die Konfiguration mit der Oktalkennung (23). Die entsprechenden Ausgangsfolgen

- ... 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 ...
- ... 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 ...

haben jeweils die maximale Periodenlänge $P_{\rm max} = 15$ und sind zueinander invers. Das bedeutet, dass die Ausgangsfolge von (31), von rechts nach links gelesen, die Folge der reziproken Anordnung (23) ergibt. Zu erkennen ist allerdings eine zyklische Phasenverschiebung um vier Binärstellen.

Die in diesem Abschnitt behandelte Thematik ist in einem Lernvideo zusammengefasst:
Verdeutlichung der PN-Generatoren am Beispiel $L = 4$ (Dauer 5:08)

Erzeugung mehrstufiger Zufallsgrößen

Viele höhere Programmiersprachen bieten Pseudo-Zufallsgeneratoren an, die reelle, zwischen 0 und 1 gleichverteilte Zufallszahlen x liefern. Beispielsweise lautet der C-Funktionsaufruf:

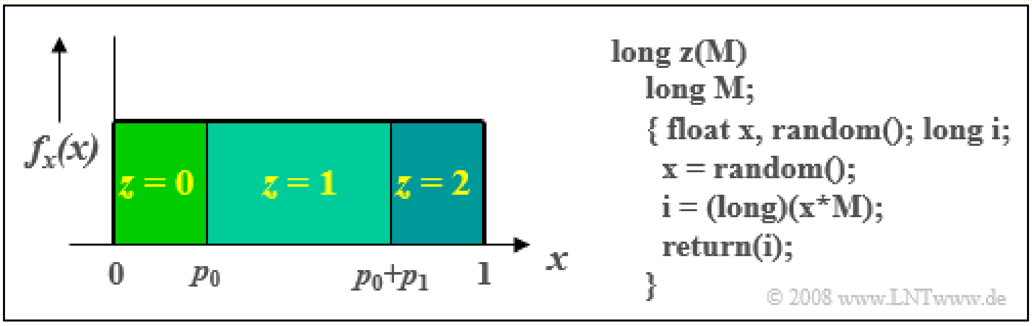
x = random()

Durch sukzessives Aufrufen der Random-Funktion entsteht eine periodisch sich wiederholende Folge reeller Zahlen – vgl. **Kapitel 3.4.** Da die Periodendauer P jedoch sehr groß ist, kann diese Folge als pseudozufällig angesehen werden. Durch Angabe eines Startwertes wird an bestimmten Stellen der Pseudozufallsfolge begonnen.

Bei der Generierung einer diskreten mehrstufigen Zufallsgröße z wird zweckmäßigerweise von einer solchen gleichverteilten Zufallsgröße x ausgegangen.

Beispiel: Das nachfolgende Bild zeigt das Prinzip für den Sonderfall M = 3, wobei die gewünschten Auftrittswahrscheinlichkeiten mit p_0, p_1 und p_2 bezeichnet sind.

Ist der aktuelle Wert x der zwischen 0 und 1 gleichverteilten Zufallsgröße kleiner als p_0, so wird die ternäre Zufallsgröße z = 0 gesetzt. Im Bereich $p_0 \le x < p_0 + p_1$ gilt z = 1, und für $x > p_0 + p_1$ wird die Zufallsgröße zu z = 2.



Im aufgeführten C-Programm ergibt sich für M = 3 und für den aktuellen Zufallswert x = 0.57 für das Produkt $x \cdot M = 0.57 \cdot 3 = 1.71$ und somit die diskrete Zufallsgröße z = 1. Für einen zweiten Zufallswert x = 0.95 würde die Funktion dagegen das Ergebnis z = 2 liefern.

Aus Darstellungsgründen wurde hier eine etwas umständliche Programmierung gewählt. Der oben angegebene C-Programmteil könnte auch sehr viel kompakter geschrieben werden:

{ float random(); return((long) (random()*M)); }