

## Überblick zu Kapitel 5 des Buches **Stochastische Signaltheorie**

Dieses Kapitel beschreibt den **Einfluss eines Filters** auf die *Autokorrelationsfunktion* (AKF) und das *Leistungsdichtespektrum* (LDS) stochastischer Signalen. Im Einzelnen werden behandelt:

- die Berechnung von AKF und LDS am Filterausgang (*Stochastische Systemtheorie*),
- die Struktur und die Darstellung *digitaler Filter* (nichrekursiv und rekursiv),
- die *Dimensionierung* der Filterkoeffizienten für eine vorgegebene AKF,
- die Bedeutung des *Matched-Filters* für Nachrichtensysteme (SNR-Maximierung),
- die Eigenschaften des *Wiener-Kolmogorow-Filters* zur Signalrekonstruktion.

Die theoretischen Grundlagen werden auf 23 Seiten verdeutlicht. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel 40 Grafiken, neun Aufgaben und sieben Zusatzaufgaben mit insgesamt 75 Teilaufgaben sowie zwei Interaktionsmodule (IM):

- **Digitales Filter** (IM zu Kap. 5.2)
- **Zur Verdeutlichung des Matched-Filters** (IM zu Kap. 5.4)

Literaturhinweise: [Böh93] – [BFS87] – [Chu78] – [Dav70] – [Hän97] – [Hau03] – [Jac86] – [Knu73] – [Knu81] – [Lüc80] – [Lük92] – [Mül79] – [Mül91] – [PP02] – [Söd88] – [Söd93] – [Win77]

**Weitere Informationen** zum Thema sowie Aufgaben, Simulationen und Programmierübungen finden Sie in der Anleitung zum Praktikum *Simulationsmethoden in der Nachrichtentechnik* von Prof. Günter Söder. Diese frühere LNT-Lehrveranstaltung (bis Sommersemester 2012) basiert auf den 24 DOS-Programmen des Lehrsoftwarepakets *LNTsim*.

- Kapitel 10: *Filterung stochastischer Signale*, Programm *fil*
- Kapitel 11: *Optimale Filter*, Programm *ofi*

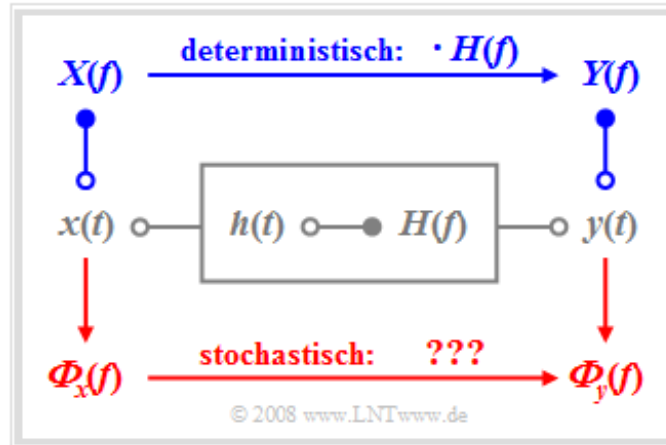
Hinweise zum Herunterladen des Programmpakets *LNTsim* und der Versuchsanleitungen:

**Lehrsoftwarepaket LNTsim** (Zip-Version, mehr als 50 MB)

**Praktikumsanleitung – Teil B** (PDF-Version, ca. 9.5 MB, mit Kapitel 10 und 11)

## Problemstellung

Wir betrachten wie im Buch *Lineare zeitinvariante Systeme* die unten skizzierte Anordnung, wobei das System sowohl durch die **Impulsantwort**  $h(t)$  als auch durch seinen **Frequenzgang**  $H(f)$  eindeutig beschrieben ist. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Beschreibungsgrößen im Zeit- und Frequenzbereich ist durch die **Fouriertransformation** gegeben.



Legt man an den Eingang das Signal  $x(t)$  an und bezeichnet das Ausgangssignal mit  $y(t)$ , so liefert die **klassische Systemtheorie** folgende Aussagen:

- Das Ausgangssignal  $y(t)$  ergibt sich aus der Faltung zwischen dem Eingangssignal  $x(t)$  und der Impulsantwort  $h(t)$ :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau.$$

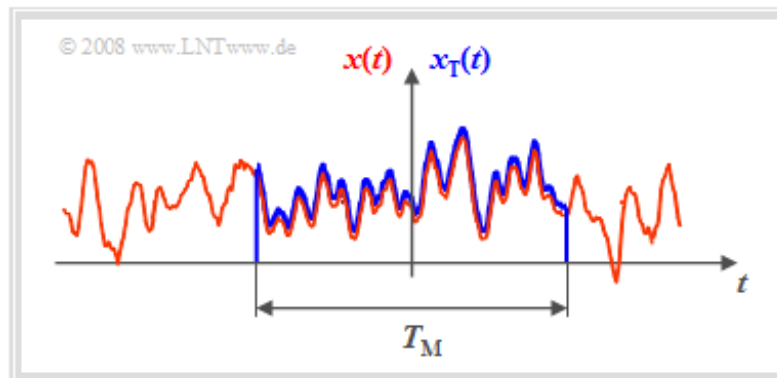
Diese Gleichung gilt für deterministische und stochastische Signale gleichermaßen.

- Bei deterministischen Signalen geht man meist den Umweg über die Spektralfunktionen. Das Eingangsspektrum  $X(f)$  ist die Fouriertransformierte von  $x(t)$ . Die Multiplikation mit dem Frequenzgang  $H(f)$  führt zum Spektrum  $Y(f)$ . Das Signal  $y(t)$  lässt sich daraus durch die Fourierrücktransformation gewinnen.
- Bei stochastischen Signalen versagt diese Vorgehensweise, da dann die Zeitfunktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  nicht für alle Zeiten von  $-\infty$  bis  $+\infty$  vorhersagbar sind und somit die dazugehörigen Amplitudenspektren  $X(f)$  und  $Y(f)$  gar nicht existieren. In diesem Fall muss auf die in Kapitel 4.5 definierten **Leistungsdichtespektren** übergegangen werden.

## Amplituden- und Leistungsdichtespektrum (1)

Wir betrachten nun einen ergodischen Zufallsprozess  $\{x(t)\}$ , dessen Autokorrelationsfunktion  $\varphi_x(\tau)$  als bekannt vorausgesetzt wird. Das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_x(f)$  ist dann über die Fouriertransformation ebenfalls eindeutig bestimmt und es sind folgende Aussagen zutreffend:

- Das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_x(f)$  kann – ebenso wie die Autokorrelationsfunktion  $\varphi_x(\tau)$  – für jede einzelne Musterfunktion des stationären und ergodischen Zufallsprozesses  $\{x(t)\}$  angegeben werden, auch wenn der spezifische Verlauf von  $x(t)$  explizit nicht bekannt ist.
- Das Amplitudenspektrum  $X(f)$  ist dagegen undefiniert, da bei Kenntnis der Spektralfunktion  $X(f)$  auch die gesamte Zeitfunktion  $x(t)$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  über die Fourierrücktransformation bekannt sein müsste, was eindeutig nicht der Fall sein kann.
- Ist entsprechend der nachfolgenden Skizze ein Zeitausschnitt der endlichen Zeitdauer  $T_M$  bekannt, so kann für diesen natürlich wieder die Fouriertransformation angewandt werden.



- Zwischen dem Leistungsdichtespektrum  $\Phi_x(f)$  des unendlich ausgedehnten Zufallssignals  $x(t)$  und dem Amplitudenspektrum  $X_T(f)$  des begrenzten Zeitausschnittes  $x_T(t)$  besteht dabei der folgende Zusammenhang:

$$\Phi_x(f) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot |X_T(f)|^2.$$

Die Herleitung dieser wichtigen Beziehung folgt auf der nächsten Seite. Sollten Sie sich für diesen mathematischen Beweis nicht interessieren, so können Sie gerne auf die nachfolgende Theorieseite **Leistungsdichtespektrum des Filterausgangssignals** springen.

## Amplituden- und Leistungsdichtespektrum (2)

Es folgt der Beweis der auf der letzten Seite angegebenen Beziehung

$$\Phi_x(f) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot |X_T(f)|^2.$$

**Beweis:** In Kapitel 4.4 wurde die Autokorrelationsfunktion (AKF) eines ergodischen Prozesses mit der Musterfunktion  $x(t)$  angegeben:

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt.$$

Es ist hier zulässig, die zeitlich unbegrenzte Funktion  $x(t)$  durch die auf den Zeitbereich  $-T_M/2$  bis  $+T_M/2$  begrenzte Funktion  $x_T(t)$  zu ersetzen.  $x_T(t)$  korrespondiert mit der Spektralfunktion  $X_T(f)$ , und man erhält durch Anwendung des Fourierintegrals und des Verschiebungssatzes:

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x_T(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(f) \cdot e^{j2\pi f(t+\tau)} df dt.$$

Nach Aufspalten des Exponenten und Vertauschen von Zeit- und Frequenzintegral ergibt sich:

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(f) \cdot \left[ \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x_T(t) \cdot e^{j2\pi ft} dt \right] \cdot e^{j2\pi f\tau} df.$$

Das innere Integral beschreibt das konjugiert-komplexe Spektrum  $X_T^*(f)$ . Daraus folgt weiter:

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2 \cdot e^{j2\pi f\tau} df.$$

Ein Vergleich mit dem bei Ergodizität stets gültigen Theorem von **Wiener** und **Chintchine**,

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df,$$

zeigt die Gültigkeit der Beziehung:

$$\Phi_x(f) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot |X_T(f)|^2.$$

q.e.d.

## Leistungsdichtespektrum des Filterausgangssignals

Kombiniert man die auf den beiden letzten Seiten gemachten Aussagen, so kommt man zu folgendem wichtigen Ergebnis:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f) \cdot |H(f)|^2.$$

**Beweis:** Ausgegangen wird von den drei bereits vorher hergeleiteten Beziehungen:

$$\Phi_x(f) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot |X_T(f)|^2, \quad \Phi_y(f) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot |Y_T(f)|^2, \quad Y_T(f) = X_T(f) \cdot H(f).$$

Setzt man diese Gleichungen ineinander ein, so erhält man die obige Gleichung.

In Worten: Das Leistungsdichtespektrum (LDS) am Ausgang eines linearen zeitinvarianten Systems mit dem Frequenzgang  $H(f)$  ergibt sich als das Produkt

- von dem Eingangs-LDS  $\Phi_x(f)$
- und der Leistungsübertragungsfunktion  $|H(f)|^2$ .

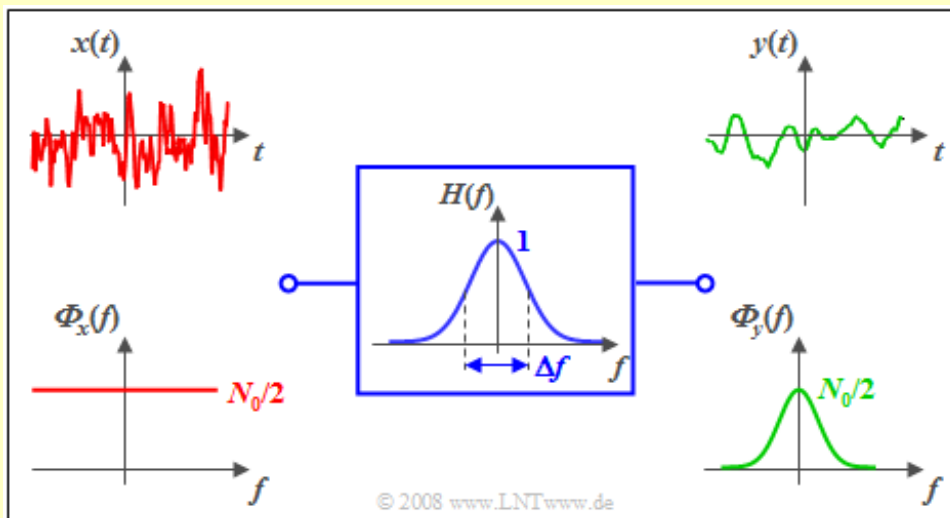
**Beispiel:** Am Eingang eines Gauß-Tiefpasses mit dem Frequenzgang

$$H(f) = e^{-\pi \cdot (f/\Delta f)^2}$$

liegt weißes Rauschen  $x(t)$  mit der (zweiseitigen) Rauschleistungsdichte  $N_0/2$  an. Dann gilt für das LDS des Ausgangssignals:

$$\Phi_y(f) = \frac{N_0}{2} \cdot e^{-2\pi \cdot (f/\Delta f)^2}.$$

Die Grafik zeigt die Signale und Leistungsdichtespektren am Ein- und Ausgang des Filters.



Das Eingangssignal  $x(t)$  kann – streng genommen – gar nicht gezeichnet werden, da es eine unendlich große Leistung besitzt; siehe hierzu das Lernvideo **AWGN-Kanal – Teil 2**. Das Ausgangssignal  $y(t)$  ist niederfrequenter als  $x(t)$  und besitzt eine endliche Leistung entsprechend dem Integral über  $\Phi_y(f)$ .

## Autokorrelationsfunktion des Filterausgangssignals

Das berechnete Leistungsdichtespektrum (LDS) kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f) \cdot H(f) \cdot H^*(f)$$

Für die zugehörige Autokorrelationsfunktion (AKF) erhält man dann entsprechend den Gesetzen der Fouriertransformation und durch Anwendung des **Faltungssatzes**:

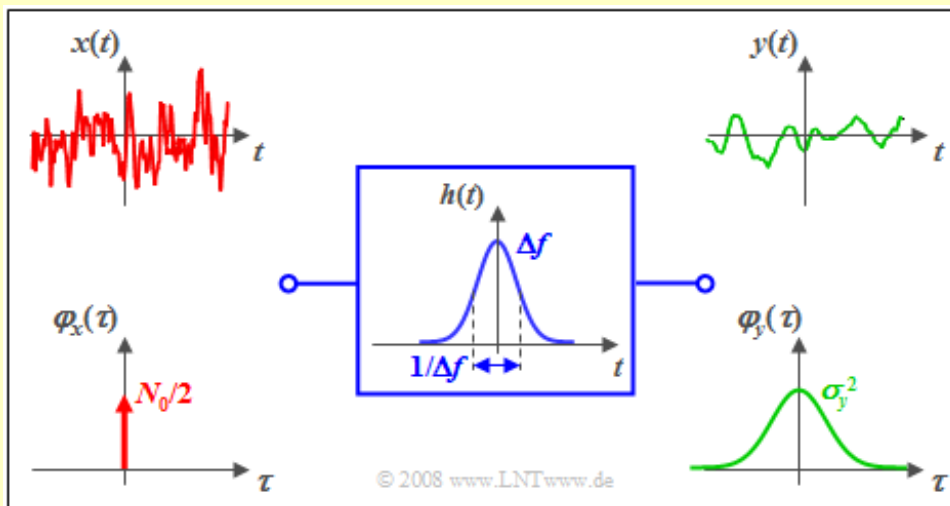
$$\varphi_y(\tau) = \varphi_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau).$$

Beim Übergang vom Spektral- in den Zeitbereich sind jeweils die Fourierrücktransformaten, nämlich

$$\varphi_y(\tau) \longleftrightarrow \Phi_y(f), \quad \varphi_x(\tau) \longleftrightarrow \Phi_x(f), \quad h(\tau) \longleftrightarrow H(f), \quad h(-\tau) \longleftrightarrow H^*(f)$$

einzusetzen. Zudem wird aus jeder Multiplikation eine Faltungsoperation.

**Beispiel:** Wir betrachten nochmals das **Beispiel der letzten Seite**, aber diesmal im Zeitbereich.



Man erkennt aus dieser Darstellung:

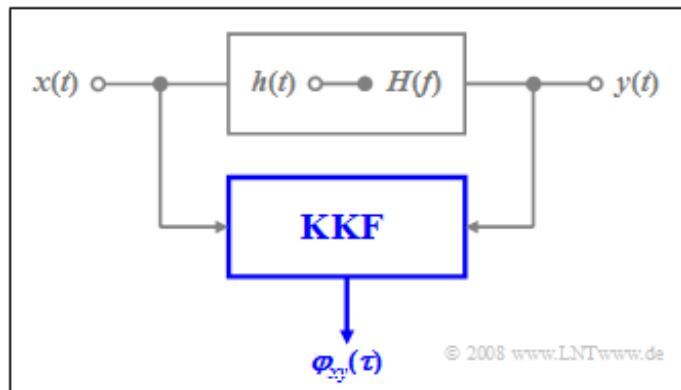
- Die AKF des Eingangssignals ist nun eine Diracfunktion mit dem Gewicht  $N_0/2$ .
- Durch zweimalige Faltung mit der (hier ebenfalls gaußförmigen) Impulsantwort  $h(t)$  bzw.  $h(-t)$  erhält man die AKF  $\varphi_y(\tau)$  des Ausgangssignals. Diese ist wiederum gaußförmig.
- Der AKF-Wert bei  $\tau = 0$  ist identisch mit der Fläche des Leistungsdichtespektrums  $\Phi_y(f)$  und kennzeichnet die Signalleistung (Varianz)  $\sigma_y^2$ .
- Dagegen ergibt die Fläche unter  $\varphi_y(\tau)$  den LDS-Wert  $\Phi_y(f=0)$ , also  $N_0/2$ .

## Kreuzkorrelationsfunktion zwischen Eingangs- und Ausgangssignal

Wir betrachten wieder ein Filter mit der Impulsantwort  $h(t)$  sowie die stochastischen Signale  $x(t)$  und  $y(t)$  an seinem Eingang bzw. seinem Ausgang.

Dann gilt für die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) zwischen dem Eingangs- und dem Ausgangssignal:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_x(\tau).$$



Hierbei bezeichnet  $h(\tau)$  die Impulsantwort des Filters (mit der Zeitvariablen  $\tau$  anstelle von  $t$ ) und  $\varphi_x(\tau)$  die AKF am Filtereingang.

**Beweis:** Allgemein gilt für die Kreuzkorrelationsfunktion zwischen zwei Signalen  $x(t)$  und  $y(t)$ :

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x(t) \cdot y(t + \tau) dt.$$

Mit der allgemeingültigen Beziehung  $y(t) = h(t) * x(t)$  und der formalen Integrationsvariablen  $\theta$  lässt sich hierfür auch schreiben:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) \cdot x(t + \tau - \theta) d\theta dt.$$

Durch Vertauschen der beiden Integrale und Hereinziehen der Grenzwertbildung erhält man:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) \cdot \left[ \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x(t) \cdot x(t + \tau - \theta) dt \right] d\theta.$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern ergibt den AKF-Wert am Eingang zum Zeitpunkt  $\tau - \theta$ :

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) \cdot \varphi_x(\tau - \theta) d\theta = h(\tau) * \varphi_x(\tau).$$

Das verbleibende Integral beschreibt aber die Faltungsoperation in ausführlicher Schreibweise.

Im Frequenzbereich lautet die entsprechende Gleichung:

$$\Phi_{xy}(f) = H(f) \cdot \Phi_x(f).$$

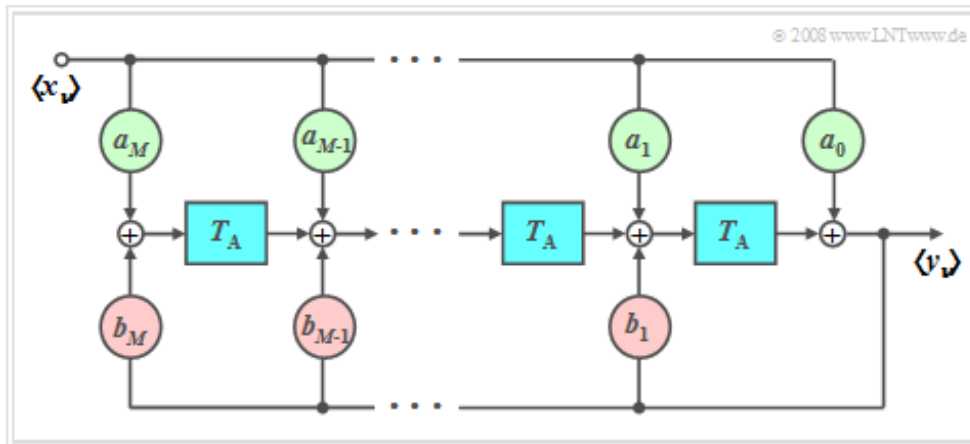
Die beiden Gleichungen zeigen, dass der Filterfrequenzgang  $H(f)$  aus einer Messung mit stochastischer Anregung vollständig – also sowohl der Betrag als auch die Phase – berechnet werden kann, wenn folgende Beschreibungsgrößen ermittelt werden:

- die statistischen Kenngrößen am Eingang, entweder die AKF  $\varphi_x(\tau)$  oder das LDS  $\Phi_x(f)$ ,
- sowie die Kreuzkorrelationsfunktion  $\varphi_{xy}(\tau)$  bzw. deren Fouriertransformierte  $\Phi_{xy}(f)$ .

## Allgemeines Blockschaltbild

Jedes Signal  $x(t)$  kann an einem Rechner nur durch die Folge  $\langle x_\nu \rangle$  seiner Abtastwerte dargestellt werden, wobei  $x_\nu$  für  $x(\nu \cdot T_A)$  steht. Der zeitliche Abstand  $T_A$  zwischen zwei Abtastwerten ist dabei durch das **Abtasttheorem** nach oben begrenzt.

Um den Einfluss eines linearen Filters mit dem Frequenzgang  $H(f)$  auf das zeitdiskrete Signal  $\langle x_\nu \rangle$  zu erfassen, bietet es sich an, auch das Filter zeitdiskret zu beschreiben. Nachfolgend sehen Sie das entsprechende Blockschaltbild.



Für die Abtastwerte des Ausgangssignals gilt somit:

$$y_\nu = \sum_{\mu=0}^M a_\mu \cdot x_{\nu-\mu} + \sum_{\mu=1}^M b_\mu \cdot y_{\nu-\mu}.$$

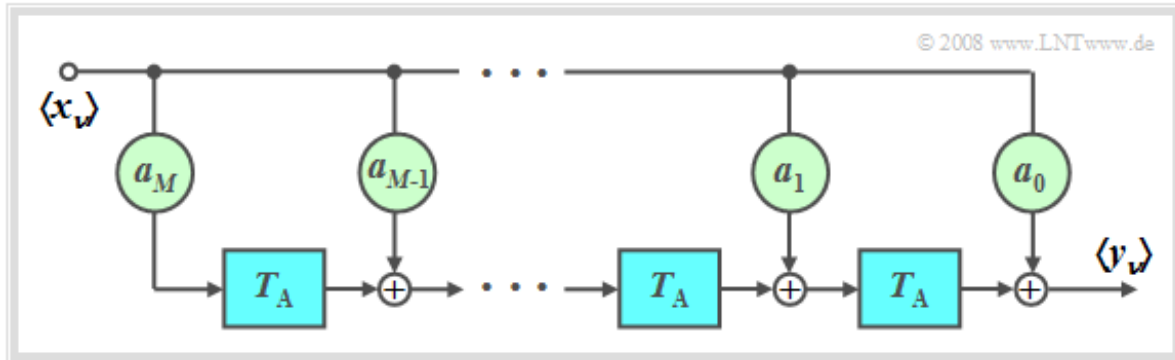
Hierzu ist folgendes zu bemerken:

- Die erste Summe beschreibt die Abhängigkeit des aktuellen Wertes  $y_\nu$  am Filterausgang vom aktuellen Eingangswert  $x_\nu$  und von den  $M$  vorherigen Eingangswerten  $x_{\nu-1}, \dots, x_{\nu-M}$ .
- Die zweite Summe kennzeichnet die Beeinflussung von  $y_\nu$  durch die vorherigen Werte  $y_{\nu-1}, \dots, y_{\nu-M}$  am Filterausgang. Sie gibt somit den rekursiven Teil des Filters an.
- Man bezeichnet den ganzzahligen Parameter  $M$  als die **Ordnung** des digitalen Filters.



## Nichtrekursive Filter

Sind alle Rückführungskoeffizienten  $b_\mu = 0$ , so spricht von einem **nichtrekursiven Filter**.



Ein solches nichtrekursives Filter  $M$ -ter Ordnung besitzt folgende Eigenschaften:

- Der Ausgangswert  $y_v$  hängt nur vom aktuellen und den  $M$  vorherigen Eingangswerten ab:

$$y_v = \sum_{\mu=0}^M a_\mu \cdot x_{\mu-v}.$$

- Die Filterimpulsantwort erhält man daraus mit  $x(t) = \delta(t)$ . In diskreter Schreibweise lautet das entsprechende Eingangssignal:  $x_v \equiv 0$  mit Ausnahme von  $x_0 = 1$ :

$$h(t) = \sum_{\mu=0}^M a_\mu \cdot \delta(t - \mu \cdot T_A).$$

- Durch Anwendung des Verschiebungssatzes folgt daraus für den Filterfrequenzgang:

$$H(f) = \sum_{\mu=0}^M a_\mu \cdot e^{-j2\pi f \mu T_A}.$$

**Beispiel:** Ein Zweigegekanal, bei dem

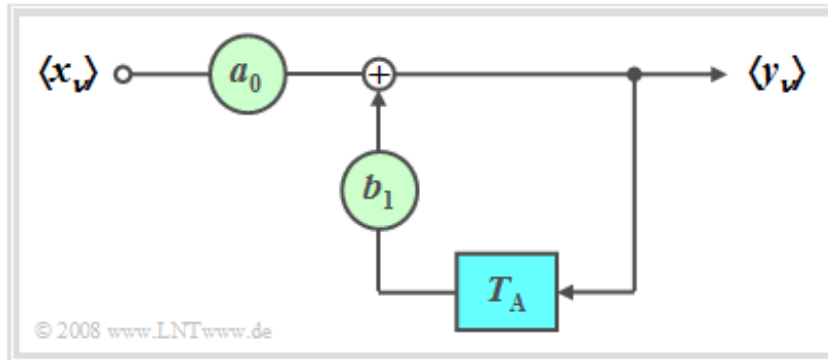
- das Signal auf dem Hauptpfad gegenüber dem Eingangssignal ungedämpft, aber um  $2 \mu\text{s}$  verzögert ankommt, und
- in  $4 \mu\text{s}$  Abstand – also absolut zur Zeit  $t = 6 \mu\text{s}$  – ein Echo mit halber Amplitude nachfolgt,

kann durch ein nichtrekursives Filter entsprechend obiger Skizze nachgebildet werden, wobei folgende Parameterwerte einzustellen sind:

$$M = 3, \quad T_A = 2 \mu\text{s}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0.5.$$

## Rekursive Filter

Sind alle Vorwärtskoeffizienten mit Ausnahme von  $a_0$  identisch 0, so liegt ein (rein) **rekursives Filter** vor. Im Folgenden beschränken wir uns auf den Sonderfall  $M = 1$ . Dann gilt folgendes Blockschaltbild:



Dieses Modell weist folgende Eigenschaften auf:

- Der Ausgangswert  $y_n$  hängt (indirekt) von unendlich vielen Eingangswerten ab, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$y_n = a_0 \cdot x_n + b_1 \cdot y_{n-1} = a_0 \cdot x_n + a_0 \cdot b_1 \cdot x_{n-1} + b_1^2 \cdot y_{n-2} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_0 \cdot b_1^{\mu} \cdot x_{n-\mu}.$$

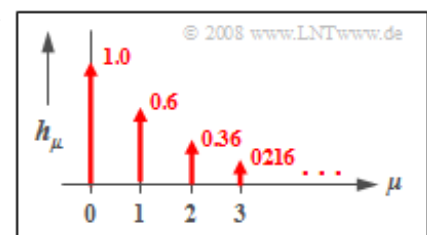
- Die zeitdiskrete Impulsantwort eines rekursiven Filters reicht bis ins Unendliche. Darunter versteht man die Ausgangsfolge, wenn bei  $t = 0$  am Eingang eine einzelne „Eins“ anliegt.
- Für  $M = 1$  lautet die zeitdiskrete Impulsantwort des rekursiven Filters:

$$h(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_0 \cdot b_1^{\mu} \cdot \delta(t - \mu \cdot T_A).$$

- Aus Stabilitätsgründen muss  $b_1 < 1$  gelten. Bei  $b_1 = 1$  würde sich die Impulsantwort  $h(t)$  bis ins Unendliche erstrecken und bei  $b_1 > 1$  würde  $h(t)$  sogar bis ins Unendliche anklagen.
- Bei einem solchen rekursiven Filter erster Ordnung ist jede einzelne Diraclinie genau um den Faktor  $b_1$  kleiner als die vorherige Diraclinie:

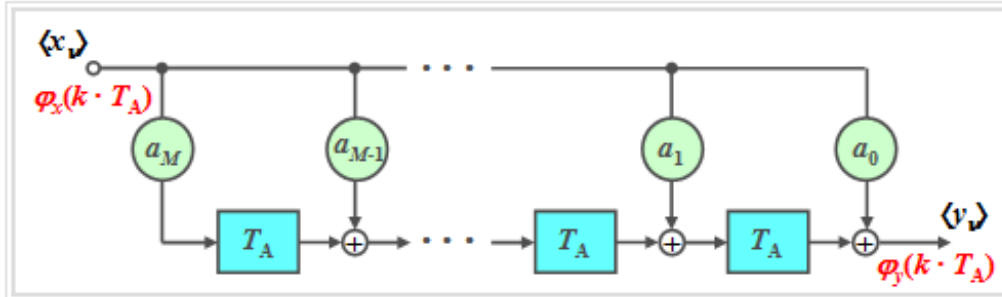
$$h_{\mu} = h(\mu \cdot T_A) = b_1 \cdot h_{\mu-1}.$$

Die nebenstehende Grafik zeigt die zeitdiskrete Impulsantwort  $\langle h_{\mu} \rangle$  eines rekursiven Filters erster Ordnung mit den Parametern  $a_0 = 1$  und  $b_1 = 0.6$ . Der Verlauf ist exponentiell abfallend und erstreckt sich bis ins Unendliche. Das Verhältnis der Gewichte zweier aufeinander folgender Diracs ist jeweils  $b_1 = 0.6$ .



## AKF am Ausgang eines nichtrekursiven Filters

Wir betrachten ein *nichtrekursives Laufzeitfilter M-ter Ordnung* gemäß der folgenden Grafik. Die zeitdiskrete Eingangsgröße  $\langle x_v \rangle$  ist mittelwertfrei ( $m_x = 0$ ), gaußverteilt (mit Streuung  $\sigma_x$ ) und statistisch unabhängig („Weißes Rauschen“).



- Somit gilt für die zeitdiskrete Autokorrelationsfunktion am Eingang:

$$\varphi_x(k \cdot T_A) = \begin{cases} \sigma_x^2 & \text{für } k = 0, \\ 0 & \text{für } k \neq 0. \end{cases}$$

- Die AKF der zeitdiskreten Ausgangsfolge  $\langle y_v \rangle$  lautet:

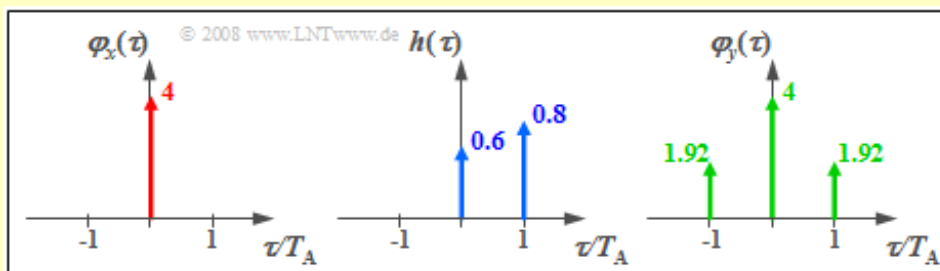
$$\varphi_y(k \cdot T_A) = \sigma_x^2 \cdot \sum_{\mu=0}^{M-k} a_\mu \cdot a_{\mu+k} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, M.$$

- Alle AKF-Werte mit  $k > M$  sind 0, und alle AKF-Werte mit  $k < M$  sind symmetrisch um 0:

$$\varphi_y(-k \cdot T_A) = \varphi_y(k \cdot T_A).$$

**Beispiel:** Liegt am Eingang eines nichtrekursiven Filters erster Ordnung (Filterkoeffizienten  $a_0 = 0.6$ ,  $a_1 = 0.8$ ) zeitdiskretes weißes Rauschen mit der Streuung  $\sigma_x = 2$  an, so lauten die diskreten AKF-Werte des Ausgangssignals (alle anderen AKF-Werte sind 0):

$$\varphi_y(0) = \sigma_x^2 \cdot (a_0^2 + a_1^2) = 4, \quad \varphi_y(-T_A) = \varphi_y(T_A) = \sigma_x^2 \cdot a_0 \cdot a_1 = 1.92.$$



Die Grafik kann wie folgt interpretiert werden:

- Wegen  $a_0^2 + a_1^2 = 1$  besitzt das Ausgangssignal  $y(t)$  genau die gleiche Varianz  $\sigma_y^2 = \varphi_y(0)$  wie das Eingangssignal:  $\sigma_x^2 = \varphi_x(0) = 4$ .
- Im Gegensatz zur Eingangsfolge  $\langle x_v \rangle$  gibt es bei der Folge  $\langle y_v \rangle$  am Filterausgang statistische Bindungen zwischen benachbarten Abtastwerten.

## Koeffizientenbestimmung (1)

Nun soll die Frage geklärt werden, wie die Koeffizienten  $a_0, \dots, a_M$  eines nichtrekursiven Filters  $M$ -ter Ordnung ermittelt werden können, wenn die gewünschten AKF-Werte  $\varphi_y(0), \dots, \varphi_y(M \cdot T_A)$  gegeben sind. Außerhalb des Bereiches  $-M \cdot T_A \dots M \cdot T_A$  sollen alle AKF-Werte gleich 0 sein.

Für  $\sigma_x = 1$  ergibt sich das folgende *nichtlineare Gleichungssystem*, wobei zur Vereinfachung der Schreibweise  $\varphi_k = \varphi_y(k \cdot T_A)$  verwendet wird:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \sum_{\mu=0}^M a_{\mu}^2, \\ \varphi_1 &= \sum_{\mu=0}^{M-1} a_{\mu} \cdot a_{\mu+1}, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \varphi_{M-1} &= a_0 \cdot a_{M-1} + a_1 \cdot a_M, \\ \varphi_M &= a_0 \cdot a_M.\end{aligned}$$

Man erhält somit für die  $M + 1$  Koeffizienten auch  $M + 1$  unabhängige Gleichungen. Durch sukzessives Eliminieren der Koeffizienten  $a_1, \dots, a_M$  bleibt für  $a_0$  eine nichtlineare Gleichung höherer Ordnung übrig.

**Beispiel:** Wir betrachten folgende Konstellation:

- ein rekursives Filter erster Ordnung  $\Rightarrow M = 1$ ,
- eine zeitdiskrete Eingangsfolge  $\langle x_v \rangle$  mit Mittelwert  $m_x = 0$  und Streuung  $\sigma_x = 1$ ,
- gewünschte AKF-Werte der Folge  $\langle y_v \rangle$ :  $\varphi_y(0) = \varphi_0 = 0.58$  und  $\varphi_y(\pm T_A) = \varphi_1 = 0.21$ .

Damit lautet das obige Gleichungssystem:

$$\varphi_0 = a_0^2 + a_1^2 = 0.58,$$

$$\varphi_1 = a_0 \cdot a_1 = 0.21.$$

Dies führt zu einer Gleichung vom Grad 4, nämlich

$$a_0^2 + (0.21/a_0)^2 = 0.58 \quad \Rightarrow \quad a_0^4 - 0.58 \cdot a_0^2 + 0.21^2 = 0.$$

Eine Lösung stellt  $a_0 = 0.7$  dar. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung findet man  $a_1 = 0.3$ .

Man erkennt aus diesem Beispiel, dass sich schon im einfachsten Fall  $\Rightarrow M = 1$  eine nichtlineare Bestimmungsgleichung für  $a_0$  vom Grad 4 ergibt.

## Koeffizientenbestimmung (2)

Wie das letzte Beispiel gezeigt hat, ist mit  $M = 1$  die Bestimmungsgleichung für  $a_0$  vom Grad 4. Dies bedeutet gleichzeitig, dass es auch vier Koeffizientensätze gibt, die alle zur gleichen AKF führen. Dies ist aus folgenden Gründen einsichtig:

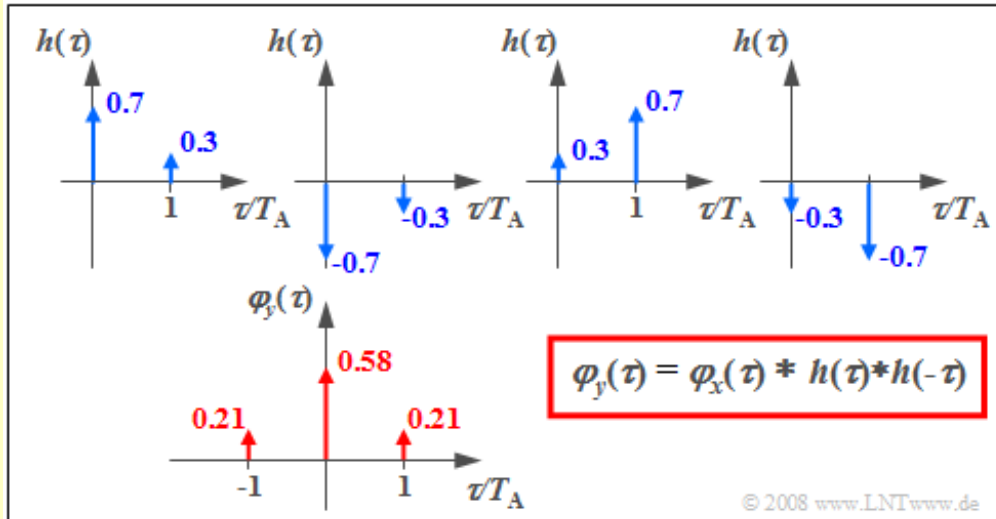
- Die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$  können gleichzeitig ihr Vorzeichen ändern, ohne dass dadurch das Gleichungssystem verändert wird.
- Ersetzt man  $a_0$  durch  $a_1$  und umgekehrt, so ergibt sich die gleiche Bestimmungsgleichung. Diese Operation entspricht einer Spiegelung und Verschiebung der Impulsantwort.

**Beispiel:** Wie auf der letzten Seite gezeigt wurde, ist der Parametersatz  $a_0 = 0.7, a_1 = 0.3$  geeignet, die AKF-Werte  $\varphi_0 = 0.58$  und  $\varphi_1 = 0.21$  zu generieren. Zur gleichen AKF kommt man auch mit den Koeffizientenpaaren

$$\begin{aligned} a_0 &= -0.7, & a_1 &= -0.3, \\ a_0 &= 0.3, & a_1 &= 0.7, \\ a_0 &= -0.3, & a_1 &= -0.7. \end{aligned}$$

Das folgende Bild zeigt die entsprechenden Impulsantworten, die zur gewünschten AKF führen:

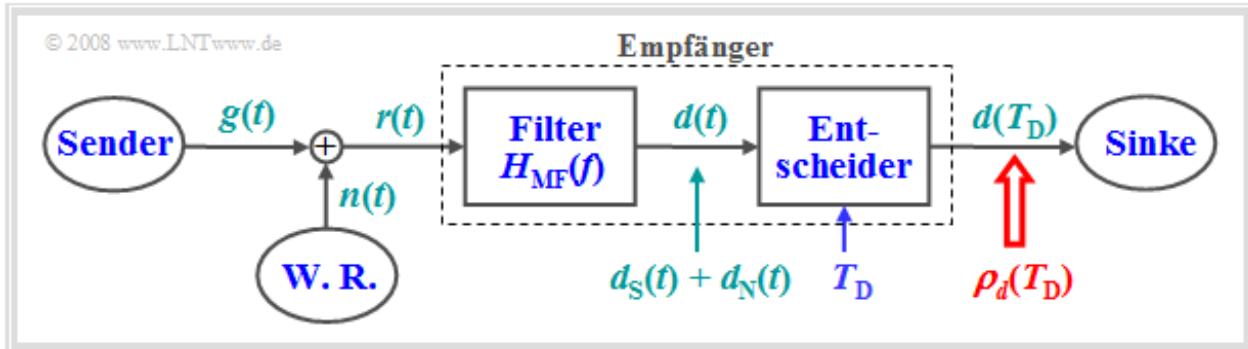
$$\varphi_y(\tau) = 0.58 \cdot \delta(\tau) + 0.21 \cdot \delta(\tau - T_A) + 0.21 \cdot \delta(\tau + T_A).$$



Diese Konfigurationen ergeben sich durch gleichzeitiges Multiplizieren aller Koeffizienten mit  $-1$  sowie durch Vertauschen der Zahlenwerte von  $a_0$  und  $a_1$ .

## Optimierungskriterium des Matched-Filters

Das **Matched-Filter** – auch Korrelationsfilter genannt – dient zum Nachweis der Signalexistenz. Es kann mit größtmöglicher Sicherheit – anders ausgedrückt: mit maximalem SNR – entscheiden, ob ein durch additives Rauschen  $n(t)$  gestörtes impulsförmiges Nutzsignal  $g(t)$  vorhanden ist oder nicht. Zur Herleitung des Matched-Filters wird folgende Anordnung betrachtet.



Für die einzelnen Komponenten gelten folgende Voraussetzungen:

- Der Nutzanteil  $g(t)$  des Empfangssignals  $r(t)$  sei impulsförmig und somit *energiebegrenzt*. Das heißt: Das Integral über  $g^2(t)$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  liefert den endlichen Wert  $E_g$ .
- Das Störsignal  $n(t)$  sei *Weißes Gaußsches Rauschen* mit der Rauschleistungsdichte  $N_0$ .
- Das Filterausgangssignal  $d(t)$  setzt sich additiv aus zwei Anteilen zusammen. Der Anteil  $d_S(t)$  geht auf das „Signal“  $g(t)$  zurück und der Anteil  $d_N(t)$  auf das „Noise“  $n(t)$ .
- Der Empfänger, bestehend aus linearem Filter  $\Rightarrow$  Frequenzgang  $H_{MF}(f)$  und Entscheider, ist so zu dimensionieren, dass das **momentane S/N-Verhältnis** am Ausgang maximal wird:

$$\rho_d(T_D) = \frac{d_S^2(T_D)}{\sigma_d^2} \stackrel{!}{=} \text{Maximum.}$$

Hierbei bezeichnen  $\sigma_d^2$  die *Varianz* (Leistung) von  $d_N(t)$  und  $T_D$  den *Detektionszeitpunkt*.

## Matched-Filter-Optimierung (1)

Gegeben sei ein energiebegrenztetes Nutzsinal  $g(t)$  mit dem zugehörigen Spektrum  $G(f)$ . Damit kann das Filterausgangssignal zum Detektionszeitpunkt  $T_D$  für jedes beliebige Filter mit der Impulsantwort  $h(t)$  und dem Frequenzgang  $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$  wie folgt geschrieben werden (ohne Berücksichtigung des Rauschens  $\Rightarrow$  Index S für „Signal“):

$$d_S(T_D) = g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f T_D} df.$$

Der „Rauschanteil“  $d_N(t)$  des Filterausgangssignals rührt allein vom Weißen Rauschen  $n(t)$  am Eingang des Empfängers her. Für seine Varianz (Leistung) gilt unabhängig von  $T_D$ :

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df.$$

Damit lautet das hier vorliegende **Optimierungsproblem**:

$$\rho_d(T_D) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f T_D} df \right|^2}{N_0/2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} \stackrel{!}{=} \text{Maximum.}$$

Man kann zeigen, dass der Quotient für den folgenden Frequenzgang am größten wird:

$$H(f) = H_{MF}(f) = K_{MF} \cdot G^*(f) \cdot e^{-j2\pi f T_D}.$$

Damit erhält man für das **Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis** am Matched-Filter-Ausgang:

$$\rho_d(T_D) = 2 \cdot E_g / N_0,$$

und zwar unabhängig von der dimensionsbehafteten Konstante  $K_{MF}$ . Zur Erklärung:

- $E_g$  bezeichnet die Energie des Eingangsimpulses, die man nach dem Satz von **Satz von Parseval** sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich berechnen kann:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df.$$

**Beispiel:** Ein rechteckförmiger Impuls  $g(t)$  mit der Amplitude 1V und der Dauer 0.5ms und unbekannter Lage soll in einer verrauschten Umgebung aufgefunden werden. Somit ist die Impulsenergie  $E_g = 5 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2\text{s}$ . Die Rauschleistungsdichte sei  $N_0 = 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}$ .

Das beste Ergebnis  $\Rightarrow$  **maximale S/N-Verhältnis** erzielt man mit dem Matched-Filter:

$$\rho_d(T_D) = \frac{2 \cdot E_g}{N_0} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2\text{s}}{10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}} = 1000 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_d(T_D) = 30 \text{ dB.}$$

Die Matched-Filter-Optimierung wird auf der nächsten Seite hergeleitet. Wenn Sie daran nicht interessiert sind, fahren Sie bitte mit der Seite **Interpretation des Matched-Filters** fort.

## Matched-Filter-Optimierung (2)

Das auf der letzten Seite angegebene Matched-Filter-Kriterium wird nun schrittweise hergeleitet. Wenn Sie daran nicht interessiert sind, so springen Sie bitte zur Fortsetzungsseite **Interpretation des Matched-Filters**.

**Herleitung des Matched-Filter-Kriteriums:** Die Schwarzsche Ungleichung lautet mit den beiden (im allgemeinen komplexen) Funktionen  $A(f)$  und  $B(f)$ :

$$\left| \int_a^b A(f) \cdot B(f) \, df \right|^2 \leq \int_a^b |A(f)|^2 \, df \cdot \int_a^b |B(f)|^2 \, df.$$

Wir wenden nun diese Gleichung auf das Signal-zu-Rauschverhältnis an:

$$\rho_d(T_D) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot H(f) \cdot e^{j2\pi f T_D} \, df \right|^2}{N_0/2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \, df}.$$

Mit  $A(f) = G(f)$  und  $B(f) = H(f) \cdot \exp(j2\pi f T_D)$  ergibt sich somit die folgende Schranke:

$$\rho_d(T_D) \leq \frac{1}{N_0/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \, df.$$

Setzt man für den Filterfrequenzgang versuchsweise

$$H(f) = H_{MF}(f) = K_{MF} \cdot G^*(f) \cdot e^{-j2\pi f T_D}$$

ein, so erhält man aus der obigen Gleichung:

$$\rho_d(T_D) = \frac{\left| K_{MF} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \, df \right|^2}{N_0/2 \cdot K_{MF}^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \, df} = \frac{1}{N_0/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \, df.$$

Das heißt: Mit diesem Ansatz für das Matched-Filter  $H_{MF}(f)$  wird in obiger Abschätzung tatsächlich der maximal mögliche Wert erreicht. Mit keinem anderen Filter  $H(f) \neq H_{MF}(f)$  kann man ein höheres Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis erzielen  $\Rightarrow$  Das Matched-Filter ist in Bezug auf das ihm zugrunde gelegte Maximierungskriterium optimal.

q.e.d.



## Interpretation des Matched-Filters

Auf der letzten Seite wurde der Frequenzgang des Matched-Filters wie folgt abgeleitet:

$$H_{\text{MF}}(f) = K_{\text{MF}} \cdot G^*(f) \cdot e^{-j2\pi f T_D}$$

Durch **Fourierrücktransformation** erhält man die dazugehörige Impulsantwort:

$$h_{\text{MF}}(t) = K_{\text{MF}} \cdot g(T_D - t)$$

Diese beiden Funktionen lassen sich wie folgt interpretieren:

- Das **Matched-Filter** ist durch den Term  $G^*(f)$  an das Spektrum des aufzufindenden Impulses  $g(t)$  angepasst – daher sein Name (englisch: *to match*  $\equiv$  anpassen).
- Die **Konstante**  $K_{\text{MF}}$  ist aus Dimensionsgründen notwendig. Ist  $g(t)$  ein Spannungsimpuls, so hat diese Konstante die Einheit „Hz/V“. Der Frequenzgang ist somit dimensionslos.
- Die **Impulsantwort**  $h_{\text{MF}}(t)$  ergibt sich aus dem Nutzsignal  $g(t)$  durch Spiegelung  $\Rightarrow$  aus  $g(t)$  wird  $g(-t)$  – sowie einer Verschiebung um  $T_D$  nach rechts.
- Der früheste **Detektionszeitpunkt**  $T_D$  folgt für realisierbare Systeme aus der Bedingung  $h_{\text{MF}}(t < 0) \equiv 0 \Rightarrow$  „Kausalität“ (siehe Buch *Lineare zeitinvariante Systeme*).
- Für den Nutzanteil des Filterausgangssignals gilt:

$$d_S(t) = g(t) * h_{\text{MF}}(t) = K_{\text{MF}} \cdot g(t) * g(T_D - t) = K_{\text{MF}} \cdot \varphi_g^*(t - T_D)$$

Das bedeutet: Das Ausgangssignal ist formgleich mit der **Energie-AKF** (in diesem Tutorial durch einen Punkt gekennzeichnet) und gegenüber dieser um  $T_D$  verschoben.

*Anmerkung:* Bei einem energiebegrenzten Signal  $g(t)$  kann man nur die *Energie-AKF* angeben:

$$\varphi_g^*(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot g(t + \tau) dt$$

Gegenüber der AKF-Definition eines leistungsbegrenzten Signals  $x(t)$ , nämlich

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt,$$

wird bei der Berechnung der Energie-AKF auf die Division durch die Messdauer  $T_M$  sowie auf den Grenzübergang  $T_M \rightarrow \infty$  verzichtet.

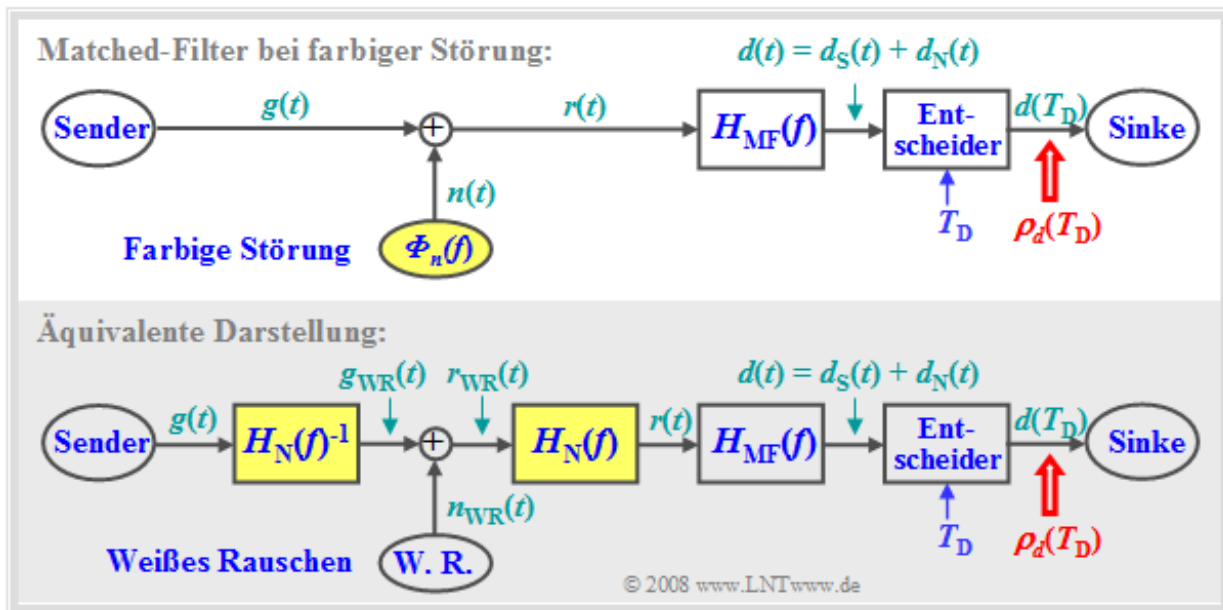
**Beispiel:** Wir gehen davon aus, dass gemäß dem **letzten Beispiel** der Rechteckimpuls zwischen 2ms und 2.5ms liegt und der Detektionszeitpunkt  $T_D = 4$  ms gewünscht wird. Dann gilt:

- Die Matched-Filter-Impulsantwort  $h_{\text{MF}}(t)$  muss im Bereich von  $t_1 (= 4 - 2.5) = 1.5$ ms bis  $t_2 (= 4 - 2) = 2$ ms konstant sein. Für  $t < t_1$  sowie für  $t > t_2$  darf sie keine Anteile besitzen.
- Der Betragsfrequenzgang  $|H_{\text{MF}}(f)|$  ist hier si-förmig. Die Höhe der Impulsantwort  $h_{\text{MF}}(t)$  spielt für das S/N-Verhältnis keine Rolle, da dieses unabhängig von  $K_{\text{MF}}$  ist.

## Matched-Filter bei farbigen Störungen (1)

Bei den Herleitungen dieses Abschnittes wurde bisher stets von Weißem Rauschen ausgegangen. Nun soll die Frage geklärt werden, wie das **Empfangsfilter**  $H(f) = H_{MF}(f)$  **bei farbiger Störung**  $n(t)$  zu gestalten ist, damit das Signal–zu–Rauschleistungsverhältnis maximal wird.

*Hinweis:* Der Begriff „Störung“ ist etwas allgemeiner als „Rauschen“. Vielmehr ist Rauschen eine Teilmenge aller Störungen, zu denen z. B. auch das Nebensprechen von benachbarten Leitungen zählt. Wir sprechen nur dann von (weißem) Rauschen  $n(t)$ , wenn das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_n(f)$  für alle Frequenzen gleich ist. Ist dies nicht erfüllt, so bezeichnen wir  $n(t)$  als farbige Störung.



Zu dem hier betrachteten Modell ist zu bemerken:

- Die obere Grafik zeigt das Blockschaltbild zur Herleitung des Matched–Filters  $H_{MF}(f)$  bei farbiger Störung  $n(t)$ , gekennzeichnet durch das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_n(f) \neq \text{const}$ . Alle bisher für diesen Abschnitt genannten Voraussetzungen gelten weiterhin.
- Das farbige Störsignal  $n(t)$  mit dem Leistungsdichtespektrum  $\Phi_n(f)$  kann man – zumindest gedanklich – durch eine „weiße“ Rauschquelle  $n_{WR}(t)$  mit der konstanten (zweiseitigen) Rauschleistungsdichte  $N_0/2$  und ein Formfilter mit dem Frequenzgang  $H_N(f)$  modellieren:

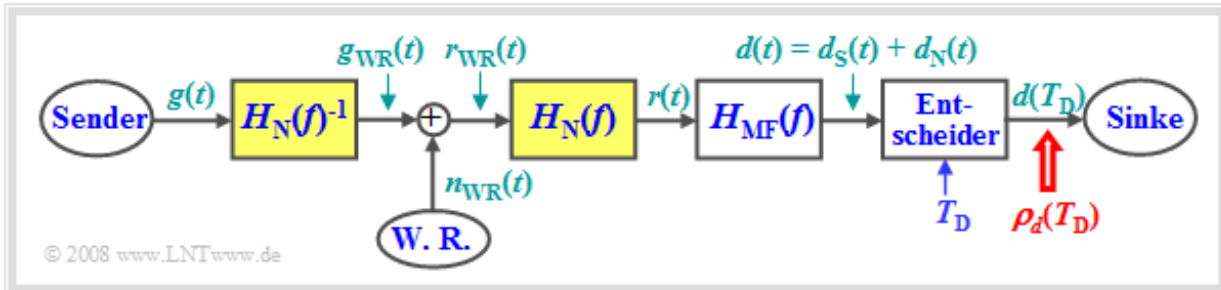
$$\Phi_n(f) = N_0/2 \cdot |H_N(f)|^2.$$

- Diese Modifikation ist in der unteren Grafik berücksichtigt. Da Realisierungsaspekte hier nicht betrachtet werden, wird  $H_N(f)$  vereinfacht als reell angenommen. Der Phasengang von  $H_N(f)$  spielt für das Folgende keine Rolle.
- In der unteren Darstellung ist das Formfilter  $H_N(f)$  auf die rechte Seite der Störaddition verschoben. Um ein auch bezüglich des Nutzsignals  $d_S(t)$  äquivalentes Modell zu erhalten, wird das Formfilter im Nutzsignalzweig durch das inverse Filter  $H_N(f)^{-1}$  kompensiert.

Die Beschreibung wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.

## Matched-Filter bei farbigen Störungen (2)

Anhand dieses modifizierten Modells wird nun das verallgemeinerte Matched-Filter für den Fall farbiger Störungen hergeleitet. Besitzt  $H_N(f)$  keine Nullstelle, was für das Folgende vorausgesetzt werden soll, so ist diese Anordnungen mit dem **Blockschaltbild** (obere Grafik auf der letzten Seite) identisch.



An der Störadditionsstelle liegt nun weißes Rauschen  $n_{WR}(t)$  an. Die Herleitung der **Matched-Filter-Optimierung** bei weißem Rauschen lässt sich 1 zu 1 auf das aktuelle Problem anpassen, wenn man Folgendes berücksichtigt:

- Anstelle des tatsächlichen Sendesignals  $g(t)$  ist das Signal  $g_{WR}(t)$  vor der Störaddition zu berücksichtigen. Die dazugehörige Spektralfunktion lautet:  $G_{WR}(f) = G(f)/H_N(f)$ .
- Anstelle von  $H_{MF}(f)$  ist nun der resultierende Frequenzgang  $H_{MF}'(f) = H_N(f) \cdot H_{MF}$  rechts von der Störadditionsstelle einzusetzen.

Damit ergibt sich für das **Matched-Filter bei farbigen Störungen**:

$$H_{MF}'(f) = H_N(f) \cdot H_{MF}(f) = K_{MF} \cdot G_{WR}^*(f) \cdot e^{-j2\pi f T_D}$$

$$\Rightarrow H_{MF}(f) = K_{MF} \cdot \frac{G^*(f)}{|H_N(f)|^2} \cdot e^{-j2\pi f T_D}$$

Das **Signal-zu-Störleistungsverhältnis** vor dem Entscheider ist somit maximal:

$$\rho_{d,\max}(T_D) = \frac{1}{N_0/2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_{WR}(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|G(f)|^2}{\Phi_n(f)} df$$

Der Fall „Weißes Rauschen“ ist in dieser allgemeineren Gleichung für  $\Phi_n(f) = N_0/2$  mitenthalten.

*Hinweis:* Alle auf dieser Seite angegebenen Gleichungen führen bei farbiger Störung allerdings nur dann zu sinnvollen, auch in der Praxis verwertbaren Ergebnissen, wenn das Energiespektrum  $|G(f)|^2$  des Nutzsignals asymptotisch schneller abklingt als das Störleistungsdichtespektrum  $\Phi_n(f)$ .

## Optimierungskriterium des Wiener-Kolmogorow-Filter

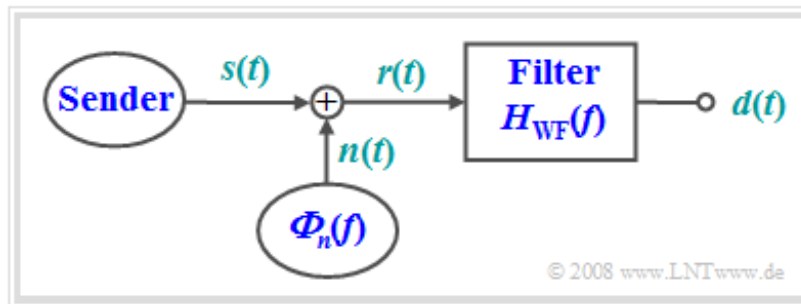
Als weiteres Beispiel zur Optimalfilterung betrachten wir nun die Aufgabenstellung, die Form eines Nutzsignals  $s(t)$  aus dem durch additives Rauschen  $n(t)$  gestörten Empfangssignals  $r(t)$  im Sinne des **mittleren quadratischen Fehlers** (MQF) möglichst gut zu rekonstruieren:

$$\text{MQF} = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} |d(t) - s(t)|^2 dt \stackrel{!}{=} \text{Minimum.}$$

Das entsprechende Filter ist nach seinen Erfindern **Norbert Wiener** und **Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow** benannt. Den entsprechenden Frequenzgang bezeichnen wir mit  $H_{WF}(f)$ .

Für diese Optimierungsaufgabe gelten folgende Voraussetzungen:

- Das zu rekonstruierende Signal  $s(t)$  ist das Ergebnis eines Zufallsprozesses  $\{s(t)\}$ , von dem nur die statistischen Eigenschaften in Form des Leistungsdichtespektrums  $\Phi_s(f)$  bekannt ist.
- Das Störsignal  $n(t)$  ist durch das LDS  $\Phi_n(f)$  gegeben. Korrelationen zwischen dem Nutz- und dem Störsignal berücksichtigen die Kreuzkorrelationsdichtespektren  $\Phi_{sn}(f) = -\Phi_{ns}^*(f)$ .
- Das Ausgangssignal des gesuchten Filters ist mit  $d(t)$  bezeichnet, das sich entsprechend des MQF möglichst wenig von  $s(t)$  unterscheiden soll.  $T_M$  bezeichnet wiederum die Messdauer.



Das Signal  $s(t)$  sei mittelwertfrei ( $m_s = 0$ ) und leistungsbegrenzt. Das bedeutet: Die Signalenergie  $E_s$  ist aufgrund der unendlichen Ausdehnung des Signals  $s(t)$  unendlich und die Signalleistung besitzt einen endlichen Wert:

$$P_s = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} s(t)^2 dt > 0.$$

Ein grundsätzlicher Unterschied zur Aufgabenstellung beim Matched-Filter ist das stochastische und leistungsbegrenzte Nutzsignal  $s(t)$ . Erinnern wir uns: Beim Matched-Filter war das zu rekonstruierende Signal  $g(t)$  deterministisch, zeitlich begrenzt und damit auch energiebegrenzt.

## Ergebnis der Filteroptimierung

**A. Kolmogorow** und **N. Wiener** haben dieses Optimierungsproblem nahezu zur gleichen Zeit unabhängig voneinander gelöst. Die Übertragungsfunktion des optimalen Filters kann über die so genannte *Wiener-Hopfsche Integralgleichung* ermittelt werden, und lautet:

$$H_{WF}(f) = \frac{\Phi_s(f) + \Phi_{ns}(f)}{\Phi_s(f) + \Phi_{sn}(f) + \Phi_{ns}(f) + \Phi_n(f)}.$$

Der Index „WF“ steht für Wiener-Filter und lässt leider die Verdienste von Kolmogorow nicht erkennen. Auf die exakte, mathematische Ableitung der Gleichung wird hier verzichtet. Vielmehr soll diese im Folgenden an einigen Sonderfällen verdeutlicht und interpretiert werden.

- Sind Signal und Störung unkorreliert  $\Rightarrow \Phi_{sn}(f) = \Phi_{ns}(f) = 0$ , so vereinfacht sich die obige Gleichung wie folgt:

$$H_{WF}(f) = \frac{\Phi_s(f)}{\Phi_s(f) + \Phi_n(f)} = \frac{1}{1 + \Phi_n(f)/\Phi_s(f)}.$$

- Das Filter wirkt dann wie ein frequenzabhängiger Teiler, wobei das Teilverhältnis durch die Leistungsdichtespektren von Nutzsignal und Störsignal bestimmt wird.
- Der „Durchlassbereich“ liegt vorwiegend bei den Frequenzen, bei denen das Nutzsignal sehr viel größere Anteile besitzt als die Störung:  $\Phi_s(f) \gg \Phi_n(f)$ .
- Der mittlere quadratische Fehler (MQF) zwischen dem Filterausgangssignal  $d(t)$  und dem zu approximierenden Eingangssignal  $s(t)$  ist

$$\text{MQF} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_s(f) \cdot \Phi_n(f)}{\Phi_s(f) + \Phi_n(f)} df = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{WF}(f) \cdot \Phi_n(f) df.$$

Die Ableitung dieser Ergebnisse ist durchaus nicht trivial und zum Beispiel in **[Hän97]** zu finden. Auf den beiden nächsten Seiten wird das Wiener-Kolmogorow-Filter anhand zweier Beispiele verdeutlicht.

## Interpretation des Wiener-Filters (1)

**Beispiel 1:** Zur Verdeutlichung des Wiener-Filters betrachten wir zunächst als Grenzfall ein Sendesignal  $s(t)$  mit dem LDS  $\Phi_s(f) = P_s \cdot \delta(f \pm f_s)$ .

- Damit ist bekannt, dass  $s(t)$  eine harmonische Schwingung mit der Frequenz  $f_s$  ist.
- Unbekannt sind dagegen Amplitude und Phase der aktuellen Musterfunktion  $s(t)$ .

Bei weißem Rauschen  $\Rightarrow \Phi_n(f) = N_0/2$  – lautet somit der Frequenzgang des Wiener-Filters:

$$H_{WF}(f) = \frac{1}{1 + (N_0/2)/(P_s \cdot \delta(f \pm f_s))}$$

- Bei allen Frequenzen mit Ausnahme von  $f = \pm f_s$  ergibt sich  $H_{WF}(f) = 0$ , da hier der Nenner unendlich groß wird.
- Berücksichtigt man weiter, dass  $\delta(f = \pm f_s)$  an der Stelle  $f = \pm f_s$  unendlich groß ist, so erhält man weiter  $H_{MF}(f = \pm f_s) = 1$ .
- Das optimale Filter ist somit ein Bandpass um  $f_s$  mit unendlich kleiner Bandbreite. Der mittlere quadratische Fehler zwischen dem Sendesignal  $s(t)$  und dem Filterausgangssignal  $d(t)$  beträgt

$$\text{MQF} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{WF}(f) \cdot \Phi_n(f) df = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{f_s - \varepsilon}^{f_s + \varepsilon} N_0 df = 0.$$

- Dieses unendlich schmale Bandpass-Filter würde bei den getroffenen Voraussetzungen die vollständige Regenerierung der Harmonischen hinsichtlich Amplitude und Phase erlauben. Unabhängig von der Größe der Störung ( $N_0$ ) würde somit  $d(t) = s(t)$  gelten.
- Allerdings ist ein unendlich schmales Filter nicht realisierbar. Bei endlicher Bandbreite  $\Delta f$  ist der mittlere quadratische Fehler (MQF) gleich  $N_0 \cdot \Delta f$ .

Dieses Beispiel hat einen Sonderfall behandelt, bei dem das bestmögliche Ergebnis  $\text{MQF} = 0$  zumindest theoretisch möglich ist. Das folgende Beispiel geht von realistischeren Annahmen aus und liefert das Ergebnis  $\text{MQF} > 0$ .

## Interpretation des Wiener-Filters (2)

**Beispiel 2:** Nun betrachten wir ein *stochastisches rechteckförmiges Binärsignal*  $s(t)$ , das durch weißes Rauschen  $n(t)$  additiv überlagert ist. Die Grafik enthält folgende Diagramme:

- Oben ist in grauer Farbe das Summensignal  $r(t) = s(t) + n(t)$  für  $\Phi_0/N_0 = 5$  dargestellt, wobei  $\Phi_0$  gleich der Energie eines Einzelimpulses ist und  $N_0$  die Rauschleistungsdichte des weißen Rauschens angibt.
- In Bildmitte sind die Leistungsdichtespektren  $\Phi_s(f)$  und  $\Phi_n(f)$  in blauer bzw. roter Farbe skizziert und formelmäßig angegeben. Grün gezeichnet ist der Frequenzgang  $H_{WF}(f)$ .
- Das untere Bild zeigt als grauen Kurvenzug das Ausgangssignal  $d(t)$  des Wiener-Filters im Vergleich zum blau gezeichneten Signal  $s(t)$ . Im Idealfall sollte  $d(t) = s(t)$  gelten.

Die untere Darstellung zeigt:

1. Der mittlere quadratische Fehler (MQF) zwischen den Signalen  $d(t)$  und  $s(t)$  beträgt hier etwa 11% der Nutzleistung  $P_s$ .
2. Im Signal  $d(t)$  fehlen vorwiegend die höherfrequenten Signalanteile (also die Sprünge).
3. Diese Anteile werden zugunsten einer besseren Störunterdrückung bei diesen Frequenzen ausgefiltert.

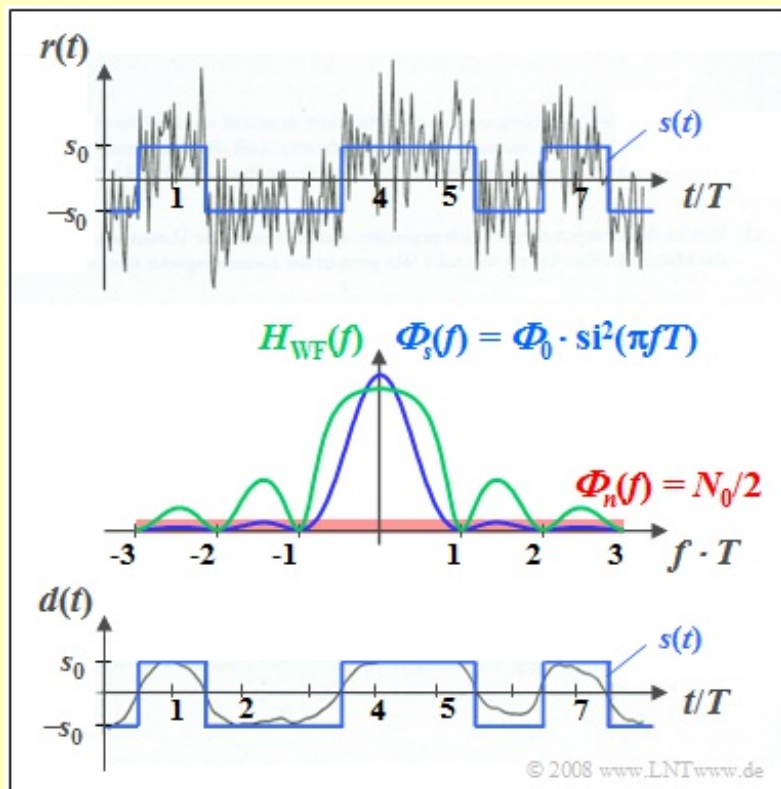
Mit keinem anderen Filter ergibt sich bei diesen Voraussetzungen ein kleinerer (mittlerer quadratischer) Fehler als mit dem Wiener-Filter.

Dessen Frequenzgang lautet hier:

$$H_{WF}(f) = \frac{1}{1 + (N_0/2)/(\Phi_0 \cdot \text{si}^2(\pi f T))}$$

Man erkennt aus dem mittleren Diagramm:

- Der Gleichsignalübertragungsfaktor ergibt sich zu  $H_{WF}(f=0) = \Phi_0/(\Phi_0 + N_0/2) = 10/11$ .
- Bei Vielfachen der Symbolfolgefrequenz  $1/T$ , bei denen das stochastische Binärsignal  $s(t)$  keine Spektralanteile besitzt, ist auch  $H_{WF}(f) = 0$ .
- Je mehr Nutzsignalanteile bei einer bestimmten Frequenz vorhanden sind, desto durchlässiger ist bei dieser Frequenz auch das Wiener-Filter.



© 2008 www.LNTwww.de