Überblick zu Kapitel 3 des Buches Stochastische Signaltheorie

Wir betrachten im Folgenden **kontinuierliche Zufallsgrößen**, also Zufallsgrößen, die zumindest in gewissen Wertebereichen unendlich viele verschiedene Werte annehmen können. Deren Anwendungen sind in der Informations- und Kommunikationstechnik von vielfältiger Art. Sie werden unter Anderem für die Simulation von Rauschsignalen und zur Beschreibung von Fadingeinflüssen herangezogen.

Wir beschränken uns zunächst auf die statistische Beschreibung der **Amplitudenverteilung**. Innere statistische Bindungen der zugrundeliegenden Prozesse werden erst in den nachfolgenden Kapiteln 4 und 5 betrachtet. Im Einzelnen werden behandelt:

- der Zusammenhang zwischen *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion* und *Verteilungsfunktion*,
- die Berechnung der *Erwartungswerte* und *Momente*,
- einige *Sonderfälle* wie Gleich-, Gauß-, Rice-, Rayleigh-, Cauchy-, Exponential-Verteilung,
- die *Generierung* kontinuierlicher Zufallsgrößen an einem Rechner.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 33 Bildschirmseiten verdeutlicht. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel noch 48 Grafiken sowie 12 Aufgaben und neun Zusatzaufgaben mit insgesamt 119 Teilaufgaben sowie zwei Interaktionsmodule (IM) und vier Lernvideos (LV):

- **Wahrscheinlichkeit & Dichtefunktion** (LV zu Kap. 3.1 – 2-tlg: Dauer 5:30 – 6:35)
- **Zusammenhang WDF – VTF** (LV zu Kap. 3.2 – 2–teilig: Dauer 6:40 – 3:20)
- **Momente von diskreten Zufallsgrößen** (LV zu Kap. 3.3 – Dauer 6:32)
- **WDF, VTF und Momente spezieller Verteilungen** (IM zu Kap. 3.4 ... 3.7)
- **Prinzip der Additionsmethode** (LV zu Kap. 3.5 – Dauer 3:45)
- **Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen** (IM zu Kap. 3.5)
- **Erzeugung einer Exponentialverteilung** (LV zu Kap. 3.6 – Dauer 2:00)

Literaturhinweise: **[Böh93] – [BFS87] – [Chu78] – [Dav70] – [Hän97] – [Hau03] – [Knu73] – [Knu81] – [Mül79] – [Mül91] – [PP02] – [Söd88] – [Söd93] – [Win77]**

Weitere Informationen zum Thema sowie Aufgaben, Simulationen und Programmierübungen finden Sie in der Anleitung zum Praktikum *Simulationsmethoden in der Nachrichtentechnik* von Prof. Günter Söder. Diese frühere LNT-Lehrveranstaltung (bis Sommersemester 2012) basiert auf den 24 DOS-Programmen des Lehrsoftwarepakets *LNTsim*.

- Kapitel 4: *Kontinuierliche Zufallsgrößen*, Programm *kon*
- Kapitel 13: *Fehlerwahrscheinlichkeit*, Programm *fwk*

Hinweise zum Herunterladen des Programmpakets *LNTsim* und der Versuchsanleitungen:

Lehrsoftwarepaket LNTsim (Zip–Version, mehr als 50 MB)

Praktikumsanleitung – Teil A (PDF–Version, ca. 8.5 MB, mit Kapitel 4)
Praktikumsanleitung – Teil B (PDF–Version, ca. 9.5 MB, mit Kapitel 13)

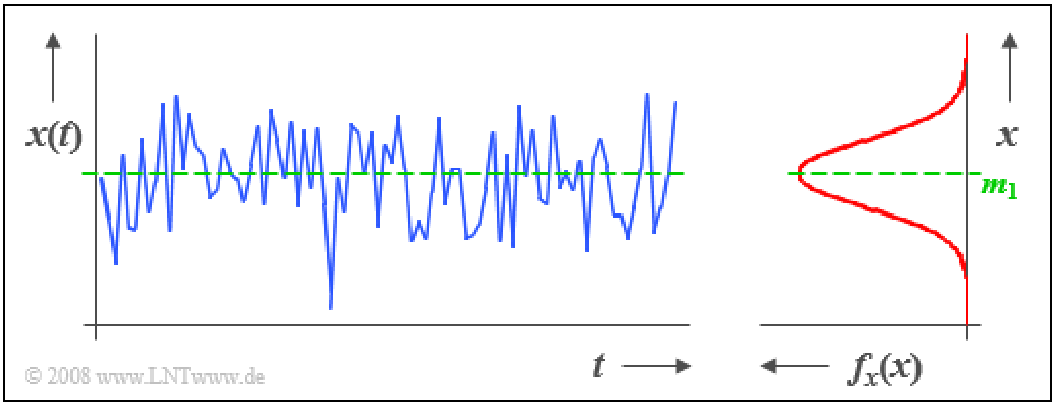
Eigenschaften kontinuierlicher Zufallsgrößen

Im zweiten Kapitel wurde gezeigt, dass die Amplitudenverteilung einer diskreten Zufallsgröße vollständig durch ihre M Auftrittswahrscheinlichkeiten bestimmt ist, wobei die Stufenzahl M meist einen endlichen Wert besitzt.

In diesem Kapitel betrachten wir **kontinuierliche Zufallsgrößen**. Darunter versteht man Zufallsgrößen, deren mögliche Zahlenwerte nicht abzählbar sind ⇒ „*wertkontinuierlich*". Über eine eventuelle Zeitdiskretisierung wird hier keine Aussage getroffen, das heißt, kontinuierliche Zufallsgrößen können durchaus zeitdiskret sein. Weiter setzen wir für dieses dritte Kapitel voraus, dass zwischen den einzelnen Abtastwerten x_ν keine statistischen Bindungen bestehen, oder lassen diese zumindest außer Betracht.

Im Weiteren kennzeichnen wir kontinuierliche Zufallsgrößen (meist) mit x im Gegensatz zu den diskreten Zufallsgrößen, die wie im Kapitel 2 weiterhin mit z bezeichnet werden.

Beispiel: Das nachfolgende Bild zeigt einen Ausschnitt eines stochastischen Rauschsignals $x(t)$, dessen Momentanwert als eine kontinuierliche Zufallsgröße x aufgefasst werden kann.



Aus der rechts dargestellten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) erkennt man, dass bei diesem Beispielsignal Momentanwerte um den Mittelwert m_1 am häufigsten auftreten. Da zwischen den Abtastwerten x_ν keine statistischen Bindungen bestehen, spricht man bei einem solchen Signal auch von „*Weißem Rauschen*".

Definition der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Bei einer kontinuierlichen Zufallsgröße sind die Wahrscheinlichkeiten, dass diese ganz bestimmte Werte annimmt, identisch 0. Deshalb muss zur Beschreibung einer kontinuierlichen Zufallsgröße stets auf die *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion* – abgekürzt WDF – übergegangen werden.

Definition: Der Wert der **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** $f_x(x)$ an der Stelle x_μ ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der Momentanwert der Zufallsgröße x in einem (unendlich kleinen) Intervall der Breite Δx um x_μ liegt, dividiert durch Δx:

$$f_x(x = x_\mu) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr\{x_\mu - \Delta x/2 \le x \le x_\mu + \Delta x/2\}}{\Delta x}.$$

Diese äußerst wichtige Beschreibungsgröße weist folgende Eigenschaften auf:

- Obwohl aus dem **beispielhaften Zeitverlauf** auf der letzten Seite zu ersehen ist, dass die häufigsten Signalanteile bei $x = m_1$ liegen und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion hier ihren größten Wert besitzt, ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr(x = m_1)$, dass der Momentanwert exakt gleich dem Mittelwert m_1 ist, identisch 0.

- Für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße im Bereich zwischen x_u und x_o liegt, gilt:

$$\Pr(x_\mathrm{u} \le x \le x_\mathrm{o}) = \int_{x_\mathrm{u}}^{x_\mathrm{o}} f_x(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Als wichtige Normierungseigenschaft ergibt sich daraus für die Fläche unter der WDF mit den Grenzübergängen $x_\mathrm{u} \to -\infty$ und $x_\mathrm{o} \to +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

- Die entsprechende Gleichung für wertdiskrete, M-stufige Zufallsgrößen sagt aus, dass die Summe über die M Auftrittswahrscheinlichkeiten den Wert 1 ergibt.

Zur Vertiefung der hier behandelten Thematik empfehlen wir das folgende Lernvideo:
Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (2-teilig: Dauer 5:30 – 6:35)

Hinweis zur Nomenklatur: In der Fachliteratur wird meist zwischen der Zufallsgröße X und deren Realisierungen $x \in X$ unterschieden. Samit lautet die obige Definitionsgleichung

$$f_X(X = x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr\{x - \Delta x/2 \le X \le x + \Delta x/2\}}{\Delta x}.$$

Wir haben in unserem Lerntutorial auf diese genauere Nomenklatur weitgehend verzichtet, um nicht für eine Größe zwei Buchstaben zu verbrauchen. Kleinbuchstaben (wie x) bezeichnen bei uns oft Signale und Großbuchstaben (wie X) die zugehörigen Spektren. Trotzdem müssen wir heute (2015) ehrlicher Weise zugeben, dass die Entscheidung von 2001 nicht ganz glücklich war.

WDF-Definition für diskrete Zufallsgrößen

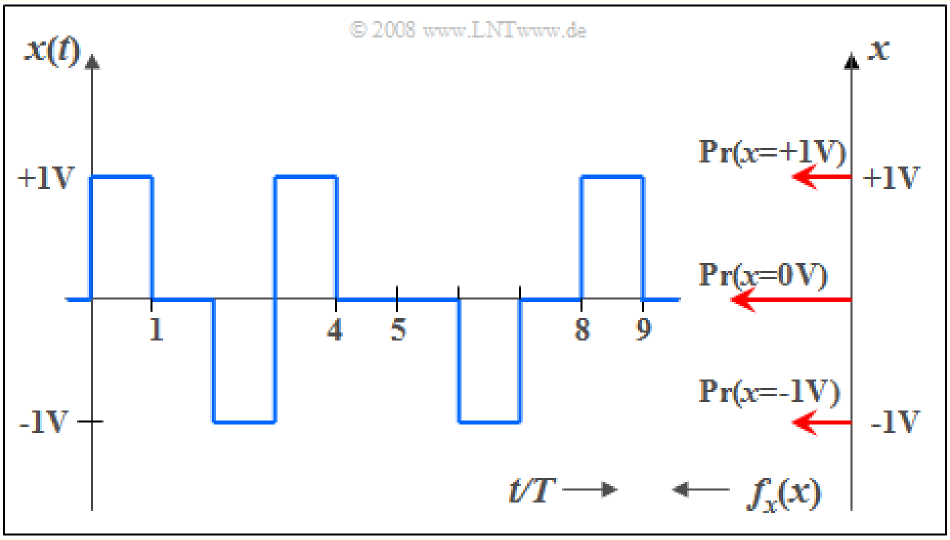
Aus Gründen einer einheitlichen Darstellung aller Zufallsgrößen (sowohl wertdiskret als auch wertkontinuierlich) ist es zweckmäßig, die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auch für diskrete Zufallsgrößen zu definieren. Wendet man die Definitionsgleichung der letzten Seite auf diskrete Zufallsgrößen an, so nimmt die WDF an einigen Stellen x_μ aufgrund des nicht verschwindend kleinen Wahrscheinlichkeitswertes und des Grenzübergangs $\Delta x \to 0$ unendlich große Werte an. Somit ergibt sich für die WDF eine Summe von **Diracfunktionen** (bzw. *Distributionen*):

$$f_x(x) = \sum_{\mu=1}^{M} p_\mu \cdot \delta(x - x_\mu).$$

Die Gewichte dieser Diracfunktionen sind gleich den Wahrscheinlichkeiten $p_\mu = \Pr(x = x_\mu)$. Hier noch ein Hinweis, um die unterschiedlichen Beschreibungsgrößen für diskrete und kontinuierliche Zufallsgrößen einordnen zu können: Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion stehen in ähnlichem Verhältnis zueinander wie im Buch „Signaldarstellung"

- ein diskreter Spektralanteil einer harmonischen Schwingung $\Rightarrow$ Linienspektrum,
- ein kontinuierliches Spektrum eines energiebegrenzten (impulsförmigen) Signals.

Beispiel: Nachfolgend sehen Sie einen Ausschnitt eines Rechtecksignals mit drei möglichen Werten, wobei der Signalwert 0 V doppelt so häufig wie die äußeren Signalwerte (±1 V) auftritt.



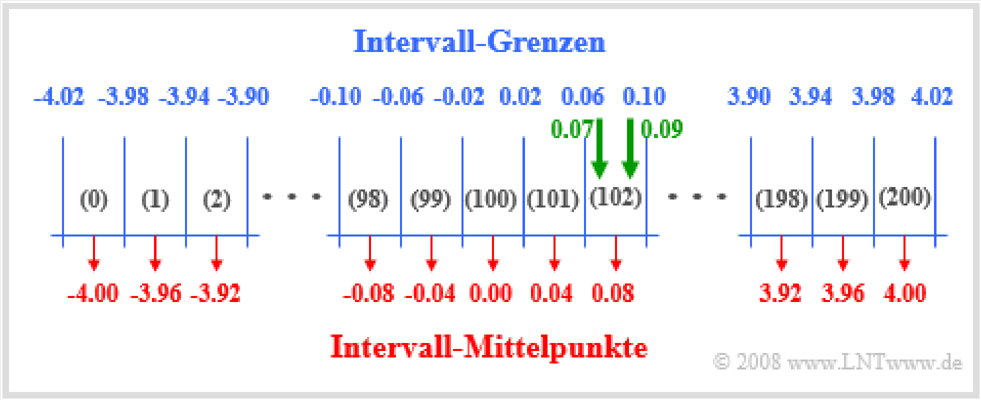
Somit lautet die dazugehörige WDF (Anteile von oben nach unten):

$$f_x(x) = 0.25 \cdot \delta(x - 1\text{V}) + 0.5 \cdot \delta(x) + 0.25 \cdot \delta(x + 1\text{V}).$$

Zur Vertiefung der hier behandelten Thematik empfehlen wir das folgende Lernvideo:
Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (2-teilig: Dauer 5:30 – 6:35)

Numerische Ermittlung der WDF

Sie sehen hier ein Schema zur numerischen Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.



Setzt man voraus, dass die vorliegende Zufallsgröße x außerhalb des Bereichs von $x_{\text{min}} = –4.02$ bis $x_{\text{max}} = +4.02$ nur vernachlässigbar kleine Anteile besitzt, so geht man folgendermaßen vor:

- Man teilt diesen Wertebereich von x in I Intervalle gleicher Breite Δx ein und definiert ein Feld WDF[0 : I–1]. In obiger Skizze ist $I = 201$ und dementsprechend $\Delta x = 0.04$ gewählt.
- Die Zufallsgröße x wird nun N mal nacheinander aufgerufen und dabei jeweils geprüft, zu welchem Intervall i_{akt} die aktuelle Zufallsgröße x_{akt} gehört: $i_{\text{akt}} = (\text{int})((x + x_{\text{max}})/\Delta x)$.
- Das entsprechende Feldelement WDF(i_{akt}) wird dann um 1 erhöht. Nach N Durchläufen beinhaltet dann WDF(i_{akt}) die Anzahl der Zufallszahlen, die zum Intervall i_{akt} gehören.
- Die tatsächlichen WDF-Werte erhält man, wenn am Ende noch alle Feldelemente WDF(i) mit $0 \le i \le I–1$ durch $N \cdot \Delta x$ dividiert werden.

Beispiel: Aus den eingezeichneten Pfeilen in obiger Grafik erkennt man:

- Der Wert $x_{\text{akt}} = 0.07$ führt zum Ergebnis $i_{\text{akt}} = (\text{int})\ ((0.07 + 4.02)/0.04) = (\text{int})\ 102.25$. Hierbei bedeutet (int) eine Integerwandlung nach der Float-Division $\Rightarrow$ $i_{\text{akt}} = 102$.
- Das gleiche Intervall $i_{\text{akt}} = 102$ ergibt sich für $0.06 < x_{\text{akt}} < 0.10$, z.B. auch für $x_{\text{akt}} = 0.09$.

VTF bei kontinuierlichen Zufallsgrößen (1)

Zur Beschreibung von Zufallsgrößen wird neben der **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** auch häufig die Verteilungsfunktion (VTF) herangezogen, die wie folgt definiert ist:

Definition: Die **Verteilungsfunktion** $F_x(r)$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße x kleiner oder gleich einem reellen Zahlenwert r ist:

$$F_x(r) = \mathrm{Pr}(x \le r).$$

Bei einer kontinuierlichen Zufallsgröße sind bezüglich der VTF folgende Aussagen möglich:

- Die Verteilungsfunktion ist aus der WDF $f_x(x)$ durch Integration berechenbar. Es gilt:

$$F_x(r) = \int_{-\infty}^{r} f_x(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Da die WDF nie negativ ist, steigt $F_x(r)$ zumindest schwach monoton an, und liegt stets zwischen den beiden Grenzwerten $F_x(r \to -\infty) = 0$ und $F_x(r \to +\infty) = 1$.
- Umgekehrt lässt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus der Verteilungsfunktion durch Differentiation bestimmen:

$$f_x(x) = \frac{\mathrm{d}F_x(r)}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=x}.$$

  Der Zusatz „$r = x$” macht deutlich, dass bei unserer Nomenklatur das Argument der WDF die Zufallsgröße selbst ist, während das VTF–Argument eine beliebige reelle Variable r ist.

Hinweise zur Nomenklatur: Hätten wir wie bei WDF und VTF zwischen Zufallsgröße X und Realisierungen $x \in X$ unterschieden $\Rightarrow$ $f_X(x)$, $F_X(x)$, so ergäbe sich folgende Nomenklatur:

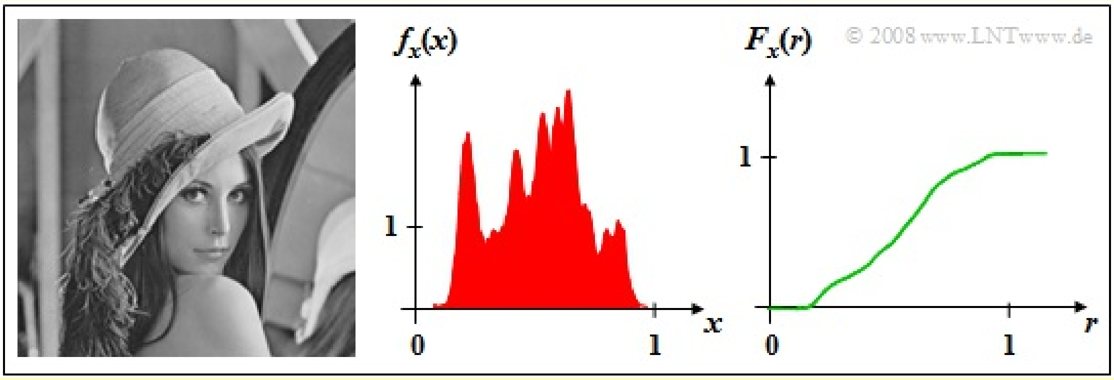
$$F_X(x) = \mathrm{Pr}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Leider haben wir uns zu Beginn unseres LNTwww–Projektes (2001) für die obige Nomenklatur entschieden, was nun (2015) nicht mehr zu ändern ist, auch im Hinblick der realisierten Lernvideos. Wir bleiben also bei „$f_x(x)$” anstelle von „$f_X(x)$” sowie „$F_x(r)$” anstelle von „$F_X(x)$”.

VTF bei kontinuierlichen Zufallsgrößen (2)

Beispiel: Das linke Bild zeigt das Foto *Lena*, das häufig als Testvorlage für Bildcodierverfahren dient. Wird dieses Bild in 256 × 256 Bildpunkte (Pixel) unterteilt, und ermittelt man für jedes einzelne Pixel die Helligkeit, so erhält man eine Folge $\langle x_\nu \rangle$ von Grauwerten, deren Länge $N = 256^2 = 65536$ beträgt.

Der Grauwert x ist dabei eine wertkontinuierliche Zufallsgröße, wobei die Zuordnung zu Zahlenwerten willkürlich erfolgt. Beispielsweise sei „Schwarz" durch den Wert $x = 0$ und „Weiß" durch $x = 1$ charakterisiert. Der Zahlenwert $x = 0.5$ kennzeichnet dann eine mittlere Graufärbung.



Im mittleren Bild ist die WDF $f_x(x)$ dargestellt, die in der Literatur auch oft als *Grauwertstatistik* bezeichnet wird. Es ist ersichtlich, dass im Originalbild einige Grauwerte bevorzugt sind und die beiden Extremwerte $x = 0$ („tiefes Schwarz") bzw. $x = 1$ („reines Weiß") nur sehr selten auftreten. Die Verteilungsfunktion $F_x(\text{r})$ dieser kontinuierlichen Zufallsgröße ist stetig und steigt, wie das rechte Bild zeigt, von 0 auf 1 monoton und stetig an.

Anmerkung: Genau genommen ist bei einem am Computer darstellbaren Bild – im Gegensatz zu einem echten Foto – der Grauwert stets eine diskrete Zufallsgröße. Bei großer Auflösung der Farbinformation („Farbtiefe") kann man diese Zufallsgröße allerdings näherungsweise als kontinuierlich betrachten.

Die in diesem Abschnitt behandelte Thematik ist in einem Lernvideo zusammengefasst:
Zusammenhang zwischen WDF und VTF (2-teilig: Dauer 6:40 – 3:20)

VTF bei diskreten Zufallsgrößen (1)

Für die Berechnung der **Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsgröße** x aus deren WDF muss stets von einer etwas allgemeineren Gleichung ausgegangen werden. Hier gilt mit $\varepsilon > 0$:

$$F_x(r) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{r+\varepsilon} f_x(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Berechnung der Verteilungsfunktion durch Grenzwertbildung ist aufgrund des „≤"-Zeichens in der **Definition** erforderlich. Berücksichtigt man weiterhin, dass bei einer diskreten Zufallsgröße die WDF aus einer Summe von gewichteten **Diracfunktionen** besteht, so erhält man:

$$F_x(r) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{r+\varepsilon} \sum_{\mu=1}^{M} p_\mu \cdot \delta(x - x_\mu)\,\mathrm{d}x.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung Integration und Summation, und berücksichtigt man zudem, dass die Integration über die Diracfunktion die Sprungfunktion ergibt, so erhält man:

$$F_x(r) = \sum_{\mu=1}^{M} p_\mu \cdot \gamma_0(r - x_\mu), \quad \text{mit} \quad \gamma_0(\mathrm{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\mathrm{x}+\varepsilon} \delta(\mathrm{u})\,\mathrm{d}u = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{array} \right.$$

Hierzu ist zu bemerken:

- $\gamma_0(x)$ unterscheidet sich von der in der Systemtheorie üblichen Sprungfunktion $\gamma(x)$ dadurch, dass an der Sprungstelle $x = 0$ der rechtsseitige Grenzwert Eins gültig ist (anstelle des Mittelwertes 1/2 zwischen links- und rechtsseitigem Grenzwert).
- Mit obiger VTF-Definition gilt dann für die Wahrscheinlichkeit von kontinuierlichen und diskreten Zufallsgrößen gleichermaßen, und natürlich auch für *gemischte Zufallsgrößen* mit diskreten und kontinuierlichen Anteilen:

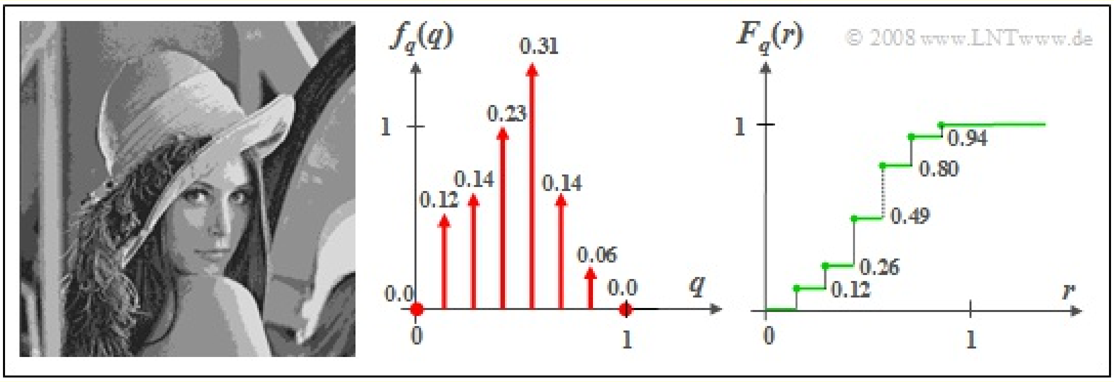
  $$\Pr(x_\mathrm{u} < x \leq x_\mathrm{o}) = F_x(x_\mathrm{o}) - F_x(x_\mathrm{u}).$$

- Bei rein kontinuierlichen Zufallsgrößen können in dieser Gleichung das „Kleiner"–Zeichen und das „Kleiner / Gleich"–Zeichen gegenseitig ersetzt werden.

  $$\Pr(x_\mathrm{u} < x \leq x_\mathrm{o}) = \Pr(x_\mathrm{u} \leq x \leq x_\mathrm{o}) = \Pr(x_\mathrm{u} \leq x < x_\mathrm{o}) = \Pr(x_\mathrm{u} < x < x_\mathrm{o}).$$

VTF bei diskreten Zufallsgrößen (2)

Beispiel: Wird nun der Grauwert des **Lena–Fotos** mit acht Stufen quantisiert, so dass jedes einzelne Pixel durch drei Bit dargestellt und digital übertragen werden kann, so ergibt sich die diskrete Zufallsgröße q. Durch die Quantisierung geht allerdings ein Teil der Bildinformation verloren, was sich im quantisierten Bild durch deutlich erkennbare „Konturen" auswirkt.



Die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_q(q)$ setzt sich aus M = 8 Diracfunktionen zusammen, wobei bei der hier gewählten Quantisierung den möglichen Graustufen die Werte $q_\mu = (\mu - 1)/7$ mit $\mu = 1, 2, \ldots, 8$ zugeordnet sind. Die Gewichte der Diracfunktionen kann man aus der WDF $f_x(x)$ des Originalbildes berechnen. Man erhält

$$p_\mu = \Pr(q = q_\mu) = \Pr(\frac{2\mu - 3}{14} < x \le \frac{2\mu - 1}{14}) = \int_{(2\mu-3)/14}^{(2\mu-1)/14} f_x(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei für die undefinierten Randbereiche ($x < 0$ bzw. $x > 1$) jeweils $f_x(x) = 0$ zu setzen ist.

Da im Originalbild die Graustufen $x \approx 0$ („sehr tiefes Schwarz") bzw. $x \approx 1$ („nahezu reines Weiß") weitgehend fehlen, sind die Wahrscheinlichkeiten $p_1 \approx p_8 \approx 0$, und in der WDF sind tatsächlich nur sechs Diracfunktionen sichtbar. Die beiden fehlenden Diracfunktionen bei 0 und 1 sind in der mittleren Grafik durch Punkte markiert.

Die rechts skizzierte Verteilungsfunktion $F_q(r)$ weist entsprechend dem oben Gesagten sechs Unstetigkeitsstellen auf, bei denen jeweils der rechtsseitige Grenzwert gültig ist.

Die in diesem Abschnitt behandelte Thematik ist im folgenden Lernvideo zusammengefasst:
Zusammenhang zwischen WDF und VTF (2-teilig: Dauer 6:40 – 3:20)

Berechnung als Scharmittelwert

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) bietet ebenso wie die Verteilungsfunktion (VTF) sehr weitreichende Informationen über die betrachtete Zufallsgröße. Weniger Informationen liefern die so genannten *Erwartungswerte* und *Momente*.

Für diskrete Zufallsgrößen wurden deren Berechnungsmöglichkeiten bereits in **Kapitel 2.2** angegeben. Nun werden diese integrativen Beschreibungsgrößen *Erwartungswert* bzw. *Moment* allgemeiner und im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion betrachtet.

Definition: Der **Erwartungswert** bezüglich einer beliebigen Gewichtungsfunktion $g(x)$ kann mit der WDF $f_x(x)$ in folgender Weise berechnet werden:

$$\mathrm{E}[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_x(x)\,\mathrm{d}x.$$

Setzt man in diese Gleichung für $g(x) = x^k$ ein, so erhält man das **Moment *k*-ter Ordnung**:

$$m_k = \mathrm{E}[x^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_x(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aus dieser Gleichung folgt

- mit $k = 1$ für den *linearen Mittelwert*:

$$m_1 = \mathrm{E}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x)\,\mathrm{d}x,$$

- mit $k = 2$ für den *quadratischen Mittelwert*:

$$m_2 = \mathrm{E}[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_x(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bei einer diskreten, M-stufigen Zufallsgröße erhält man auch mit den hier angegebenen Formeln wieder die bereits in Kapitel 2.2 angegebenen Gleichungen (Berechnung als Scharmittelwert):

$$m_1 = \sum_{\mu=1}^{M} p_\mu \cdot x_\mu, \qquad m_2 = \sum_{\mu=1}^{M} p_\mu \cdot x_\mu^2.$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass das Integral über die Diracfunktion $\delta(x)$ gleich 1 ist.

In Zusammenhang mit Signalen sind auch folgende Bezeichnungen üblich:

- m_1 gibt den **Gleichanteil** an,
- m_2 entspricht der (auf den Einheitswiderstand 1 Ω bezogenen) **Signalleistung**.

Bezeichnet x beispielsweise eine Spannung, so hat m_1 die Einheit „V” und m_2 die Einheit „V^2”. Will man die Leistung in „Watt”, so muss m_2 noch durch den Widerstandswert dividiert werden.

Zentralmomente

Eine besonders große Bedeutung haben in der Statistik die **Zentralmomente**, die im Gegensatz zu den herkömmlichen Momenten jeweils auf den Mittelwert m_1 bezogen sind:

$$\mu_k = \mathrm{E}[(x-m_1)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_1)^k \cdot f_x(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die nichtzentrierten Momente m_k kann man direkt in die zentrierten Momente μ_k umrechnen.

$$\mu_k = \sum_{\kappa=0}^{k} \binom{k}{\kappa} \cdot m_\kappa \cdot (-m_1)^{k-\kappa},$$

Nach den allgemein gültigen Gleichungen der letzten Seite ergeben sich die formalen Größen $m_0 = 1$ und $\mu_0 = 1$. Für das Zentralmoment erster Ordnung gilt nach obiger Definition stets $\mu_1 = 0$.

In der Gegenrichtung gelten folgende Gleichungen für $k = 1$, $k = 2$, usw.:

$$m_k = \sum_{\kappa=0}^{k} \binom{k}{\kappa} \cdot \mu_\kappa \cdot {m_1}^{k-\kappa}.$$

Beispiel: Bei einer binären Zufallsgröße mit den Wahrscheinlichkeiten

- $\Pr(0) = 1 - p$, und
- $\Pr(1) = p$

haben alle Momente den genau gleichen Wert p:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \ldots = p.$$

Mit den obigen Gleichungen erhält man dann für die ersten drei Zentralmomente:

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= m_2 - m_1^2 = p - p^2, \\
\mu_3 &= m_3 - 3\cdot m_2 \cdot m_1 + 2 \cdot m_1^3 = p - 3\cdot p^2 + 2\cdot p^3, \\
\mu_4 &= m_4 - 4\cdot m_3 \cdot m_1 + 6\cdot m_2\cdot m_1^2 - 3\cdot m_1^4 = p - 4\cdot p^2 + 6\cdot p^3 - 3\cdot p^4.
\end{aligned}$$

Einige häufig auftretende Zentralmomente

Aus der Definition auf der letzten Seite können folgende Kenngrößen abgeleitet werden:

- Die **Varianz** σ^2 der betrachteten Zufallsgröße ist das Zentralmoment zweiter Ordnung (μ_2). Diese entspricht physikalisch der Wechselleistung und die Streuung σ gibt den Effektivwert an. Aus dem linearen und dem quadratischen Mittelwert ist die Varianz nach dem in folgender Weise berechenbar ⇒ **Satz von Steiner**:

  $$\sigma^2 = m_2 - m_1^2.$$

- Die sog. **Charliersche Schiefe** S bezeichnet das auf σ^3 bezogene dritte Zentralmoment. Bei symmetrischer Dichtefunktion ist diese Kenngröße immer 0. Je größer $S = \mu_3/\sigma^3$ ist, um so unsymmetrischer verläuft die WDF um den Mittelwert m_1. Beispielsweise ergibt sich für die **Exponentialverteilung** (unabhängig vom Verteilungsparameter λ) die Schiefe $S = 2$.

- Auch das Zentralmoment vierter Ordnung spielt für die Analyse statistischer Größen eine Rolle. Als **Kurtosis** bezeichnet man den Quotienten $K = \mu_4/\sigma^4$. Bei einer **gaußverteilten Zufallsgröße** ergibt sich hierfür immer der Wert $K = 3$. Anhand dieser Kenngröße kann man beispielsweise überprüfen, ob eine vorliegende Zufallsgröße tatsächlich gaußisch ist.

- Weist die WDF weniger Ausläufer auf als die Gaußverteilung, so ist die Kurtosis $K < 3$, zum Beispiel gilt für die Gleichverteilung $K = 1.8$. Dagegen weist $K > 3$ darauf hin, dass die Ausläufer ausgeprägter als bei der Gaußverteilung sind. Für die **Laplaceverteilung** ⇒ zweiseitige Exponentialverteilung ergibt sich beispielsweise der Wert $K = 6$.

Berechnung als Zeitmittelwert

Die Erwartungswertberechnung nach den bisherigen Gleichungen dieses Abschnitts entspricht einer *Scharmittelung*, das heißt einer Mittelung über alle möglichen Werte x_μ.

Die Momente m_k können aber auch als **Zeitmittelwerte** bestimmt werden, wenn der die Zufallsgröße erzeugende stochastische Prozess stationär und ergodisch ist. Die genaue Definition für einen solchen Zufallsprozess finden Sie in **Kapitel 4.4.** Eine Zeitmittelung wird im Folgenden stets durch eine überstreichende Linie gekennzeichnet.

Bei zeitdiskreter Betrachtung wird das Zufallssignal $x(t)$ durch die Zufallsfolge $\langle x_\nu \rangle$ ersetzt. Bei endlicher Folgenlänge lauten diese Zeitmittelwerte mit $\nu = 1, 2, \dots , N$:

$$m_k = \overline{x_\nu^k} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu^k,$$

$$m_1 = \overline{x_\nu} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu,$$

$$m_2 = \overline{x_\nu^2} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu^2.$$

Sollen die Momente (oder Erwartungswerte) per Simulation bestimmt werden, so geschieht dies in der Praxis meist durch eine Zeitmittelung. Die Momentenberechnung als Zeitmittelwerte unterscheidet sich bei diskreten bzw. kontinuierlichen Zufallsgrößen nur mariginal.

Die in diesem Abschnitt behandelte Thematik ist in einem Lernvideo zusammengefasst:
Momente von diskreten Zufallsgrößen (Dauer: 6:30)

Charakteristische Funktion

Ein weiterer Sonderfall eines Erwartungswertes ist die **charakteristische Funktion**, wobei hier für die Bewertungsfunktion $g(x) = \exp(\mathrm{j}\Omega x)$ zu setzen ist:

$$C_x(\Omega) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega\,x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega\,x} \cdot f_x(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ein Vergleich mit dem Buch **Signaldarstellung – Kapitel 3.1** zeigt, dass die charakteristische Funktion die Fourierrücktransformierte der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion darstellt:

$$C_x(\Omega) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad f_x(x).$$

Ist die Zufallsgröße x dimensionslos, so ist auch das Argument Ω der charakteristischen Funktion ohne Einheit. Das Symbol Ω wurde gewählt, da das Argument hier einen gewissen Bezug zur *Kreisfrequenz* beim zweiten Fourierintegral aufweist (gegenüber der Darstellung im f-Bereich fehlt der Faktor 2π im Exponenten). Es wird aber nochmals eindringlich darauf hingewiesen, dass – wenn man einen Bezug zur Systemtheorie herstellen will – $C_x(\Omega)$ der „Zeitfunktion" und $f_x(x)$ der „Spektralfunktion" entspricht.

Entwickelt man die komplexe Funktion $\exp(\mathrm{j}\Omega x)$ in eine Potenzreihe und vertauscht Summation und Erwartungswertbildung, so folgt die **Reihendarstellung** der charakteristischen Funktion:

$$C_x(\Omega) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{k!} \cdot (\mathrm{j}\,\Omega)^k.$$

Die **Aufgabe A3.4** zeigt weitere Eigenschaften der charakteristischen Funktion auf.

Beispiele: Bei einer symmetrischen binären (zweipunktverteilten) Zufallsgröße $x \in \{-1, +1\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $\Pr(-1) = \Pr(+1) = 1/2$ verläuft die charakteristische Funktion cosinusförmig. Das Analogon in der Systemtheorie ist, dass das Spektrum eines Cosinussignals mit der Kreisfrequenz Ω_0 aus zwei Diracfunktionen bei $\pm\Omega_0$ besteht.

Eine Gleichverteilung zwischen $\pm y_0$ besitzt nach den Gesetzen der Fouriertransformation – Näheres im Buch *Signaldarstellung*, **Kapitel 3.1** – die folgende charakteristische Funktion:

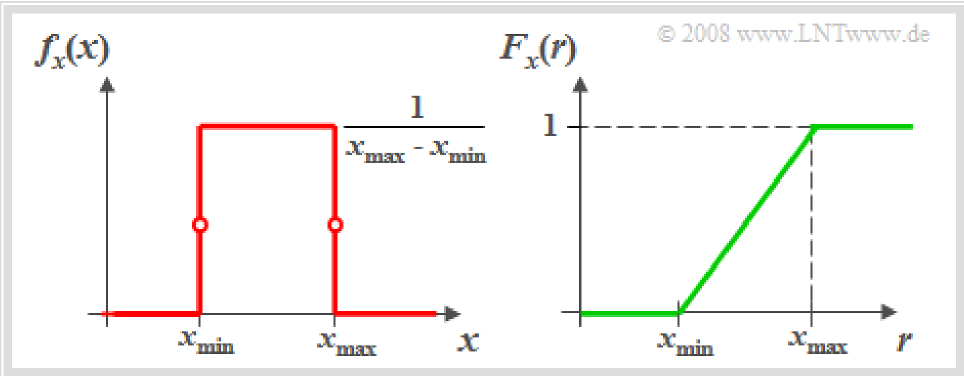
$$C_y(\Omega) = \frac{1}{2y_0} \cdot \int_{-y_0}^{+y_0} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega\,y}\,\mathrm{d}y \quad = \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,y_0\,\Omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,y_0\,\Omega}}{2\mathrm{j}\cdot y_0 \cdot \Omega} = \frac{\sin(y_0 \cdot \Omega)}{y_0 \cdot \Omega} = \mathrm{si}(y_0 \cdot \Omega).$$

Die Funktion $\mathrm{si}(x) = \sin(x)/x$ kennen wir bereits aus dem Buch „Signaldarstellung". Sie ist auch unter dem Namen *Spaltfunktion* bekannt.

Allgemeine Beschreibung und Definition

Definition: Eine Zufallsgröße x bezeichnet man als **gleichverteilt**, wenn sie nur Werte im Bereich von x_{min} bis x_{max} annehmen kann, und zwar mit gleicher Wahrscheinlichkeit.

Die Grafik zeigt links die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (abgekürzt WDF) und rechts die Verteilungsfunktion (kurz VTF) einer gleichverteilten Zufallsgröße x.



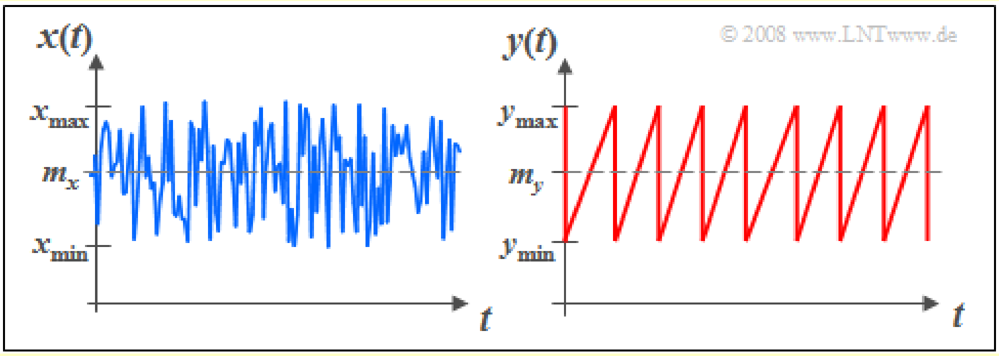
Daraus können folgende Eigenschaften abgeleitet werden:

- Die WDF $f_x(x)$ besitzt im Bereich von x_{min} bis x_{max} den konstanten Wert $1/(x_{\text{max}} - x_{\text{min}})$, wobei an den beiden Bereichsgrenzen für $f_x(x)$ jeweils nur der halbe Wert – also der Mittelwert zwischen links- und rechtsseitigem Grenzwert – zu setzen ist.
- Die Verteilungsfunktion $F_x(r)$ steigt im Bereich von x_{min} bis x_{max} linear von 0 auf 1 an.
- Mittelwert und Streuung haben bei der Gleichverteilung die folgenden Werte:

$$m_1 = \frac{x_{\text{max}} + x_{\text{min}}}{2}, \qquad \sigma = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{2\sqrt{3}}.$$

- Bei symmetrischer WDF ($x_{\text{min}} = -x_{\text{max}}$) erhält man als Sonderfall $m_1 = 0$ und $\sigma^2 = x_{\text{max}}^2/3$.

Beispiel: Hier sehen Sie zwei Signalverläufe mit gleichförmiger Amplitudenverteilung.



- Links ist statistische Unabhängigkeit der einzelnen Abtastwerte vorausgesetzt, das heißt, x_ν kann alle Werte zwischen x_{min} und x_{max} mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen, und zwar unabhängig von der Vergangenheit ($x_{\nu-1}$, $x_{\nu-2}$, ...).
- Beim rechten Signal $y(t)$ ist diese Unabhängigkeit aufeinanderfolgender Signalwerte nicht mehr gegeben. Vielmehr stellt dieses Sägezahnsignal ein deterministisches Signal dar.

Bedeutung der Gleichverteilung für die Nachrichtentechnik

Die Bedeutung gleichverteilter Zufallsgrößen für die Informations- und Kommunikationstechnik ist darauf zurückzuführen, dass diese WDF–Form aus Sicht der **Informationstheorie** unter der Nebenbedingung „Spitzenwertbegrenzung" ein Optimum darstellt. Mit keiner anderen Verteilung als der Gleichverteilung erreicht man unter dieser Voraussetzung eine größere **differentielle Entropie.** Mit dieser Thematik beschäftigt sich das **Kapitel 4.1** im Buch „Einführung in die Informationstheorie".

Daneben sind unter Anderem noch folgende Punkte zu nennen:

- Die Bedeutung der Gleichverteiltung für die Simulation nachrichtentechnischer Systeme ist darauf zurückzuführen, dass man entsprechende *Pseudo–Zufallsgeneratoren* relativ einfach realisieren kann, und dass sich daraus andere Verteilungen (zum Beispiel die Gauß–, die Laplace– und die Exponentialverteilung) leicht ableiten lassen (vgl. Kapitel 3.5 bis 3.7).
- In *Bildverarbeitung* & *Bildcodierung* wird häufig vereinfachend mit der Gleichverteilung anstelle der tatsächlichen, meist sehr viel komplizierteren Verteilung des Originalbildes gerechnet, da der Unterschied des Informationsgehaltes zwischen einem *natürlichen Bild* und dem auf der Gleichverteilung basierenden Modell relativ gering ist.
- Für die Modellierung übertragungstechnischer Systeme sind gleichverteilte Zufallsgrößen dagegen die Ausnahme. Ein Beispiel für eine tatsächlich (nahezu) gleichverteilte Zufallsgröße ist die Phase bei kreissymmetrischen Störungen, wie sie beispielsweise bei *Quadraturmodulationsverfahren* auftreten.

Das folgende Tool berechnet unter Anderem die Kenngrößen der Gleichverteilung für beliebige Parameter x_{min} und x_{max}: **WDF, VTF und Momente spezieller Verteilungen**

Hinweis: In dieser Multimedia–Anwendung wird die Gleichverteilung als „Rechteck" bezeichnet.

Erzeugung einer Gleichverteilung mit PN-Generatoren

Die heute verwendeten Zufallsgeneratoren sind meist **pseudozufällig**. Das bedeutet, dass die erzeugte Folge als das Ergebnis eines festen Algorithmuses eigentlich deterministisch ist, für den Anwender jedoch aufgrund der großen Periodenlänge P als stochastisch erscheint. Mehr hierzu im **Kapitel 2.5.**

Für die Systemsimulation haben Pseudozufallsgeneratoren gegenüber echten Zufallsgeneratoren den entscheidenden Vorteil, dass die erzeugten Zufallsfolgen ohne Speicherung reproduzierbar sind, was zum einen den Vergleich verschiedener Systemmodelle ermöglicht und auch die Fehlersuche wesentlich erleichtert. Ein Zufallsgenerator sollte dabei folgende Kriterien erfüllen:

- Die Zufallsgrößen x_ν einer generierten Folge sollten mit sehr guter Näherung gleichverteilt sein. Bei wertdiskreter Darstellung an einem Rechner erfordert dies unter Anderem eine hinreichend *hohe Bitauflösung*, zum Beispiel mit 32 oder 64 Bit pro Abtastwert.
- Bildet man aus der sequentiellen Zufallsfolge $\langle x_\nu \rangle$ jeweils nichtüberlappende Paare von Zufallsgrößen, beispielsweise $(x_\nu,\ x_{\nu+1})$, $(x_{\nu+2},\ x_{\nu+3})$ ... , so sollten diese *Tupel* in einer zweidimensionalen Darstellung innerhalb eines Quadrates ebenfalls gleichverteilt sein.
- Bildet man aus der sequentiellen Folge $\langle x_\nu \rangle$ nicht überlappende *n-Tupel* von Zufallsgrößen $\Rightarrow$ $(x_\nu, \text{ ... }, x_{\nu+n-1})$, $(x_{\nu+n}, \text{ ... }, x_{\nu+2n-1})$ usw., so sollten auch diese innerhalb eines n-dimensionalen Würfels möglichst die Gleichverteilung ergeben.

Die erste Forderung bezieht sich ausschließlich auf die *Amplitudenverteilung* (WDF) und ist im Allgemeinen leichter zu erfüllen. Die beiden weiteren Forderungen sollen eine „ausreichende Zufälligkeit” der Folge gewährleisten. Sie betreffen die statistische Unabhängigkeit aufeinander folgender Zufallswerte.

Multiplicative Congruental Generator

Das bekannteste Verfahren zur Erzeugung einer Folge $\langle x_\nu \rangle$ mit gleichverteilten Werten zwischen 0 und 1 benutzt die **lineare Kongruenz**. Das Prinzip wird hier nur stichpunktartig angegeben:

(1) Diese Zufallsgeneratoren basieren auf der sukzessiven Manipulation einer Integervariablen k. Geschieht die Zahlendarstellung im Rechner mit L Bit, so nimmt diese Variable bei geeigneter Behandlung des Vorzeichenbits alle Werte zwischen 1 und $2^L - 1$ jeweils genau einmal an.

(2) Die hieraus abgeleitete Zufallsgröße

$$x = \frac{k}{2^{L-1}} = k \cdot \Delta x \in \{\Delta x,\ 2 \cdot \Delta x, \ldots, 1 - \Delta x,\ 1\}$$

ist demnach ebenfalls diskret (mit Stufenzahl $M = 2^L - 1$). Ist die Bitanzahl L hinreichend groß, so ist der Abstand $\Delta x = 1/(2^L - 1)$ zwischen zwei möglichen Werten sehr klein, und man kann x im Rahmen der Simulationsgenauigkeit durchaus als eine kontinuierliche Zufallsgröße interpretieren.

(3) Die rekursive Generierungsvorschrift eines **Multiplicative Congruential Generators** lautet:

$$k_\nu = (a \cdot k_{\nu-1}) \bmod m.$$

(4) Die statistischen Eigenschaften der Folge hängen entscheidend von den Parametern a und m ab. Der Startwert k_0 hat für die Statistik eine eher untergeordnete Bedeutung.

(5) Die besten Ergebnisse erzielt man mit der Basis $m = 2^l - 1$, wobei l eine beliebige natürliche Zahl angibt. Weit verbreitet ist bei Rechnern mit 32 Bit-Architektur und einem Vorzeichenbit die Basis $m = 2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$. Ein entsprechender Algorithmus lautet:

$$k_\nu = (16807 \cdot k_{\nu-1}) \bmod (2^{31} - 1).$$

(6) Für einen solchen Generator ist nur der Startwert $k_0 = 0$ nicht erlaubt. Für alle anderen Startwerte beträgt die Periodendauer $P = 2^{31} - 2$.

Dieser Algorithmus kann auf einem 32 Bit-Rechner nicht direkt implementiert werden, da das Ergebnis der Multiplikation bis zu 46 Bit beansprucht. Er kann aber so abgewandelt werden, dass zu keinem Zeitpunkt der Berechnung der Integerzahlenbereich von 32 Bit überschritten wird. Das so modifizierte C-Programm *uniform*( ) ist nachfolgend angegeben.

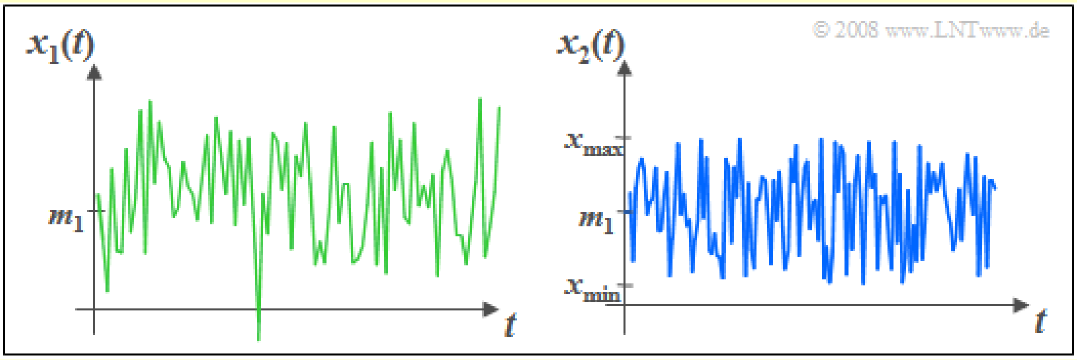
```
float uniform()                  /* gleichverteilt zwischen 0 und 1 */
{  long a,m,q,r,s;
   long static k=1;                       /* k darf nicht 0 sein */
   a=16807;m=2147483647;
   q=127773;r=2836;
   s=(long)floor((double)(k/q));
   k=a*(k-q*s)-r*s;
   if (k < 0) k+=m;
    return ((float)(k)/(float)(m));       /* Division durch m */
}
```

Allgemeine Beschreibung

Zufallsgrößen mit **Gaußscher Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** – die Namensgebung geht dabei auf den bedeutenden Mathematiker, Physiker und Astronomen **Carl Friedrich Gauß** zurück – sind wirklichkeitsnahe Modelle für viele physikalische Größen und haben auch für die Nachrichtentechnik eine große Bedeutung. Dies hat mehrere Gründe:

- Nach dem *zentralen Grenzwertsatz* besitzt jede Linearkombination statistischer Größen
$$x = \sum_{i=1}^{I} x_i ,$$
im Grenzfall ($I \to \infty$) eine Gaußsche WDF, so lange die einzelnen Komponenten keine statistischen Bindungen besitzen. Dies gilt (nahezu) für alle Dichtefunktionen der einzelnen Summanden x_i.
- Viele *Rauschprozesse* erfüllen genau diese Voraussetzung, das heißt, sie setzen sich additiv aus einer sehr großen Anzahl voneinander unabhängiger Einzelbeiträge zusammen, so dass ihre Musterfunktionen (Rauschsignale) eine Gaußsche Amplitudenverteilung aufweisen.
- Legt man ein gaußverteiltes Signal zur spektralen Formung an ein lineares Filter, so ist das Ausgangssignal ebenfalls gaußverteilt. Es ändern sich nur die Verteilungsparameter wie Mittelwert und Streuung sowie die inneren statistischen Bindungen der Abtastwerte.

Beispiel: Das Bild zeigt links ein Gaußsches Zufallssignal $x_1(t)$ und rechts im Vergleich dazu ein gleichverteiltes Signal $x_2(t)$ mit gleichem Mittelwert m_1 und gleicher Streuung σ.



Man erkennt, dass bei der Gaußverteilung im Gegensatz zur Gleichverteilung beliebig große und beliebig kleine Amplitudenwerte auftreten können, auch wenn diese sehr unwahrscheinlich sind im Vergleich zum mittleren Amplitudenbereich.

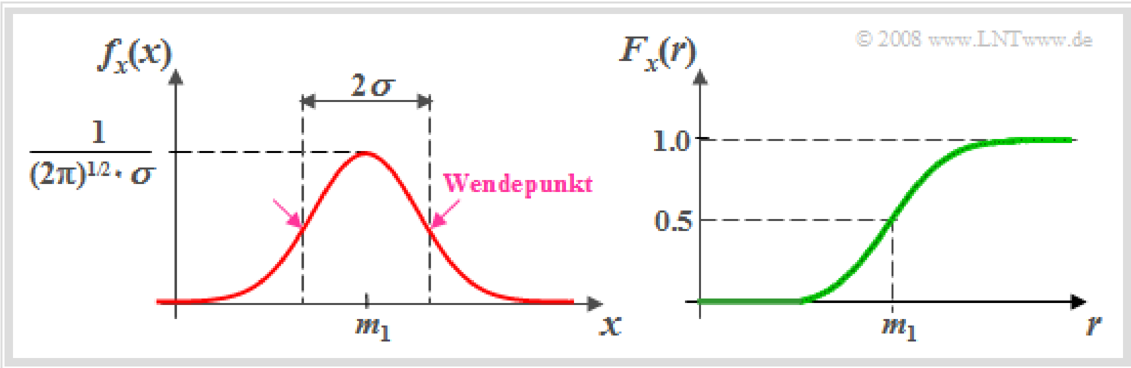
Wahrscheinlichkeitsdichte- und Verteilungsfunktion

Die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** einer gaußverteilten Zufallsgröße lautet allgemein:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\exp\left(-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Die Parameter einer Gaußschen WDF sind

- der Mittelwert bzw. der Gleichanteil m_1,
- die Streuung bzw. der Effektivwert σ.



Aus der linken Darstellung geht hervor, dass die Streuung σ als der Abstand von Maximalwert und Wendepunkt aus der glockenförmigen WDF $f_x(x)$ auch grafisch ermittelt werden kann. Ist $m_1 = 0$ und $\sigma = 1$, so spricht man oft auch von der **Normalverteilung**.

Rechts ist die **Verteilungsfunktion** $F_x(r)$ einer gaußverteilten Zufallsgröße dargestellt. Die VTF ist punktsymmetrisch um den Mittelwert m_1. Durch Integration über die Gaußsche WDF erhält man:

$$F_x(r) = \phi\left(\frac{r-m_1}{\sigma}\right) \quad \text{mit} \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Man bezeichnet $\phi(x)$ als das **Gaußsche Fehlerintegral**. Dessen Funktionsverlauf ist analytisch nicht berechenbar und muss deshalb aus Tabellen entnommen werden. $\phi(x)$ lässt sich durch eine Taylorreihe annähern oder aus der in Programmbibliotheken oft vorhandenen Funktion „erf(x)” berechnen.

Weitere Informationen zu den gaußverteilten Zufallsgrößen liefert das folgende Lernvideo:
Der AWGN–Kanal – Teil 2

Überschreitungswahrscheinlichkeit

Bei der Untersuchung digitaler Übertragungssysteme muss oft die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass eine (mittelwertfreie) gaußverteilte Zufallsgröße x mit der Varianz σ^2 einen vorgegebenen Wert x_0 überschreitet. Für diese Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\mathrm{Pr}(x > x_0) = \mathrm{Q}(x_0/\sigma).$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{Q}(x) = 1 - \phi(x)$ die Komplementärfunktion zu $\phi(x)$; man nennt diese Funktion das **Komplementäre Gaußsche Fehlerintegral** und es gilt folgende Berechnungsvorschrift:

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = 1 - \phi(x).$$

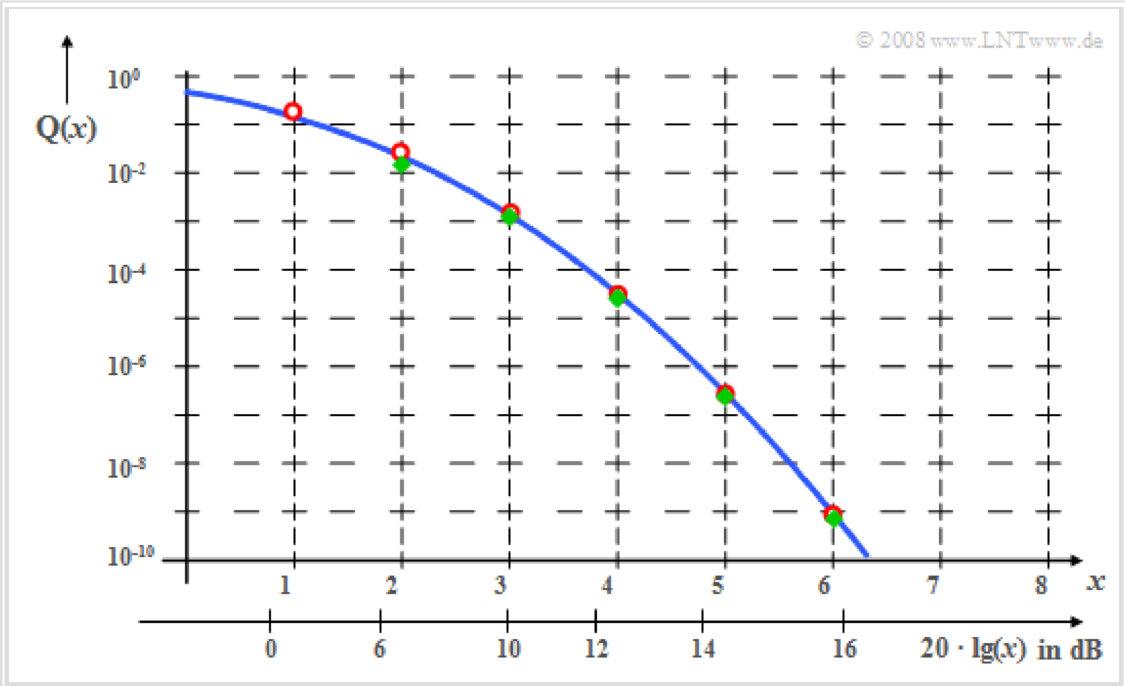
Dieses Integral ist ebenfalls nicht analytisch lösbar und muss aus Tabellen entnommen werden. In Bibliotheken findet man oft die Funktion „erfc(x)”, die mit $\mathrm{Q}(x)$ wie folgt zusammenhängt:

$$\mathrm{Q}(x) = 1/2 \cdot \mathrm{erfc}(x/\sqrt{2}).$$

Speziell für größere x–Werte von (also für kleine Fehlerwahrscheinlichkeiten) liefern die nachfolgend angegebenen Schranken eine brauchbare Abschätzung für das Komplementäre Gaußsche Fehlerintegral. $\mathrm{Q_o}(x)$ bezeichnet hierbei eine obere und $\mathrm{Q_u}(x)$ eine untere Schranke:

$$\mathrm{Q_o}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x} \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}, \qquad \mathrm{Q_u}(x) = \frac{1 - 1/x^2}{\sqrt{2\pi}\cdot x} \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2} = \mathrm{Q_0}(x)\left(1 - 1/x^2\right).$$

Das Grafik zeigt die Q-Funktion in logarithmischer Darstellung für lineare (obere Achse) und logarithmische Abszissenwerte (untere Achse). Die obere Schranke (rote Kreise) ist ab ca. $x = 1$ brauchbar, die untere Schranke (grüne Rauten) ab $x \approx 2$. Für x-Werte ≥ 4 sind beide Schranken innerhalb der Zeichengenauigkeit vom tatsächlichen Verlauf $\mathrm{Q}(x)$ nicht mehr zu unterscheiden.



Zentralmomente und Momente

Die **Kenngrößen der Gaußverteilung** weisen folgende Eigenschaften auf:

- Die Zentralmomente μ_k (identisch mit den Momenten m_k der äquivalenten mittelwertfreien Zufallsgröße $x - m_1$) sind bei der Gaußschen WDF wie auch bei der Gleichverteilung aufgrund der symmetrischen Verhältnisse für ungerade Werte von k identisch 0. Das Zentralmoment μ_2 ist definitionsgemäß gleich σ^2.
- Alle höheren Zentralmomente mit geradzahligen Werten von k lassen sich bei gaußförmiger WDF – wohlgemerkt: ausschließlich bei dieser – durch die Varianz σ^2 ausdrücken:

  $$\mu_k = (k-1)\cdot(\mathrm{k}-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1\cdot\sigma^{\mathrm{k}}\quad(\text{falls } k \text{ gerade}).$$

- Daraus können die nichtzentrierten Momente m_k wie folgt bestimmt werden:

  $$m_k = \sum_{\kappa=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ \kappa \end{array} \right) \cdot \mu_\kappa \cdot {m_1}^{k-\kappa}.$$

  Es ist anzumerken, dass diese Gleichung allgemein gilt, also für beliebige Verteilungen.

- Aus der oberen Gleichung folgt direkt $\mu_4 = 3\sigma^4$ und daraus für die Kurtosis der Wert $K = 3$. Den Wert $K - 3$ bezeichnet man deshalb auch häufig als die **Gaußabweichung**. Ist diese negativ, so erfolgt der WDF-Abfall schneller als bei der Gaußverteilung. Beispielsweise hat bei einer Gleichverteilung die Gaußabweichung stets den Zahlenwert 1.8 – 3 = –1.2.

Beispiel: Die ersten Zentralmomente einer Gaußschen Zufallsgröße mit Streuung σ = 1/2 sind:

$$\mu_2 = \frac{1}{4}, \quad \mu_4 = \frac{3}{16}, \quad \mu_6 = \frac{15}{64}, \quad \mu_8 = \frac{105}{256}.$$

Alle Zentralmomente mit ungeradem Index sind indenisch 0.

Mit dem folgenden Modul können Sie sich die Kenngrößen der Gaußverteilung anzeigen lassen:

WDF, VTF und Momente spezieller Verteilungen

Erzeugung mittels Additionsmethode

Dieses einfache, auf dem zentralen Grenzwertsatz basierende Verfahren zur rechnertechnischen **Generierung einer Gaußschen Zufallsgröße** soll hier nur stichpunktartig skizziert werden:

(1) Man geht von (zwischen 0 und 1) gleichverteilten und statistisch voneinander unabhängigen Zufallsgrößen u_i aus ⇒ Mittelwert 1/2, Varianz 1/12.

(2) Man bildet die Summe über I Summanden, wobei I hinreichend groß gewählt werden muss:

$$s = \sum_{i=1}^{I} u_i\,.$$

Nach dem **zentralen Grenzwertsatz** ist die Zufallsgröße s mit guter Näherung gaußverteilt, wenn I hinreichend groß gewählt wird. Für I = 2 ergibt sich beispielsweise nur eine Dreieck–WDF (Faltung zweier Rechtecke).

(3) Der Mittelwert der Zufallsgröße s beträgt somit I/2. Da die gleichverteilten Zufallsgrößen u_i als statistisch voneinander unabhängig vorausgesetzt wurden, können auch ihre Varianzen addiert werden, so dass sich für die Varianz von s der Wert I/12 ergibt.

(4) Soll eine gaußverteilte Zufallsgröße x mit anderem Mittelwert m_x und anderer Streuung σ_x erzeugt werden, so muss noch folgende lineare Transformation durchgeführt werden:

$$x = m_x + \frac{\sigma_x}{\sqrt{I/12}} \cdot [(\sum_{i=1}^{I} u_i) - I/2].$$

(5) Mit dem Parameter I = 12 vereinfacht sich die Generierungsvorschrift, was man insbesondere bei rechenzeitkritischen Anwendungen – z. B. bei einer Echtzeitsimulation – ausnutzen kann:

$$x = m_x + \sigma_x \cdot [(\sum_{i=1}^{12} u_i) - 6].$$

Die nach der Additionsmethode (mit Parameter I) approximierte Gaußsche Zufallsgröße liefert allerdings nur Werte in einem begrenzten Bereich um den Mittelwert m_x. Allgemein gilt:

$$m_x - \sqrt{3I} \cdot \sigma_x \le x \le m_x + \sqrt{3I} \cdot \sigma_x\,.$$

Der Fehler gegenüber der theoretischen Gaußverteilung ist an diesen Grenzen am größten und wird für steigendes I kleiner. Diesen Sachverhalt können Sie sich anhand eines Lernvideos verdeutlichen.

Prinzip der Additionsmethode

Erzeugung mit dem Verfahren nach Box/Muller

Bei dieser Methode werden zwei statistisch voneinander unabhängige gaußverteilte Zufallsgrößen x und y aus den beiden zwischen 0 und 1 gleichverteilten und statistisch unabhängigen Zufallsgrößen u und v durch **nichtlineare Transformation** erzeugt:

$$x = m_x + \sigma_x \cdot \cos(2\pi u) \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(v)},$$

$$y = m_y + \sigma_y \cdot \sin(2\pi u) \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln(v)}.$$

Das Verfahren nach Box und Muller – abgekürzt BM – kann wie folgt charakterisiert werden:

- Der theoretische Hintergrund für die Gültigkeit obiger Generierungsvorschriften basiert auf den Gesetzmäßigkeiten für zweidimensionale Zufallsgrößen (siehe Kapitel 4.1).
- Obige Gleichungen liefern sukszessive zwei Gaußwerte ohne statistische Bindungen untereinander. Diese Tatsache kann man zur Verkürzung der Simulationszeit nutzen, indem man bei jedem Funktionsaufruf ein Tupel (x, y) von Gaußwerten generiert.
- Ein Vergleich der Rechenzeiten zeigt, dass – bei jeweils bestmöglicher Implementierung – das BM-Verfahren der Additionsmethode mit $I = 12$ etwa um den Faktor 3 überlegen ist.
- Der Wertebereich ist beim BM-Verfahren weniger begrenzt als bei der Additionsmethode, so dass auch kleine Wahrscheinlichkeiten genauer simuliert werden. Aber auch mit dem BM-Verfahren lassen sich keine beliebig kleinen Fehlerwahrscheinlichkeiten simulieren.

Beispiel: Bei einem 32 Bit-Rechner ist die kleinste darstellbare Floatzahl $2^{-31} \approx 0.466 \cdot 10^{-9}$. Für die nachfolgende Abschätzung setzen wir die Parameter $m_x = m_y = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y = 1$ voraus.

- Der Maximalwert des Wurzelausdrucks in der Generierungsvorschrift des BM-Verfahrens kann somit nicht größer als ca. 6.55 werden und ist zudem äußerst unwahrscheinlich.
- Da sowohl die Cosinus- als auch die Sinusfunktion betragsmäßig auf 1 beschränkt ist, wäre das gleichzeitig der maximal mögliche Wert für die Zufallsgrößen x und y.

Eine in **[ES96]** dokumentierte Simulation über eine Milliarde Abtastwerte hat aber gezeigt, dass das BM-Verfahren nur bis zu Fehlerwahrscheinlichkeiten von 10^{-5} die Q-Funktion sehr gut approximiert, dann aber der Kurvenverlauf steil abbricht. Der maximal auftretende Wert des Wurzelausdrucks war dabei nicht 6.55, sondern aufgrund der aktuellen Zufallsgrößen u und v nur etwa 4.6, womit sich der schlagartige Abfall ab etwa 10^{-5} erklären lässt. Bei 64 Bit-Rechenoperationen kann dieses Verfahren natürlich noch deutlich verbessert werden.

Erzeugung mit dem Verfahren „Tabulated Inversion"

Bei diesem von P. Eck und G. Söder entwickelten Verfahren **[ES96]** wird wie folgt vorgegangen:

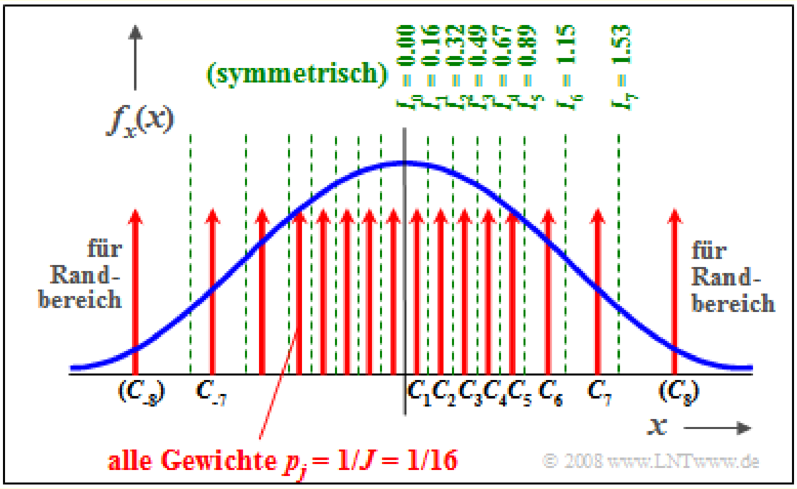
(1) Die Gauß–WDF wird in J **Intervalle mit gleichen Flächeninhalten** – und dementsprechend unterschiedlicher Breite – aufgeteilt, wobei J eine Zweierpotenz darstellt.

(2) Dem Intervall mit Index j wird ein **charakteristischer Wert** C_j zugeordnet. Somit genügt es, bei jedem Funktionsaufruf nur einen Integer-Zahlengenerator aufzurufen, der die ganzzahligen Werte $j = \pm 1, \ ... \ , \pm J/2$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit liefert und damit eines der C_j auswählt.

(3) Wird J hinreichend groß gewählt, z. B. $J = 2^{15} = 32768$, so können die C_j vereinfachend gleich den **Intervallmittelwerten** gesetzt werden. Diese Werte muss man nur einmal berechnen und können bereits vor der eigentlichen Simulation in einer Datei abgelegt werden.

(4) Die **Randbereiche** sind problematisch und müssen gesondert behandelt werden. Mittels nichtlinearer Transformation wird hierfür ein Floatwert gemäß den Ausläufern der Gauß-WDF bestimmt.

Beispiel: Die Skizze zeigt die WDF–Aufteilung für $J = 16$ durch die Intervallgrenzen I_{-7} ... I_7. Diese Grenzen wurden so gewählt, dass jedes Intervall die gleiche Fläche $p_j = 1/J = 1/16$ aufweist. Der charakteristische Wert C_j eines jeden Intervalls liegt genau in der Mitte zwischen I_{j-1} und I_j.



Man erzeugt nun eine gleichverteilte diskrete Zufallsgröße k (hier zwischen 1 und 8) und dazu ein Vorzeichenbit. Bei negativem Vorzeichenbit und $k = 4$ wird somit der Wert $-(0.49+0.67)/2 \ \Rightarrow \ C_4 = -0.58$ ausgegeben. Bei $k = 8$ tritt der Sonderfall ein, dass man den Zufallswert C_8 durch nichtlineare Transformation entsprechend den Ausläufern der Gaußkurve ermitteln muss.

Die Eigenschaften von „Tabulated Inversion" können wie folgt zusammengefasst werden:

- Diese Methode ist mit $J = 2^{15}$ bei vergleichbarer Simulationsgenauigkeit etwa um den Faktor 8 schneller als das BM-Verfahren.
- Nachteilig ist, dass nun die Überschreitungswahrscheinlichkeit $\Pr(x > r)$ in den inneren Bereichen nicht mehr kontinuierlich ist, sondern sich aufgrund der Diskretisierung eine Treppenkurve ergibt.
- Dieses Manko kann man durch ein größeres J ausgleichen. Durch die Sonderbehandlung der Ränder eignet sich das Verfahren auch für sehr kleine Fehlerwahrscheinlichkeiten.

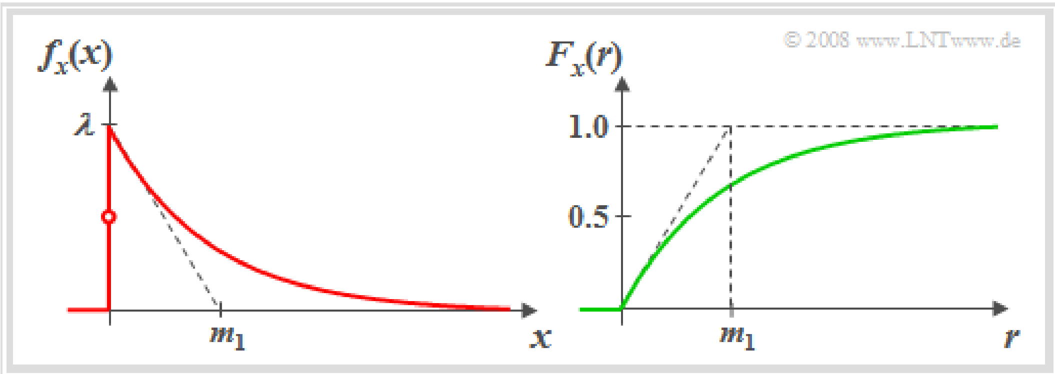
Einseitige Exponentialverteilung

Definition: Eine kontinuierliche Zufallsgröße x nennt man **(negativ-)exponentialverteilt**, wenn sie nur nicht-negative Werte annehmen kann und die WDF für $x > 0$ folgenden Verlauf hat:

$$f_x(x) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}.$$

Das linke Bild zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) einer exponentialverteilten Zufallsgröße x. Hervorzuheben ist:

- Definitionsgemäß gilt $f_x(0) = \lambda/2$.
- Je größer der Verteilungsparameter λ ist, um so steiler erfolgt der Abfall.



Für die **Verteilungsfunktion** (rechtes Bild) erhält man für $r > 0$ durch Integration über die WDF:

$$F_x(r) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot r}.$$

Die **Momente der Exponentialverteilung** sind allgemein gleich $m_k = k!/\lambda^k$. Daraus und aus dem Satz von Steiner ergibt sich für den Mittelwert und die Streuung:

$$m_1 = \frac{1}{\lambda},$$

$$\sigma = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Beispiel: Die Exponentialverteilung hat große Bedeutung für Zuverlässigkeitsuntersuchungen, wobei in diesem Zusammenhang auch der Begriff *Lebensdauerverteilung* üblich ist. Bei diesen Anwendungen ist die Zufallsgröße oft die Zeit t, die bis zum Ausfall einer Komponente vergeht. Desweiteren ist anzumerken, dass die Exponentialverteilung eng mit der **Poissonverteilung** in Zusammenhang steht.

Transformation von Zufallsgrößen

Zur Erzeugung einer solchen exponentialverteilten Zufallsgröße an einem Digtalrechner kann zum Beispiel eine **nichtlineare Transformation** verwendet werden. Das zugrunde liegende Prinzip wird hier zunächst allgemein angegeben.

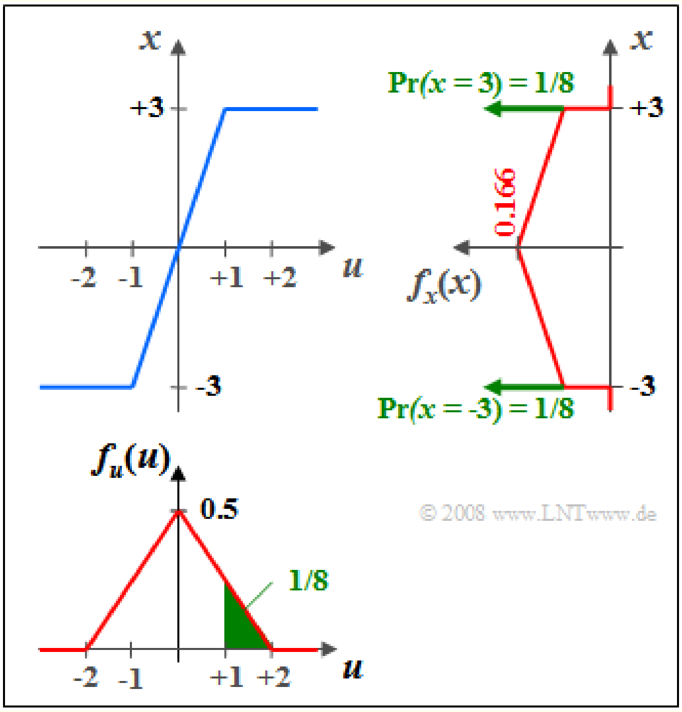
Besitzt eine kontinuierliche Zufallsgröße u die WDF $f_u(u)$, so gilt für die WDF der an der nichtlinearen Kennlinie $x = g(u)$ transformierten Zufallsgröße x:

$$f_x(x) = \frac{f_u(u)}{|\, g'(u)\, |}\Bigg|_{u=h(x)}.$$

Hierbei bezeichnet $g'(u)$ die **Ableitung** der Kennlinie; $h(x)$ gibt die **Umkehrfunktion** zu $g(u)$ an.

Diese Gleichung gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, dass die Ableitung $g'(u)$ ungleich 0 ist. Bei einer Kennlinie mit horizontalen Abschnitten ($g'(u) = 0$) treten in der WDF zusätzliche Diracfunktionen auf, wenn die Eingangsgröße in diesem Bereich Anteile besitzt. Die Gewichte dieser Diracfunktionen sind gleich den Wahrscheinlichkeiten, dass die Eingangsgröße in diesen Bereichen liegt.

Beispiel: Gibt man eine zwischen –2 und +2 dreieckverteilte Zufallsgröße u auf eine Nichtlinerität mit der Kennlinie $x = g(u)$, die im Bereich $|u| \le 1$ die Eingangswerte um den Faktor 3 verstärkt und alle Werte $|u| > 1$ je nach Vorzeichen auf $x = \pm 3$ abbildet, so ergibt sich die rechts skizzierte WDF $f_x(x)$.



Bitte beachten Sie:

- Aufgrund der Verstärkung um den Faktor 3 ist die WDF $f_x(x)$ um diesen Faktor breiter und niedriger als $f_u(u)$.
- Die horizontalen Begrenzungen der Kennlinie bei $u = \pm 1$ führen zu den beiden Diracfunktionen bei $x = \pm 3$, jeweils mit Gewicht 1/8 $\Rightarrow$ grüne Flächen in der WDF $f_u(u)$.

Erzeugung einer exponentialverteilten Zufallsgröße (1)

Es wird vorausgesetzt, dass die zu transformierende Zufallsgröße u gleichverteilt zwischen 0 und 1 ist. Dann kann gezeigt werden, dass durch die monoton steigende Kennlinie

$$x = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln(\frac{1}{1-u})$$ ⇒ **Herleitung der Transformationskennlinie** (siehe nächste Seite)

eine **einseitig exponentialverteilte Zufallsgröße** x mit folgender WDF entsteht:

$$f_x(x) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x} \quad \text{für} \;\; x > 0.$$

Für $x = 0$ ist der WDF-Wert nur halb so groß. Negative x-Werte treten nicht auf, da für $0 \le u < 1$ das Argument der (natürlichen) Logarithmus–Funktion nicht kleiner wird als 1.

Die gleiche WDF erhält man übrigens mit der monoton fallenden Kennlinie

$$x = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln(\frac{1}{u}) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(u).$$

Bei einer Rechnerimplementierung entsprechend der ersten Transformationskennlinie ist der Wert $u = 1$ auszuschließen, im zweiten Fall der Wert $u = 0$.

Zur Verdeutlichung der hier abgeleiteten Transformation bieten wir Ihnen ein Lernvideo an:
Erzeugung einer Exponentialverteilung

In einem engen Zusammenhang mit der Exponentialverteilung steht die sogenannte **Laplace-** Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_x(x) = \frac{\lambda}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \,\cdot\, |x|}.$$

Diese ist eine *zweiseitige Exponentialverteilung*, die insbesondere die Amplitudenverteilung von Sprach- und Musiksignalen ausreichend gut approximiert. Zur Generierung verwendet man eine zwischen ±1 gleichverteilte Zufallsgröße v (0 ausgeschlossen) und die Transformationskennlinie

$$x = \frac{\mathrm{sign}(v)}{\lambda} \cdot \ln(v).$$

Mit dem folgenden Berechnungstool können Sie sich unter Anderem die Kenngrößen (WDF, VTF, Momente) der Exponential- und der Laplaceverteilung anzeigen lassen:
WDF, VTF und Momente spezieller Verteilungen

Im zweiten Teil des unten aufgeführten Lernvideos wird an Beispielen gezeigt, dass die Laplace-Verteilung für die Beschreibung von Sprach- und Musiksignalen eine große Bedeutung besitzt:

Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (Dauer 6:30)

Erzeugung einer exponentialverteilten Zufallsgröße (2)

Ausführliche Herleitung der Transformationskennlinie

Es soll eine geeignete Transformationskennlinie $x = g(u)$ ermittelt werden, die aus einer zwischen 0 und 1 gleichverteilten Zufallsgröße u eine einseitig exponentialverteilte Zufallsgröße x formt:

$$f_u(u) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad 0 < u < 1, \\ 0.5 & \text{falls} \quad u = 0, u = 1, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{falls} \quad x > 1, \\ \lambda/2 & \text{falls} \quad x = 0, \\ 0 & \text{falls} \quad x < 1. \end{cases}$$

Ausgehend von der allgemeinen Transformationsgleichung

$$f_x(x) = \frac{f_u(u)}{|\, g'(u)\,|}\Bigg|_{u=h(x)}$$

erhält man durch Umstellen und Einsetzen der gegebenen WDF $f_X(x)$:

$$|\, g'(u)\,| = \frac{f_u(u)}{f_x(x)}\Bigg|_{x=g(u)} = 1/\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda \cdot g(u)}.$$

Hierbei gibt $x = g'(u)$ die Ableitung der Kennlinie an, die wir als monoton steigend voraussetzen. Mit dieser Annahme erhält man $|g'(u)| = g'(u) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ und die Differentialgleichung

$$\mathrm{d}u = \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

mit der Lösung

$$u = K - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Aus der Bedingung, dass die Eingangsgröße $u = 0$ zum Ausgangswert $x = 0$ führen soll, erhält man für die Konstante $K = 1$ und damit

$$u = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Löst man diese Gleichung nach x auf, so ergibt sich die vorne angegebene Gleichung:

$$x = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{1}{1-u}\right).$$

Bei einer Rechnerimplementierung ist allerdings sicherzustellen, dass für die gleichverteilte Eingangsgröße u der kritische Wert 1 ausgeschlossen wird. Dies wirkt sich jedoch auf das Endergebnis nicht aus.

q.e.d.

Rayleighverteilung

Diese Verteilung spielt für die Beschreibung zeitvarianter Kanäle – wie sie beispielweise im Mobilfunk vorliegen – eine zentrale Rolle. So weist **nichtfrequenzselektives Fading** eine solche Verteilung auf, wenn zwischen der festen Basisstation und dem mobilen Teilnehmer keine Sichtverbindung besteht.

Die **Rayleighverteilung** besitzt folgende charakteristische Eigenschaften:

- Eine rayleighverteilte Zufallsgröße x kann keine negativen Werte annehmen und der theoretisch mögliche Wert $x = 0$ tritt auch nur mit der Wahrscheinlichkeit 0 auf.
- Für $x \geq 0$ hat die WDF mit dem Verteilungsparameter λ den folgenden Verlauf:

$$f_x(x) = \frac{x}{\lambda^2} \cdot \mathrm{e}^{-x^2/(2\lambda^2)}.$$

- Das k-te Moment einer rayleighverteilten Zufallsgröße x ergibt sich allgemein zu

$$m_k = (2 \cdot \lambda^2)^{k/2} \cdot \Gamma(1 + \frac{k}{2}) \quad \text{mit} \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

- Daraus lassen sich Mittelwert und Streuung folgendermaßen berechnen:

$$m_1 = \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot \Gamma(1.5) = \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot \sqrt{\pi}/2 = \lambda \cdot \sqrt{\pi/2},$$

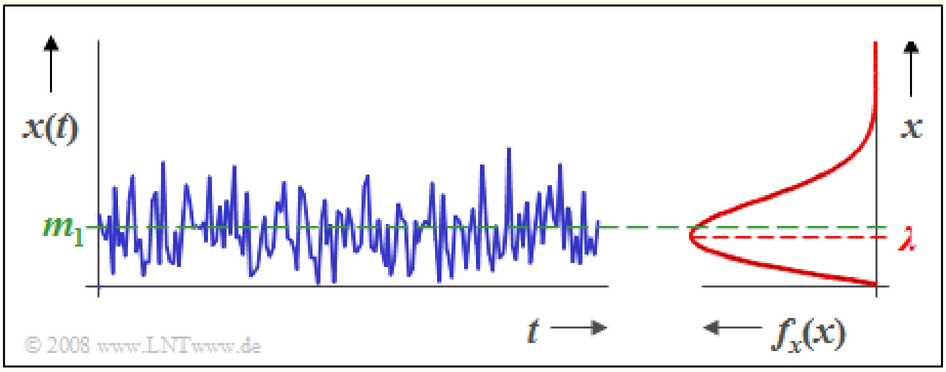
$$m_2 = 2\lambda^2 \cdot \Gamma(2) = 2\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \lambda \cdot \sqrt{2 - \pi/2}.$$

- Zur Modellierung einer rayleighverteilten Zufallsgröße x verwendet man zum Beispiel zwei gaußverteilte, mittelwertfreie und statistisch unabhängige Zufallsgrößen u und v, die beide die Streuung $\sigma = \lambda$ aufweisen. Die Größen u und v werden dann wie folgt verknüpft:

$$x = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Beispiel: Die Grafik zeigt den Zeitverlauf $x(t)$ einer rayleighverteilten Zufallsgröße sowie die zugehörige Dichtefunktion $f_x(x)$. Man erkennt aus dieser Darstellung:

- Die Rayleigh-WDF ist stets unsymmetrisch.
- Der Mittelwert m_1 liegt etwa 25% oberhalb des WDF-Maximums, das bei $x = \lambda$ auftritt.



Riceverteilung

Auch diese Verteilung spielt für die Beschreibung zeitvarianter Kanäle eine wichtige Rolle, unter Anderem auch deshalb, weil *nichtfrequenzselektives Fading* dann riceverteilt ist, wenn zwischen der Basisstation und dem Mobilteilnehmer eine *Sichtverbindung* besteht.

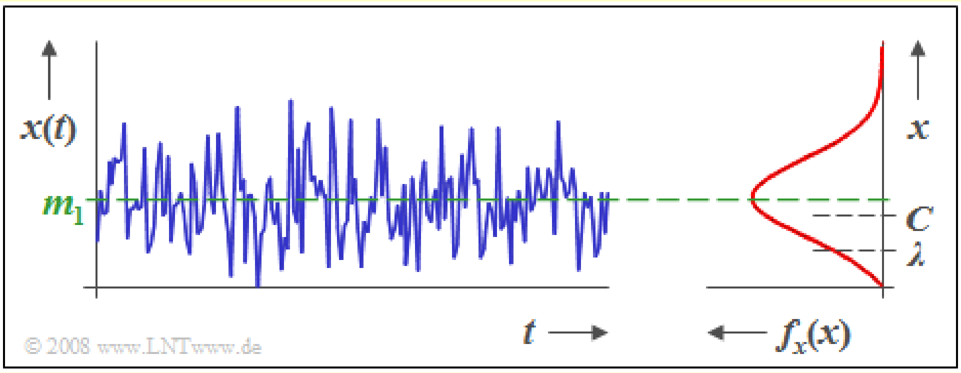
Für die Riceverteilung gelten folgende Aussagen:

- Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunkion hat für $x > 0$ den nachfolgend angegebenen Verlauf, wobei $\mathrm{I}_0(\dots)$ die modifizierte Besselfunktion nullter Ordnung bezeichnet:

$$f_x(x) = \frac{x}{\lambda^2} \cdot \mathrm{e}^{-(C^2+x^2)/(2\lambda^2)} \cdot \mathrm{I}_0(\frac{x \cdot C}{\lambda^2}) \quad \text{mit} \quad \mathrm{I}_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k! \cdot \Gamma(\mathrm{k}+1)}.$$

- Der gegenüber der Rayleighverteilung zusätzliche Parameter C ist ein Maß für die „Stärke" der Direktkomponente. Je größer der Quotient C/λ ist, desto mehr nähert sich der Ricekanal dem Gauß-Kanal an. Für $C = 0$ geht die Riceverteilung in die Rayleighverteilung über.
- Bei der Riceverteilung ist der Ausdruck für das Moment m_k deutlich komplizierter und nur mit Hilfe hypergeometrischer Funktionen angebbar. Ist jedoch λ sehr viel kleiner als C, so gilt $m_1 \approx C$ und $\sigma \approx \lambda$. Unter diesen Voraussetzungen kann die Riceverteilung durch eine Gaußverteilung mit Mittelwert C und Streuung λ angenähert werden.
- Zur Modellierung einer riceverteilten Zufallsgröße x verwenden wir ein ähnliches Modell wie für die Rayleighverteilung, nur muss nun zumindest eine der beiden gaußverteilten und statistisch voneinander unabhängigen Zufallsgrößen (u und/oder v) einen Mittelwert ungleich 0 aufweisen.

Beispiel: Die Grafik zeigt den zeitlichen Verlauf einer riceverteilten Zufallsgröße x sowie deren Dichtefunktion $f_x(x)$, wobei $C/\lambda = 2$ gilt. Der Mittelwert m_1 ist hier etwas größer als C.



Etwas salopp ausgedrückt: Die Riceverteilung ist ein Kompromiss zwischen der Rayleigh- und der Gaußverteilung.

Mit dem folgenden Berechnungstool können Sie sich unter Anderem die Kenngrößen (WDF, VTF, Momente) der Rayleigh- und der Riceverteilung anzeigen lassen:

WDF, VTF und Momente spezieller Verteilungen

Cauchyverteilung

Mathematisch sehr interessant (allerdings weniger von praktischer Bedeutung) ist die sogenannte **Cauchyverteilung** mit folgenden Eigenschaften:

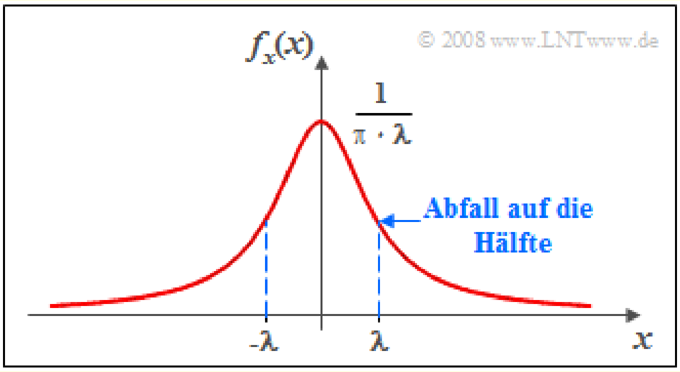
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunkion und Verteilungsfunktion lauten mit dem Parameter λ:

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}, \qquad F_x(r) = \frac{1}{2} + \arctan(\frac{r}{\lambda}).$$

- Bei der Cauchyverteilung besitzen alle Momente mit Ausnahme des linearen Mittelwertes m_1 einen unendlich großen Wert, und zwar unabhängig vom Parameter λ.
- Damit besitzt diese Verteilung auch eine unendlich große Varianz ⇒ Leistung. Deshalb ist es offensichtlich, dass keine physikalische Größe cauchyverteilt sein kann.
- Eine cauchyverteilte Zufallsgröße x lässt sich aus einer zwischen –1 und +1 gleichverteilten Größe erzeugen, wenn man die folgende nichtlineare Transformation durchführt:

$$x = \lambda \cdot \tan(\pi/2 \cdot u).$$

Beispiel: Der Quotient u/v zweier unabhängiger gaußverteilter mittelwertfreier Größen u und v ist mit dem Verteilungsparameter $\lambda = \sigma_u/\sigma_v$ cauchyverteilt.



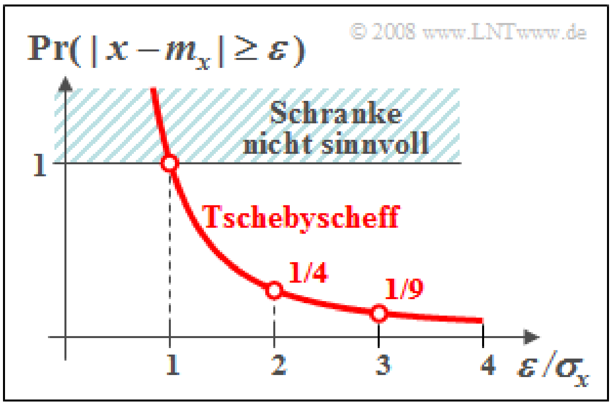
Die Grafik zeigt die Cauchy-WDF. Zu erkennen ist der langsame Abfall dieser Funktion zu den Rändern hin. Da dieser asymptotisch mit $1/x^2$ erfolgt, sind die Varianz und die Momente höherer Ordnung (mit geradzahligem Index) unendlich groß.

Tschebyscheffsche Ungleichung

Bei einer Zufallsgröße x mit bekannter WDF $f_x(x)$ und VTF $F_x(r)$ kann die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße x betragsmäßig um mehr als einen Wert ε von ihrem Mittelwert m_x abweicht, entsprechend der in diesem Kapitel allgemein beschriebenen Weise berechnet werden.

Ist neben dem Mittelwert m_x zwar noch die Streuung σ_x bekannt, nicht jedoch der exakte WDF-Verlauf, so lässt sich für diese Wahrscheinlichkeit zumindest eine obere Schranke angeben:

$$\Pr(|x - m_x| \ge \varepsilon) \le \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}.$$



Diese von **Pafnuti L. Tschebyscheff** angegebene Schranke – bekannt als „Tschebyscheffsche Ungleichung" – ist im Allgemeinen allerdings nur eine sehr grobe Näherung für die tatsächliche Überschreitungswahrscheinlichkeit. Sie sollte deshalb nur bei unbekanntem Verlauf der WDF $f_x(x)$ angewandt werden.

Beispiel: Wir gehen von einer gaußverteilten und mittelwertfreien Zufallsgröße x aus.

- Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass deren Betrag $|x|$ größer als die 3-fache Streuung $(3 \cdot \sigma_x)$ ist, einfach berechenbar und ergibt den Wert $2 \cdot \mathrm{Q}(3) \approx 2.7 \cdot 10^{-3}$.
- Die Tschebyscheffsche Ungleichung liefert hier als eine obere Schranke den deutlich zu großen Wert $1/9 \approx 0.111$, die aber für jede beliebige WDF–Form ebenfalls gelten würde.