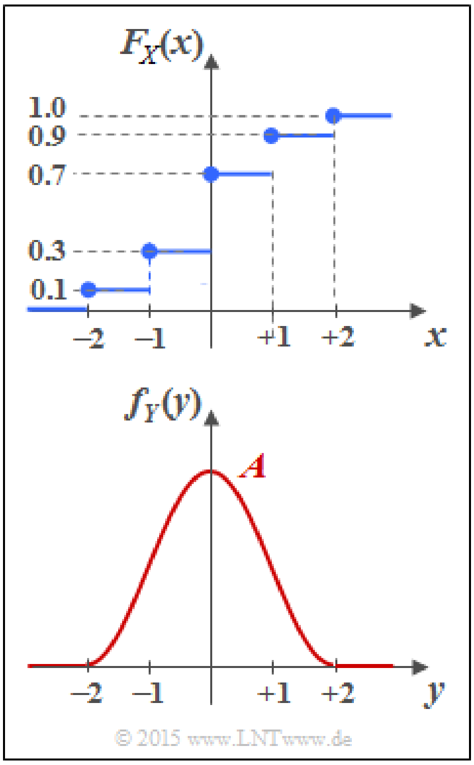
A4.1: WDF, VTF und Wahrscheinlichkeit



Zur Wiederholung einiger wichtiger Grundlagen aus dem Buch **Stochastische Signaltheorie** beschäftigen wir uns mit

- der **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** (WDF),
- der **Verteilungsfunktion** (VTF).

Die obere Darstellung zeigt die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ einer wertdiskreten Zufallsgröße X. Die zugehörige WDF $f_X(x)$ ist in der Teilaufgabe (a) zu bestimmen. Die Gleichung

$$\Pr(A < X \le B) = F_X(B) - F_X(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{A+\varepsilon}^{B+\varepsilon} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

stellt zwei Möglichkeiten dar, um die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Die Zufallsgröße X liegt in einem Intervall" aus der VTF bzw. der WDF zu berechnen.

Die untere Grafik zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 \cdot \cos^2(\pi/4 \cdot y) & \text{für } |y| \le 2, \\ 0 & \text{für } y < -2 \text{ und } y > +2 \end{cases}$$

einer wertkontinuierlichen Zufallsgröße Y, die auf den Bereich $|Y| \le 2$ begrenzt ist.

Prinzipiell besteht bei der kontinuierlichen Zufallsgröße Y der gleiche Zusammenhang zwischen WDF, VTF und Wahrscheinlichkeiten wie bei einer diskreten Zufallsgröße. Sie werden trotzdem einige Detailunterschiede feststellen. Beispielsweise kann bei der kontinuierlichen Zufallsgröße Y in obiger Gleichung auf den Grenzübergang verzichtet werden, und man erhält vereinfacht:

$$\Pr(A \le Y \le B) = F_Y(B) - F_Y(A) = \int_A^B f_Y(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Hinweis: Die Aufgabe dient zur Vorbereitung der in **Kapitel 4.1** dargelegten Thematik. Nützliche Hinweise zur Lösung dieser Aufgabe und weitere Informationen zu den wertkontinuierlichen Zufallsgrößen finden Sie im **Kapitel 3** des Buches „Stochastische Signaltheorie".

Gegeben ist zudem das folgende unbstimmte Integral:

$$\int \cos^2(A\eta)\,\mathrm{d}\eta = \frac{\eta}{2} + \frac{1}{4A} \cdot \sin(2A\eta).$$

Fragebogen zu "A4.1: WDF, VTF und Wahrscheinlichkeit"

a) Bestimmen Sie die WDF $f_X(x)$ der wertdiskreten Zufallsgröße X. Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ Die WDF setzt sich aus fünf Diracfunktionen zusammen.
- ☐ Es gilt $\Pr(X = 0) = 0.4$ und $\Pr(X = 1) = 0.2$.
- ☐ Es gilt $\Pr(X = 2) = 0.4$.

b) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$\mathbf{Pr}(X > 0)$ =

$\mathbf{Pr}(|X| \le 1)$ =

c) Welche Werte ergeben sich für die Verteilungsfunktion $F_Y(y) = \Pr(Y \le y)$ der wertkontinuierlichen Zufallsgröße Y, insbesondere:

$F_Y(y = 0)$ =

$F_Y(y = 1)$ =

$F_Y(y = 2)$ =

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $Y = 0$ ist?

$\mathbf{Pr}(Y = 0)$ =

e) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

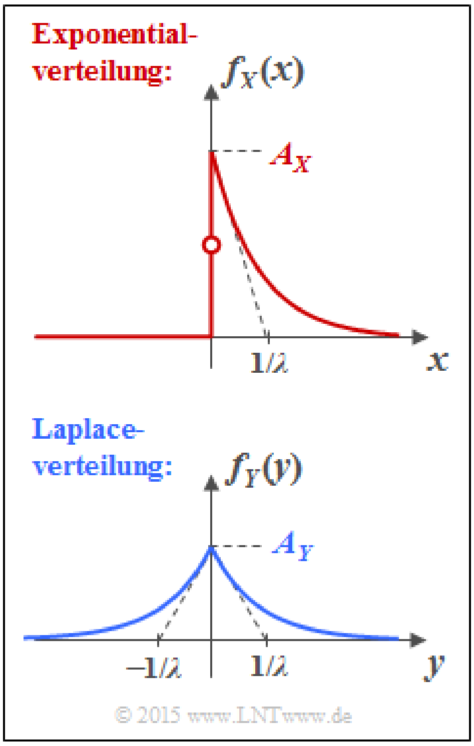
- ☐ Das Ergebnis $Y = 0$ ist unmöglich.
- ☐ Das Ergebnis $Y = 3$ ist unmöglich.

f) Wie groß sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten?

$\mathbf{Pr}(Y > 0)$ =

$\mathbf{Pr}(|Y| < 1)$ =

Z4.1: Momentenberechnung



Die Grafik zeigt oben die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) der *Exponentialverteilung*:

$$f_X(x) = \begin{cases} A_X \cdot \exp(-\lambda \cdot x) & \text{für } x > 0, \\ A_X/2 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Darunter gezeichnet ist die WDF der *Laplaceverteilung*, die für alle y–Werte wie folgt angegeben werden kann:

$$f_Y(y) = A_Y \cdot \exp(-\lambda \cdot |y|)\,.$$

Die zwei wertkontinuierlichen Zufallsgrößen X und Y sollen hinsichtlich der folgenden Kenngrößen verglichen werden:

- dem linearen Mittelwert m_1 (Moment erster Ordnung),
- dem Moment zweiter Ordnung ⇒ m_2,
- der Varianz $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$ (Satz von Steiner), und
- der Streuung σ.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 4.1** des vorliegenden Buches. Sie fasst gleichzeitig die erforderlichen Vorkenntnisse von **Kapitel 3** des Buches „Stochastische Signaltheorie” zusammen. Gegeben sind außerdem die beiden unbestimmten Integrale:

$$\int x \cdot {\rm e}^{-\lambda \cdot x}\,{\rm d}x = \frac{{\rm e}^{-\lambda \cdot x}}{(-\lambda)^2} \cdot (-\lambda \cdot x - 1)\,,$$

$$\int x^2 \cdot {\rm e}^{-\lambda \cdot x}\,{\rm d}x = {\rm e}^{-\lambda \cdot x} \cdot \left(\frac{x^2}{-\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\right).$$

Fragebogen zu "Z4.1: Momentenberechnung"

a) Wie groß ist der Maximalwert A_X der WDF $f_X(x)$?

- [ ] $A_X = \lambda/2$,
- [ ] $A_X = \lambda$,
- [ ] $A_X = 1/\lambda$.

b) Wie groß ist der Maximalwert A_Y der WDF $f_Y(y)$?

- [ ] $A_Y = \lambda/2$,
- [ ] $A_Y = \lambda$,
- [ ] $A_Y = 1/\lambda$.

c) Gibt es ein Argument z, so dass $f_X(z) = f_Y(z)$ gilt?

- ○ Ja.
- ○ Nein.

d) Welche Aussagen gelten für die Kenngrößen der Exponentialverteilung?

- [ ] Der lineare Mittelwert ist $m_1 = 1/\lambda$.
- [ ] Der quadratische Mittelwert ist $m_2 = 2/\lambda^2$.
- [ ] Die Varianz ist $\sigma^2 = 1/\lambda^2$.

e) Welche Aussagen gelten für die Kenngrößen der Laplaceverteilung?

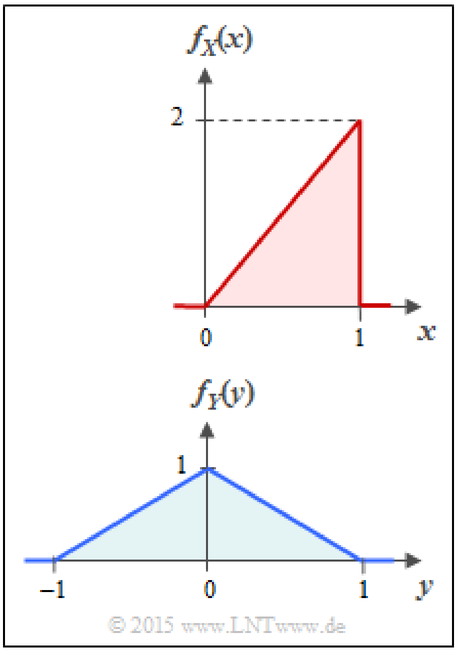
- [ ] Der lineare Mittelwert ist $m_1 = 1/\lambda$.
- [ ] Der quadratische Mittelwert ist $m_2 = 2/\lambda^2$.
- [ ] Die Varianz ist $\sigma^2 = 1/\lambda^2$.

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeiten unterscheidet sich die Zufallsgröße (X bzw. Y) vom Mittelwert m betragsmäßig um mehr als die Streuung σ?

Exponential: $\mathbf{Pr}(|X - m_X| > \sigma_X)$ =

Laplace: $\mathbf{Pr}(|Y - m_Y| > \sigma_Y)$ =

A4.2: Dreieckförmige WDF



Betrachtet werden zwei Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (kurz WDF) mit dreieckförmigem Verlauf:

- Die Zufallsgröße X ist auf den Wertebereich von 0 und 1 begrenzt, und es gilt für die WDF (obere Skizze)

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

- Die Zufallsgröße Y besitzt gemäß der unteren Skizze die folgende WDF:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - |y| & \text{für } |y| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

- Der Zusammenhang zwischen den zwei Zufallsgrößen ist durch die Gleichung $X = |Y|$ gegeben.

Für beide Zufallsgrößen soll jeweils die **differentielle Entropie** ermittelt werden. Beispielsweise lautet die entsprechende Gleichung für die Zufallsgröße X:

$$h(X) = -\int_{\text{supp}(f_X)} f_X(x) \cdot \log\left[f_X(x)\right] \, \text{d}x \qquad \text{mit} \qquad \text{supp}(f_X) = \{x : f_X(x) > 0\} .$$

Verwendet man den natürlichen Logarithmus, so ist die Pseudo–Einheit „nat” anzufügen. Ist das Ergebnis dagegen in „bit” gefragt, so ist der *Logarithmus dualis* ⇒ „$\log_2$” zu verwenden.

In der Teilaufgabe (d) wird die neue Zufallsgröße $Z = A \cdot Y$ betrachtet. Der WDF–Parameter A ist so zu bestimmen, dass die differentielle Entropie der neuen Zufallsgröße Z genau 1 bit ergibt:

$$h(Z) = h(A \cdot Y) = h(Y) + \log_2(A) = 1 \, \text{bit} .$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.1.** Vorgegeben ist das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \xi \cdot \ln(\xi) \, \text{d}\xi = \xi^2 \cdot \left[\frac{\ln(\xi)}{2} - \frac{1}{4}\right] .$$

Fragebogen zu "A4.2: Dreieckförmige WDF"

a) Berechnen Sie die differentielle Entropie der Zufallsgröße X in „nat".

$h(X)$ = nat

b) Welches Ergebnis erhält man mit der Pseudoeinheit „bit"?

$h(X)$ = bit

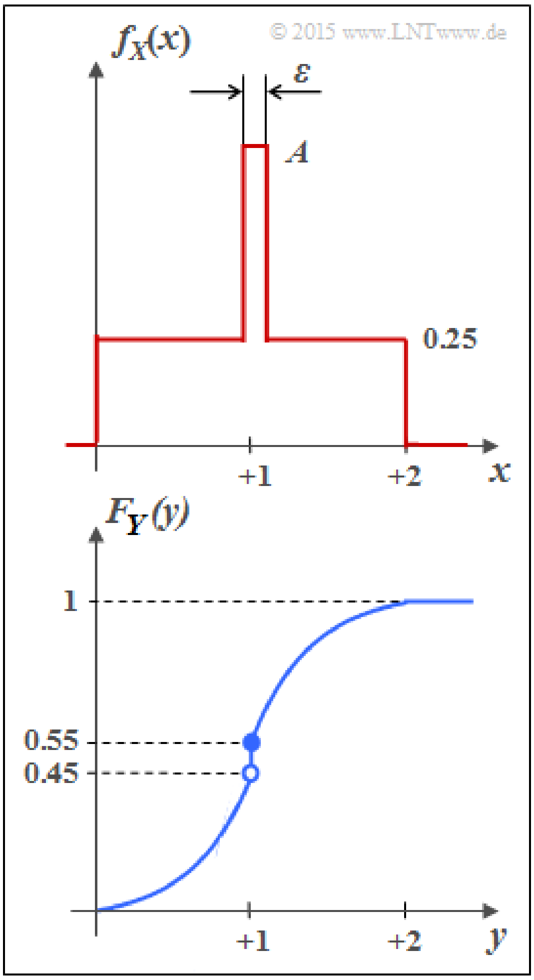
c) Berechnen Sie die differentielle Entropie der Zufallsgröße Y.

$h(Y)$ = bit

d) Bestimmen Sie den WDF–Parameter A, so dass $h(Z) = h(A \cdot Y) = 1$ bit gilt.

$h(Z) = 1$ **bit:** A =

Z4.2: Gemischte Zufallsgrößen



Man spricht von einer *gemischten Zufallsgröße*, wenn die Zufallsgröße neben einem kontinuierlichen Anteil auch noch diskrete Anteile beinhaltet.

Die Zufallsgröße Y mit der **Verteilungsfunktion** $F_Y(y)$ gemäß der unteren Skizze besitzt beispielsweise sowohl einen kontinuierlichen als auch einen diskreten Anteil. Die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** $f_Y(y)$ erhält man aus $F_Y(y)$ durch Differentiation. Aus dem Sprung bei $y = 1$ in der Verteilungsfunktion (VTF) wird somit ein „Dirac” in der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF).

In der Teilaufgabe (d) soll die differentielle Entropie $h(Y)$ der Zufallsgröße Y ermittelt werden (in bit), wobei von folgender Gleichung auszugehen ist:

$$h(Y) = -\int_{\text{supp}(f_Y)} f_Y(y) \cdot \log_2 \left[f_Y(y) \right] \, \mathrm{d}y \, .$$

In der Teilaufgabe (b) ist die differentielle Entropie $h(X)$ der Zufallsgröße X zu berechnen, deren WDF $f_X(x)$ oben skizziert ist. Führt man einen geeigneten Grenzübergang durch, so wird auch aus der Zufallsgröße X eine gemischte Zufallsgröße.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 4.1** des vorliegenden Buches. Weitere Informationen zu gemischten Zufallsgrößen finden Sie im **Kapitel 3.2** des Buches „Stochastische Signaltheorie”.

Fragebogen zu "Z4.2: Gemischte Zufallsgrößen"

a) Wie groß ist die WDF–Höhe A von $f_X(x)$ um $X = 1$?

- ☐ $A = 0.5/\varepsilon$,
- ☐ $A = 0.5/\varepsilon + 0.25$,
- ☐ $A = 1/\varepsilon$.

b) Berechnen Sie die differentielle Entropie für verschiedene ε–Werte.

$\varepsilon = 0.1$: $h(X)$ = bit

$\varepsilon = 0.01$: $h(X)$ = bit

$\varepsilon = 0.001$: $h(X)$ = bit

c) Welches Ergebnis liefert der Grenzwert $\varepsilon \to 0$?

- ☐ $f_X(x)$ hat nun einen kontinuierlichen und einen diskreten Anteil.
- ☐ Die differentielle Energie $h(X)$ ist negativ.
- ☐ Der Betrag $|h(X)|$ ist unendlich groß.

d) Welche Aussagen treffen für die Zufallsgröße Y zu?

- ☐ Der VTF–Wert an der Stelle $y = 1$ ist 0.5.
- ☐ Y beinhaltet einen diskreten und einen kontinuierlichen Anteil.
- ☐ Der diskrete Anteil $Y = 1$ tritt mit 10% Wahrscheinlichkeit auf.
- ☐ Der kontinuierliche Anteil von Y ist gleichverteilt.
- ☐ Die differentiellen Entropien von X und Y sind gleich.

A4.3: WDF–Vergleich bezüglich $h(X)$

WDF $f_X(x)$	Differentielle Entropie $h(X)$: $\log(\Gamma_A \cdot A)$	$\frac{1}{2} \cdot \log(\Gamma_L \cdot \sigma^2)$
$f_1(x)$	$\Gamma_A = 2$	$\Gamma_L = 12$
$f_2(x)$	$\Gamma_A = e^{1/2}$	$\Gamma_L = 6e$
$f_3(x)$	—	$\Gamma_L = 2e^2$
$f_4(x)$	$\Gamma_A = ???$	$\Gamma_L = ???$

© 2015 www.LNTwww.de

Nebenstehende Tabelle zeigt das Vergleichsergebnis hinsichtlich der differentiellen Entropie $h(X)$ für

- die **Gleichverteilung** $\Rightarrow$ $f_X(x) = f_1(x)$:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/(2A) & \text{für } |x| \le A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

- die **Dreieckverteilung** $\Rightarrow$ $f_X(x) = f_2(x)$:

$$f_2(x) = \begin{cases} 1/A \cdot [1 - |x|/A] & \text{für } |x| \le A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

- die **Laplaceverteilung** $\Rightarrow$ $f_X(x) = f_3(x)$:

$$f_3(x) = \lambda/2 \cdot \exp[-\lambda \cdot |x|].$$

Die Werte für die **Gaußverteilung** $\Rightarrow$ $f_X(x) = f_4(x)$

$$f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp[-x^2/(2\sigma^2)]$$

sind hier noch nicht eingetragen. Diese sollen in den Teilaufgaben (a) bis (c) ermittelt werden.

Alle hier betrachteten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen sind

- symmetrisch um $x = 0$ $\Rightarrow$ $f_X(-x) = f_X(x)$
- und damit mittelwertfrei $\Rightarrow$ $m_1 = 0$.

In allen hier betrachteten Fällen kann die differentielle Entropie wie folgt dargestellt werden:

- Unter der Nebenbedingung $|X| \le A$ $\Rightarrow$ **Spitzenwertbegrenzung:**

$$h(X) = \log\,(\Gamma_A \cdot A),$$

- Unter der Nebenbedingung $E[|X|^2] \le \sigma^2$ $\Rightarrow$ **Leistungsbegrenzung:**

$$h(X) = 1/2 \cdot \log\,(\Gamma_L \cdot \sigma^2).$$

Je größer die jeweilige Kenngröße Γ_A bzw. Γ_L ist, desto günstiger ist bei der vereinbarten Nebenbedingung die vorliegende WDF hinsichtlich der differentiellen Entropie.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.1.**

Fragebogen zu "A4.3: WDF–Vergleich bezüglich $h(X)$"

a) Welche Gleichung gilt für den Logarithmus der Gauß–WDF?

- [ ] $\ln [f_X(x)] = \ln A - x^2/(2\,\sigma^2)$ mit $A = f_X(x = 0)$,
- [ ] $\ln [f_X(x)] = A - \ln (x^2/\sigma^2)$ mit $A = f_X(x = 0)$.

b) Welche Gleichung gilt für die differentielle Entropie der Gauß–WDF?

- [ ] $h(X) = 1/2 \cdot \ln (2\pi e\sigma^2)$ mit Pseudoeinheit „nat".
- [ ] $h(X) = 1/2 \cdot \log_2 (2\pi e\sigma^2)$ mit Pseudoeinheit „bit".

c) Ergänzen Sie den fehlenden Eintrag (Gauß) in obiger Tabelle.

$\boldsymbol{\Gamma}_{\rm L}$ =

d) Welche Werte erhält man für die Gauß–WDF mit Gleichanteil $m_1 = \sigma = 1$?

$\boldsymbol{P/\sigma^2}$ =

$\boldsymbol{h(X)}$ = bit

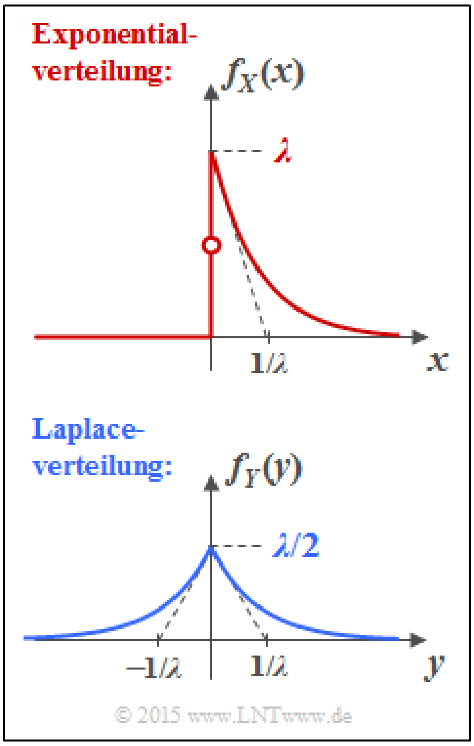
e) Welche der Aussagen stimmen für die differentielle Entropie $h(X)$ unter der Nebenbedingung „Leistungsbegrenzung"?

- [ ] Die Gaußverteilung führt zum maximalen $h(X)$.
- [ ] Die Gleichverteilung führt zum maximalen $h(X)$.
- [ ] Die Dreieck–WDF ist sehr ungünstig, da spitzenwertbegrenzt.

f) Welche der Aussagen stimmen bei „Spitzenwertbegrenzung" auf den Bereich $|X| \le A$? Die maximale differentielle Entropie $h(X)$ ergibt sich für

- [ ] eine Gauß–WDF mit anschließender Begrenzung ⇒ $|X| \le A$,
- [ ] die Gleichverteilung,
- [ ] die Dreieckverteilung.

Z4.3: Exponential– und Laplaceverteilung



Wir betrachten hier die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (WDF) zweier wertkontinuierlicher Zufallsgrößen:

- X ist exponentialverteilt (siehe obere Darstellung): Für $x < 0$ ist $f_X(x) = 0$, und für positive x–Werte gilt:

$$f_X(x) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}.$$

- Dagegen gilt für die laplaceverteilte Zufallsgröße Y im gesamten Bereich $-\infty < y < +\infty$ (untere Skizze):

$$f_Y(y) = \lambda/2 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot |y|}.$$

Zu berechnen sind die differentiellen Entropien $h(X)$ und $h(Y)$ abhängig vom WDF–Parameter λ. Zum Beispiel gilt:

$$h(X) = -\int_{x \in \mathrm{supp}(f_X)} f_X(x) \cdot \log_2 [f_X(x)] \, \mathrm{d}x.$$

Bei Verwendung von „$\log_2$" ist die Pseudo–Einheit „bit" anzufügen.

In den Teilaufgaben (b) und (d) ist die differentielle Entropie in folgender Form anzugeben:

$$h(X) = 1/2 \cdot \log\left(\mathit{\Gamma}_{\rm L} \cdot \sigma^2\right) \quad \text{bzw.} \quad h(Y) = 1/2 \cdot \log\left(\mathit{\Gamma}_{\rm L} \cdot \sigma^2\right).$$

Zu ermitteln ist, durch welche Faktoren $\mathit{\Gamma}_{\rm L}$ die Exponentialverteilung und die Laplaceverteilung charakterisiert werden.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das Themengebiet von **Kapitel 4.1.** Für die Varianzen der beiden betrachteten Zufallsgrößen gilt, wie in **Aufgabe Z4.1** hergeleitet:

- Exponentialverteilung ⇒ Zufallsgröße X: $\sigma^2 = 1/\lambda^2$,
- Laplaceverteilung ⇒ Zufallsgröße Y: $\sigma^2 = 2/\lambda^2$.

Fragebogen zu "Z4.3: Exponential– und Laplaceverteilung"

a) Berechnen Sie die differentielle Entropie der Exponentialverteilung.

$\boldsymbol{\lambda = 1}$: $\boldsymbol{h(X)}$ = bit

b) Welche Kenngröße ergibt sich für die Form $h(X) = 1/2 \cdot \log_2 (\mathit{\Gamma}_{\rm L} \cdot \sigma^2)$?

Exponentialverteilung: $\boldsymbol{\mathit{\Gamma}_{\rm L}}$ =

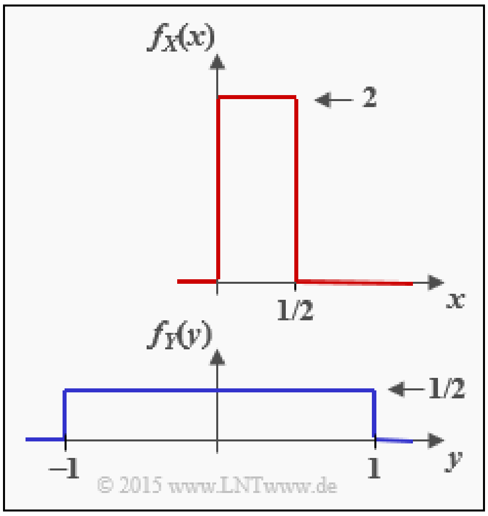
c) Berechnen Sie die differentielle Entropie der Laplaceverteilung.

$\boldsymbol{\lambda = 1}$: $\boldsymbol{h(Y)}$ = bit

d) Welche Kenngröße ergibt sich für die Form $h(Y) = 1/2 \cdot \log_2 (\mathit{\Gamma}_{\rm L} \cdot \sigma^2)$?

Laplaceverteilung: $\boldsymbol{\mathit{\Gamma}_{\rm L}}$ =

A4.4: Zusammenhang $h(X)$ und $H(Z)$



Wir betrachten die zwei wertkontinuierlichen Zufallsgrößen X und Y mit den Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f_X(x)$ und $f_Y(y)$. Für diese Zufallsgrößen kann man

- die herkömmlichen Entropien $H(X)$, $H(Y)$ nicht angeben,
- jedoch aber die differentiellen Entropien $h(X)$ und $h(Y)$.

Wir betrachten außerdem zwei wertdiskrete Zufallsgrößen:

- $Z_{X,M}$ ergibt sich durch (geeignete) Quantisierung der Zufallsgröße X mit der Quantisierungsstufenzahl M ⇒ Quantisierungsintervallbreite $\varDelta = 0.5/M$.
- Die Zufallsgröße $Z_{Y,M}$ ergibt sich nach Quantisierung der wertkontinuierlichen Zufallsgröße Y mit der Quantisierungsstufenzahl M ⇒ Quantisierungsintervallbreite $\varDelta = 2/M$.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen dieser diskreten Zufallsgrößen setzen sich jeweils aus M Diracfunktionen zusammen, deren Impulsgewichte durch die Intervallflächen der zugehörigen wertkontinuierlichen Zufallsgrößen gegeben sind. Daraus lassen sich die Entropien $H(Z_{X,M})$ und $H(Z_{Y,M})$ in herkömmlicher Weise (entsprechend Kapitel 3) bestimmen.

Im **Theorieteil** wurde auch eine Näherung angegeben. Beispielsweise gilt:

$$H(Z_{X,\,M}) \approx -\log_2 (\varDelta) + h(X)\,.$$

Sie werden im Laufe der Aufgabe feststellen, dass bei rechteckförmiger WDF ⇒ Gleichverteilung diese „Näherung" genau das gleiche Ergebnis liefert wie die direkte Berechnung.

Aber im allgemeinen Fall – zum Beispiel bei **dreieckförmiger WDF** – stellt obige Gleichung tatsächlich nur eine Näherung dar, die erst im Grenzfall $\varDelta \to 0$ mit der tatsächlichen Entropie $H(Z_{X,M})$ übereinstimmt.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.1.**

Fragebogen zu "A4.4: Zusammenhang $h(X)$ und $H(Z)$"

a) Berechnen Sie die differentielle Entropie $h(X)$.

$h(X)$ = bit

b) Berechnen Sie die differentielle Entropie $h(Y)$.

$h(Y)$ = bit

c) Berechnen Sie die Entropie der wertdiskreten Zufallsgrößen $Z_{X,\ M\,=\,4}$.

direkte Berechnung: $H(Z_{X,\ M\,=\,4})$ = bit

mit Näherung: $H(Z_{X,\ M\,=\,4})$ = bit

d) Berechnen Sie die Entropie der wertdiskreten Zufallsgröße $Z_{Y,\ M\,=\,4}$.

mit Näherung: $H(Z_{Y,\ M\,=\,4})$ = bit

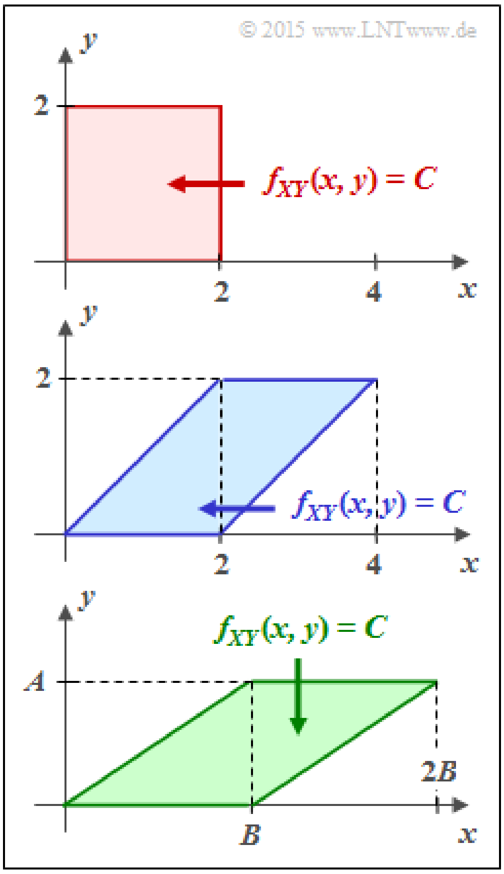
e) Berechnen Sie die Entropie der wertdiskreten Zufallsgröße $Z_{Y,\ M\,=\,8}$.

mit Näherung: $H(Z_{Y,M\,=\,8})$ = bit

f) Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

- ☐ Die Entropie einer diskreten Zufallsgröße Z ist stets $H(Z) \ge 0$.
- ☐ Die differentielle Entropie einer kontinuierlichen Zufallsgröße X ist stets $h(X) \ge 0$.

A4.5: $I(X; Y)$ aus $f_{XY}(x, y)$



Vorgegeben sind hier die drei unterschiedlichen 2D–Gebiete $f_{XY}(x, y)$, die in der Aufgabe nach ihren Füllfarben mit

- **rote** Verbund–WDF,
- **blaue** Verbund–WDF,
- **grüne** Verbund–WDF

bezeichnet werden. In den dargestellten Gebieten gelte jeweils $f_{XY}(x, y) = C = \text{const.}$

Die Transinformation zwischen den wertkontinuierlichen Zufallsgrößen X und Y kann unter anderem nach folgender Gleichung berechnet werden:

$$I(X;Y) = h(X) + h(Y) - h(XY).$$

Für die hier verwendeten differentiellen Entropien gelten die folgenden Gleichungen:

$$h(X) = -\int_{x \in \text{supp}(f_X)} f_X(x) \cdot \log\left[f_X(x)\right] \, \mathrm{d}x\,,$$

$$h(Y) = -\int_{y \in \text{supp}(f_Y)} f_Y(y) \cdot \log\left[f_Y(y)\right] \, \mathrm{d}y\,,$$

$$h(XY) = -\iint_{(x,y) \in \text{supp}(f_{XY})} f_{XY}(x,y) \cdot \log\left[f_{XY}(x,y)\right] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\,.$$

Für die beiden Randwahrscheinlichkeitsdichtefunktionen gilt dabei:

$$f_X(x) = \int_{y \in \text{supp}(f_Y)} f_{XY}(x,y) \, \mathrm{d}y\,, \qquad f_Y(y) = \int_{x \in \text{supp}(f_X)} f_{XY}(x,y) \, \mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.2.** Gegeben seien zudem folgende differentielle Entropien:

- Ist X dreieckverteilt zwischen x_{min} und x_{max}, so gilt:

$$h(X) = \log\left[\sqrt{\rm e} \cdot (x_{\rm max} - x_{\rm min})/2\right].$$

- Ist Y gleichverteilt zwischen y_{min} und y_{max}, so gilt:

$$h(Y) = \log\left[y_{\rm max} - y_{\rm min}\right].$$

- Alle Ergebnisse sollen in „bit” angegeben werden. Dies erreicht man mit „log” ⇒ „$\log_2$”.

Fragebogen zu "A4.5: $I(X; Y)$ aus $f_{XY}(x, y)$"

a) Wie groß ist die Transinformation der roten Verbund–WDF?

rote Verbund–WDF: $I(X; Y)$ = bit

b) Wie groß ist die Transinformation der blauen Verbund–WDF?

blaue Verbund–WDF: $I(X; Y)$ = bit

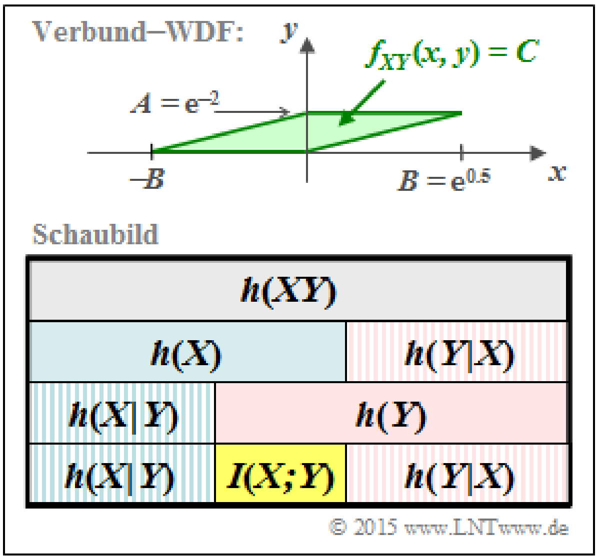
c) Wie groß ist die Transinformation der grünen Verbund–WDF?

grüne Verbund–WDF: $I(X; Y)$ = bit

d) Welche Voraussetzungen müssen die Zufallsgrößen X und Y gleichzeitig erfüllen, damit allgemein $I(X; Y) = 1/2 \cdot \log(\mathrm{e})$ gilt:

- ☐ Die Verbund–WDF $f_{XY}(x, y)$ ergibt ein Parallelogramm.
- ☐ Eine der Zufallsgrößen (X oder Y) ist gleichverteilt.
- ☐ Die andere Zufallsgröße (Y oder X) ist dreieckverteilt.

Z4.5: Nochmals Transinformation



Die Grafik zeigt oben die in dieser Aufgabe zu betrachtende Verbund–WDF $f_{XY}(x, y)$, die identisch ist mit der „grünen” Konstellation in **Aufgabe A4.5.** Die Skizze ist in der y–Richtung um den Faktor 3 vergrößert. Im grün hinterlegten Definitionsgebiet ist die Verbund–WDF konstant gleich $C = 1/F$, wobei F die Fläche des Parallelogramms angibt.

In der Aufgabe A4.5 wurden folgende differentielle Entropien berechnet:

$$\begin{aligned} h(X) &= \log\,(A)\,, \\ h(Y) &= \log\,(B \cdot \sqrt{\mathrm{e}})\,, \\ h(XY) &= \log\,(F) = \log\,(A \cdot B)\,. \end{aligned}$$

In dieser Aufgabe sind nun die speziellen Parameterwerte $A = \mathrm{e}^{-2}$ und $B = \mathrm{e}^{0.5}$ zu verwenden. Außerdem ist zu beachten:

- Bei Verwendung des *natürlichen Logarithmus* „ln” ist die Pseudo–Einheit „nat” anzufügen.
- Verwendet man den *Logarithmus dualis* ⇒ „$\log_2$”, so ergeben sich alle Größen in „bit”.

Entsprechend dem obigen Schaubild sollen nun auch die bedingten differentiellen Entropien $h(Y|X)$ und $h(X|Y)$ ermittelt und deren Bezug zur Transinformation $I(X;Y)$ angegeben werden.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.2.**

Fragebogen zu "Z4.5: Nochmals Transinformation"

a) Geben Sie die folgenden informationstheoretischen Größen in „nat” an:

$h(X)$ = nat

$h(Y)$ = nat

$h(XY)$ = nat

$I(X; Y)$ = nat

b) Wie lauten die gleichen Größen mit der Pseudo–Einheit „bit”?

$h(X)$ = bit

$h(Y)$ = bit

$h(XY)$ = bit

$I(X; Y)$ = bit

c) Berechnen Sie die bedingte differentielle Entropie $h(Y|X)$.

$h(Y|X)$ = nat

$h(Y|X)$ = bit

d) Berechnen Sie die bedingte differentielle Entropie $h(X|Y)$.

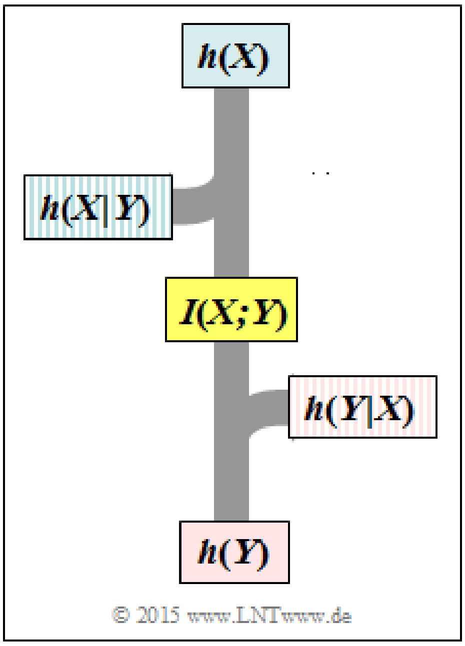
$h(X|Y)$ = nat

$h(X|Y)$ = bit

e) Welche der folgenden Größen sind niemals negativ?

- [ ] Sowohl $H(X)$ als auch $H(Y)$ im wertdiskreten Fall.
- [ ] Die Transinformation $I(X; Y)$ im wertdiskreten Fall.
- [ ] Die Transinformation $I(X; Y)$ im wertkontinuierlichen Fall.
- [ ] Sowohl $h(X)$ als auch $h(Y)$ im wertkontinuierlichen Fall.
- [ ] Sowohl $h(X|Y)$ als auch $h(Y|X)$ im wertkontinuierlichen Fall.
- [ ] Die Verbundentropie $h(XY)$ im wertkontinuierlichen Fall.

A4.6: Zur AWGN–Kanalkapazität



Wir gehen vom **AWGN–Kanalmodell** aus:

- X kennzeichnet den Eingang (Sender).
- N steht für eine gaußverteilte Störung.
- $Y = X + N$ beschreibt den Ausgang (Empfänger) bei additiver Störung.

Für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Störung gelte:

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_N^2}} \cdot \exp\left[-\frac{n^2}{2\sigma_N^2}\right].$$

Da die Zufallsgröße N mittelwertfrei ist $\Rightarrow$ $m_N = 0$, kann man die Varianz σ_N^2 mit der Leistung P_N gleichsetzen. In diesem Fall ist die differentielle Entropie der Zufallsgröße N wie folgt angebbar (mit Pseudo–Einheit „bit"):

$$h(N) = 1/2 \cdot \log_2 \left(2\pi \mathrm{e} \cdot P_N\right).$$

In dieser Aufgabe wird $P_N = 1$ mW vorgegeben. Dabei ist zu beachten:

- Die Leistung P_N in obiger Gleichung muss wie die Varianz σ_N^2 dimensionslos sein.
- Um mit dieser Gleichung arbeiten zu können, muss die physikalische Größe P_N geeignet normiert werden, zum Beispiel entsprechend $P_N = 1$ mW $\Rightarrow$ $P'_N = 1$.
- Bei anderer Normierung, beispielsweise $P_N = 1$ mW $\Rightarrow$ $P'_N = 0.001$ ergäbe sich für $h(N)$ ein völlig anderer Zahlenwert.

Weiter können Sie bei der Lösung dieser Aufgabe berücksichtigen:

- Die Kanalkapazität ist definiert als die maximale Transinformation zwischen Eingang X und Ausgang Y bei bestmöglicher Eingangsverteilung:

  $$C = \max_{f_X:\, \mathrm{E}[X^2] \le P_X} I(X;Y).$$

- Die Kanalkapazität des AWGN–Kanals lautet:

  $$C_{\rm AWGN} = 1/2 \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_X}{P_N}\right) = 1/2 \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P'_X}{P'_N}\right).$$

  Daraus ist ersichtlich, dass die die Kanalkapazität C und auch die Transinformation $I(X; Y)$ im Gegensatz zu den differentiellen Entropien unabhängig von obiger Normierung ist.

- Bei gaußförmiger Stör–WDF $f_N(n)$ führt eine ebenfalls gaußförmige Eingangs–WDF $f_X(x)$ zur maximalen Transinformation und damit zur Kanalkapazität.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.2.**

Fragebogen zu "A4.6: Zur AWGN–Kanalkapazität"

a) Welche Sendeleistung ist für C = 2 bit erforderlich?

C = 2 bit: P_X = mW

b) Unter welchen Voraussetzungen ist $I(X; Y)$ = 2 bit überhaupt erreichbar?

- [ ] P_X ist wie unter (a) ermittelt oder größer.
- [ ] Die Zufallsgröße X ist gaußverteilt.
- [ ] Die Zufallsgröße X ist mittelwertfrei.
- [ ] Die Zufallsgrößen X und N sind unkorreliert.
- [ ] Die Zufallsgrößen X und Y sind unkorreliert.

c) Berechnen Sie die differentiellen Entropien der Zufallsgrößen N, X und Y bei geeigneter Normierung, zum Beispiel P_N = 1 mW ⇒ P'_N = 1.

$h(N)$ = bit,
$h(X)$ = bit,
$h(Y)$ = bit.

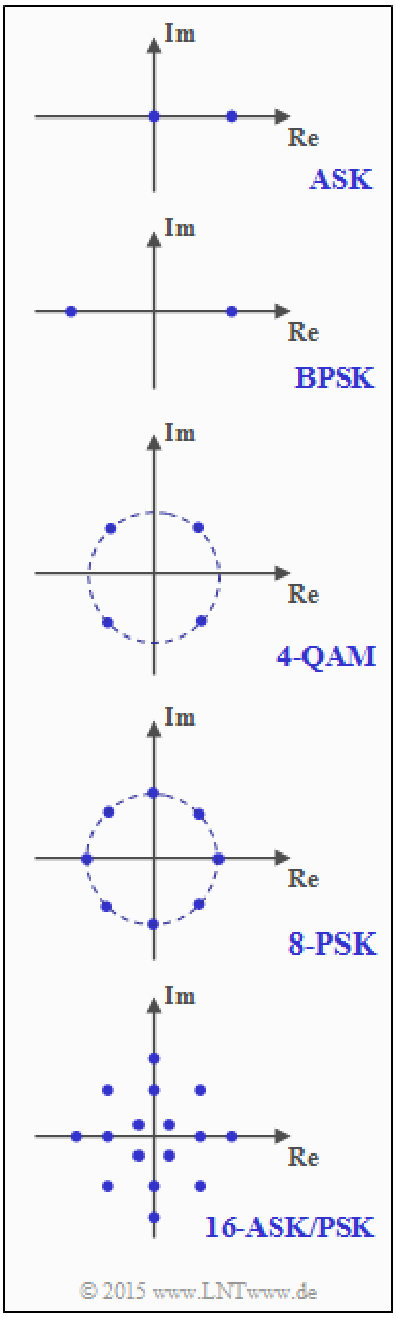
d) Wie lauten die weiteren informationstheoretischen Beschreibungsgrößen?

$h(Y|X)$ = bit
$h(X|Y)$ = bit
$h(XY)$ = bit

e) Welche Größen ergäben sich bei gleichem P_X im Grenzfall $P'_N \to 0$?

$h(X)$ = bit
$h(Y)$ = bit
$h(Y|X)$ = bit
$h(X|Y)$ = bit
$I(X;Y)$ = bit

A4.7: *K* parallele Gaußkanäle



Die Kanalkapazität des AWGN–Kanals ⇒ $Y = X + N$ wurde im **Theorieteil** wie folgt angegeben (mit Zusatz–Einheit „bit") :

$$C_{\rm AWGN}(P_X) = 1/2 \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_X}{P_N} \right) .$$

Die verwendeten Größen haben folgende Bedeutung:

- P_X ist die Sendeleistung ⇒ Varianz der Zufallsgröße X,
- P_N ist die Störleistung ⇒ Varianz der Zufallsgröße N.

Werden K identische Gaußkanäle parallel genutzt, so gilt für die Gesamtkapazität:

$$C_K(P_X) = K \cdot C_{\rm AWGN}(P_X/K) .$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass

- in jedem Kanal die gleiche Störleistung P_N vorliegt,
- somit jeder Kanal die gleiche Sendeleistung erhält,
- die Gesamtleistung genau wie im Fall $K = 1$ gleich P_X ist.

In nebenstehender Grafik sind die Signalraumpunkte für einige digitale Modulationsverfahren angegeben:

- **Amplitude Shift Keying** (ASK)
- **Binary Phase Shift Keying** (BPSK)
- **Quadratur–Amplitudenmodulation** (hier: 4–QAM)
- **Phase Shift Keying** (hier: 8–PSK ⇒ DVB–2)
- **Kombinierte ASK/PSK–Modulation** (hier: 16–ASK/PSK)

Zu Beginn dieser Aufgabe ist zu prüfen, welcher K–Parameter für die einzelnen Verfahren gültig ist.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 4.2.**

Fragebogen zu "A4.7: *K* parallele Gaußkanäle"

a) Welche Parameter K gelten für die folgenden Modulationsverfahren?

ASK: K =

BPSK: K =

4–QAM: K =

8–PSK: K =

16–ASK/PSK: K =

b) Welche Kanalkapazität C_K ergibt sich für K gleich gute Kanäle (jeweils mit der Störleistung P_N und der Sendeleistung P_X/K)?

- [ ] $C_K = K/2 \cdot \log_2 [1 + P_X/P_N]$.
- [ ] $C_K = K/2 \cdot \log_2 [1 + P_X/(K \cdot P_N)]$.
- [ ] $C_K = 1/2 \cdot \log_2 [1 + P_X/P_N)]$.

c) Welche Kapazitäten ergeben sich für $P_X/P_N = 15$?

$P_X/P_N = 15$, $K = 1$: C_K = bit

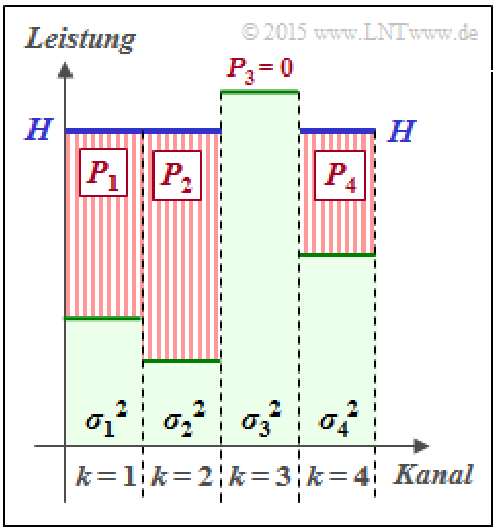
$K = 2$: C_K = bit

$K = 4$: C_K = bit

d) Gibt es bezüglich der Kanalzahl K ein (theoretisches) Optimum?

- [ ] Ja: Die größte Kanalkapazität ergibt sich für $K = 2$.
- [ ] Ja: Die größte Kanalkapazität ergibt sich für $K = 4$.
- [ ] Nein: Je größer K, desto größer ist die Kanalkapazität.
- [ ] Der Grenzwert für $K \to \infty$ (in bit) ist $C_K = P_X/P_N/2/\ln(2)$.

Z4.7: Zum Water–Filling–Algorithmus



Wir betrachten K parallele Gaußsche Kanäle (AWGN) mit unterschiedlichen Störleistungen σ_k^2 $(1 \le k \le K)$, wie in der nebenstehenden Grafik am Beispiel $K = 4$ verdeutlicht ist. Die Sendeleistung in den einzelnen Kanälen wird mit P_k bezeichnet, deren Summe den vorgegebenen Wert P_X nicht überschreiten darf:

$$P_1 + \ldots + P_K = \sum_{k=1}^{K} \mathrm{E}\left[X_k^2\right] \le P_X \, .$$

Sind die Zufallsgrößen X_1, ..., X_k gaußisch, so kann für die (gesamte) Transinformation zwischen dem Eingang X und dem Ausgang Y geschrieben werden:

$$I(X_1, \ldots, X_K; Y_1, \ldots, Y_K) = 1/2 \cdot \sum_{k=1}^{K} \log_2 \left(1 + \frac{P_k}{\sigma_k^2}\right), \quad \text{Ergebnis in bit} \, .$$

Das Maximum hierfür ist die Kanalkapazität des Gesamtsystems, wobei sich die Maximierung auf die Aufteilung der Gesamtleistung P_X auf die einzelnen Kanäle bezieht.

$$C_K(P_X) = \max_{P_k\,,\ \text{mit}\ P_1 + \ldots + P_K = P_X} I(X_1, \ldots, X_K; Y_1, \ldots, Y_K) \, .$$

Diese Maximierung kann mit dem Water–Filling–Algorithmus geschehen, der in obiger Grafik für $K = 4$ dargestellt ist. Eine genaue Beschreibung finden Sie im **Theorieteil.**

In der vorliegenden Aufgabe soll dieser Algorithmus angewendet werden, wobei von folgenden Voraussetzungen auszugehen ist:

- Zwei parallele Gaußkanäle $\Rightarrow$ $K = 2$,
- Normierte Störleistungen $\sigma_1^2 = 1$ und $\sigma_2^2 = 4$,
- Normierte Sendeleistungen $P_X = 10$ bzw. $P_X = 3$.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das Themengebiet von **Kapitel 4.2.**

Fragebogen zu "Z4.7: Zum Water–Filling–Algorithmus"

a) Welche Strategien der Leistungszuteilung sind sinnvoll?

- ☐ Einem stark gestörten Kanal k (mit großer Störleistung σ_k^2) sollte eine große Nutzleistung P_k zugewiesen werden.
- ☐ Einem stark gestörten Kanal k (mit großer Störleistung σ_k^2) sollte nur eine kleine Nutzleistung P_k zugewiesen werden.
- ☐ Bei K gleich guten Kanälen $\Rightarrow \sigma_1^2 = ... = \sigma_K^2 = \sigma_N^2$ sollte die Leistung gleichmäßig verteilt werden.

b) Welche Transinformation $I = I(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ ergibt sich, wenn man die Sendeleistung $P_X = 10$ gleichmäßig auf beide Kanäle verteilt?

$\boldsymbol{P_1 = P_2 = 5:\ \ I}$ = bit

c) Es gelte weiter $P_X = 10$. Welche optimale Leistungsaufteilung ergibt sich nach dem Water–Filling–Algorithmus?

$\boldsymbol{P_X = 10:\ \ P_1}$ =

$\boldsymbol{P_2}$ =

d) Wie groß ist die Kanalkapazität für $K = 2$ und $P_X = 10$?

$\boldsymbol{C_2(P_X = 10)}$ = bit

e) Welche Ergebnisse erhält man mit $K = 2$ und $P_X = 3$?

$\boldsymbol{P_1 = P_2 = 1.5:\ \ I}$ = bit

$\boldsymbol{C_2(P_X = 3)}$ = bit

A4.8: Kurvenverlauf $C(E_B/N_0)$

E_S/N_0	$10 \cdot \lg E_S/N_0$	C in bit/use
0.00	$-\infty$	0.000
0.25	–6.02 dB	0.292
0.50	–3.01 dB	0.500
0.75	–1.25 dB	0.661
1.00	0.00 dB	0.792
1.25	0.97 dB	0.904
1.50	1.76 dB	1.000
1.75	2.43 dB	1.085
2.00	3.01 dB	1.161

Für die Kanalkapazität C des AWGN–Kanals als obere Schranke für die Coderate R bei Digitalsignalübertragung gibt es zwei verschiedene Gleichungen :

Kanalkapazität C in Abhängigkeit von E_S/N_0:

$$C(E_S/N_0) = \frac{1}{2} \cdot \log_2 (1 + \frac{2 \cdot E_S}{N_0}).$$

Hierbei sind folgende Abkürzungen verwendet:

- E_S: die Energie pro Symbol des Digitalsignals,
- N_0: die AWGN–Rauschleistungsdichte.

Kanalkapazität C in Abhängigkeit von E_B/N_0:

$$C(E_B/N_0) = \frac{1}{2} \cdot \log_2 (1 + \frac{2 \cdot R \cdot E_B}{N_0}).$$

Berücksichtigt ist der Zusammenhang $E_S = R \cdot E_B$, wobei R die Coderate der bestmöglichen Kanalcodierung angibt. Eine fehlerfreie Übertragung (unter Berücksichtigung dieses optimalen Codes) ist für das gegebene E_B/N_0 möglich, so lange $R \le C$ gilt ⇒ **Kanalcodierungstheorem von Shannon.**

Durch die Tabelle vorgegeben ist der Kurvenverlauf $C(E_S/N_0)$. Im Mittelpunkt dieser Aufgabe steht die numerische Auswertung der zweiten Gleichung.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.3.**

Fragebogen zu "A4.8: Kurvenverlauf $C(E_B/N_0)$ "

a) Welche Gleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen E_B/N_0 und der Rate R beim AWGN–Kanal exakt?

- [ ] $R = 1/2 \cdot \log_2 (1 + 2 \cdot R \cdot E_B/N_0)$,
- [ ] $2^{2R} = 1 + 2 \cdot R \cdot E_B/N_0$,
- [ ] $E_B/N_0 = (2^{2R} - 1)/(2R)$.

b) Geben Sie den kleinstmöglichen Wert für E_B/N_0 an, mit dem man über den AWGN–Kanal noch fehlerfrei übertragen kann.

Min $[E_B/N_0]$ =

c) Welche Ergebnis erhält man in dB?

Min$[10 \cdot \lg (E_B/N_0)]$ = dB

d) Geben Sie die AWGN–Kanalkapazität für $10 \cdot \lg (E_B/N_0) = 0$ dB an.

$10 \cdot \lg (E_B/N_0) = 0$ dB: C = bit/Kanalzugriff

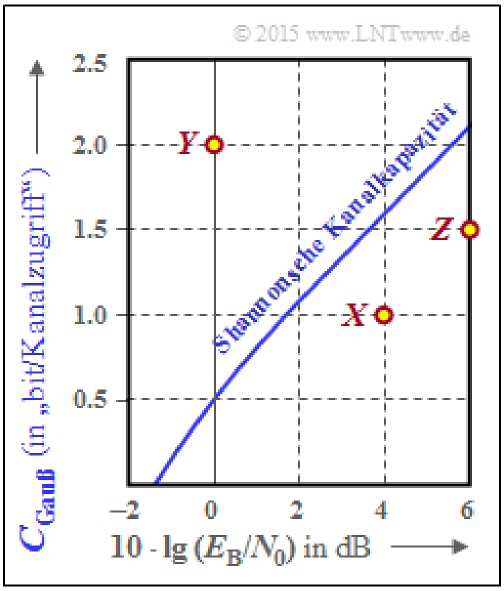
e) Geben Sie das erforderliche E_B/N_0 für fehlerfreie Übertragung mit $R = 1$ an.
Hinweis: Die Lösung findet man in der Tabelle auf der Angabenseite.

$R = 1$: Min $[E_B/N_0]$ =

f) Wie kann ein Punkt der $C(E_B/N_0)$–Kurve einfacher ermittelt werden?

- [ ] Berechnung der Kanalkapazität C für das vorgegebene E_B/N_0.
- [ ] Berechnung des erforderlichen E_B/N_0 für das vorgegebene C.

Z4.8: Was sagt $C(E_B/N_0)$ aus?



Wir betrachten wie in **Aufgabe A4.8** die Kanalkapazität des AWGN–Kanals:

$$C_{\rm Gauß}(E_{\rm B}/N_0) = \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{2 \cdot R \cdot E_{\rm B}}{N_0}\right).$$

- Die Kurve ist rechts bei logarithmischer Achse zwischen –2 dB und +6 dB dargestellt.
- Der Zusatz „Gauß" weist darauf hin, dass für diese Kurve am AWGN–Eingang eine Gaußverteilung vorausgesetzt wurde.

Eingezeichnet sind in obiger Grafik drei Systemvarianten:

- System $\boldsymbol{X}$: 10 · lg (E_B/N_0) = 4 dB, R = 1,
- System $\boldsymbol{Y}$: 10 · lg (E_B/N_0) = 0 dB, R = 2,
- System $\boldsymbol{Z}$: 10 · lg (E_B/N_0) = 6 dB, R = 1.5.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.3.** In den Fragen zu dieser Aufgabe verwenden wir noch folgende Begriffe:

- Digitalsystem: Symbolumfang $M_X = |X|$ beliebig,
- Binärsystem: Symbolumfang $M_X = 2$,
- Quaternärsystem: Symbolumfang $M_X = 4$.

Fragebogen zu "Z4.8: Was sagt $C(E_B/N_0)$ aus?"

a) Welche Aussage liefert der **Punkt *X*** für die Digitalsignalübertragung?

- [ ] Für $10 \cdot \lg (E_B/N_0) = 4$ dB ist ein Digitalsystem mit der Rate $R = 1$ und der Fehlerwahrscheinlichkeit 0 vorstellbar.
- [ ] Ein solches System kommt ohne Kanalcodierung aus.
- [ ] Ein solches System verwendet einen unendlich langen Code.
- [ ] Auch ein Binärsystem kann die Voraussetzungen erfüllen.

b) Welche Aussage liefert der **Punkt *Y*** für die Digitalsignalübertragung?

- [ ] Für $10 \cdot \lg (E_B/N_0) = 0$ dB ist ein Digitalsystem mit der Rate $R = 2$ und der Fehlerwahrscheinlichkeit 0 vorstellbar.
- [ ] Für $10 \cdot \lg (E_B/N_0) = 0$ dB wäre $R = 0.5$ ausreichend.
- [ ] Für die Rate $R = 2$ würde $10 \cdot \lg (E_B/N_0) = 5$ dB genügen.

c) Welche Aussage liefert der **Punkt *Z*** für die Binärübertragung?

- [ ] Ein Binärsystem erfüllt die Anforderungen auf keinen Fall.
- [ ] Die Kurve $C_{\text{Gauß}}(E_B/N_0)$ reicht für diese Bewertung nicht aus.

d) Welche Aussage liefert der **Punkt *Z*** für die Quaternärübertragung?

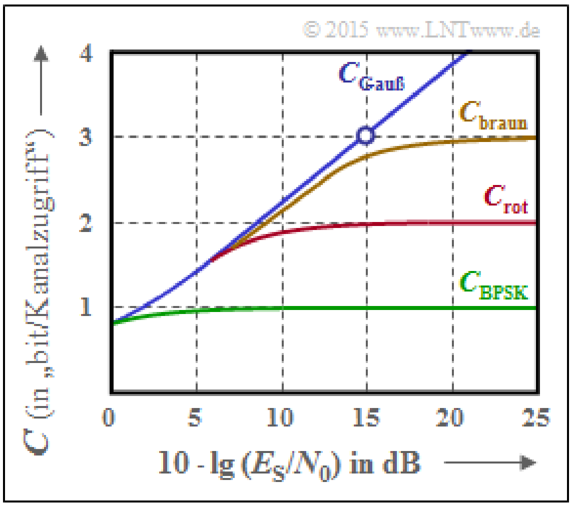
- [ ] Ein Quaternärsystem erfüllt die Anforderungen auf keinen Fall.
- [ ] Die Kurve $C_{\text{Gauß}}(E_B/N_0)$ reicht für diese Bewertung nicht aus.

A4.9: Höherstufige Modulation

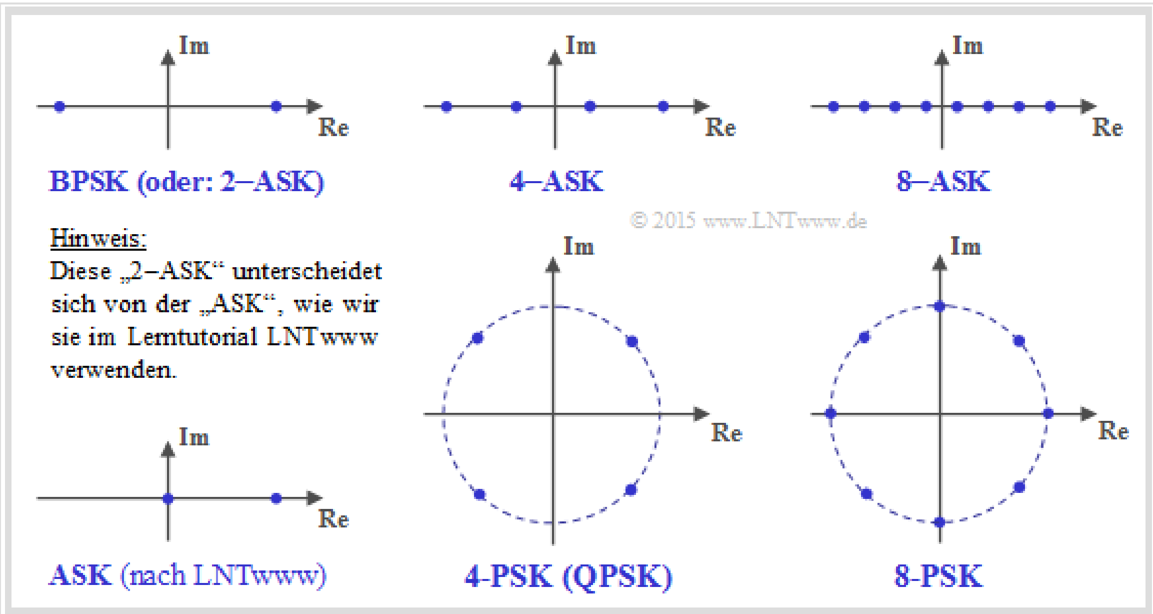
Die Grafik zeigt AWGN–Kanalkapazitätskurven über der Abszisse $10 \cdot \lg(E_S/N_0)$:

- $C_{\text{Gauß}}$: Shannonsche Grenzkurve,
- C_{BPSK}: gültig für BPSK.

Die beiden weiteren Kurvenverläufe C_{rot} und C_{braun} sollen in den Teilaufgaben (c) und (d) analysiert und möglichen Modulationsverfahren zugeordnet werden.



Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf **Kapitel 4.3.** Die hier genannten Modulationsverfahren werden anhand ihrer Signalraumkonstellation beschrieben:



In der Literatur wird manchmal die BPSK auch mit 2–ASK bezeichnet ⇒ $x \in X = (+1, -1)$. Dagegen verstehen wir im LNTwww als ASK den unipolaren Fall $x \in X = (0, 1)$. Nach unserer Nomenklatur gilt deshalb: $C_{\text{ASK}} < C_{\text{BPSK}}$.

Dieser Sachverhalt hat aber keinen Einfluss auf die Lösung der vorliegenden Aufgabe.

Fragebogen zu "A4.9: Höherstufige Modulation"

a) Welche Gleichung liegt der Shannon–Grenzkurve $C_{\text{Gauß}}$ zugrunde?

- ☐ Es gilt $C_{\text{Gauß}} = C_1 = 1/2 \cdot \log_2 (1 + E_S/N_0)$,
- ☐ Es gilt $C_{\text{Gauß}} = C_2 = 1/2 \cdot \log_2 (1 + 2E_S/N_0)$,
- ☐ Es gilt $C_{\text{Gauß}} = C_3 = \log_2 (1 + E_S/N_0)$.

b) Welche Aussagen treffen für die grüne Kurve C_{BPSK} zu?

- ☐ C_{BPSK} kann nicht in geschlossener Form angegeben werden.
- ☐ C_{BPSK} ist größer als 0, wenn $E_S/N_0 > 0$ vorausgesetzt wird.
- ☐ Für $E_S/N_0 < \ln(2)$ ist $C_{\text{BPSK}} \equiv 0$.
- ☐ Im gesamten Bereich gilt $C_{\text{BPSK}} < C_{\text{Gauß}}$.

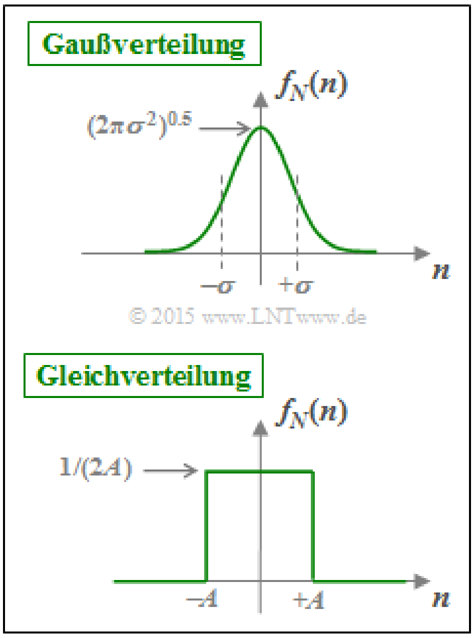
c) Welche Aussagen treffen für die rote Kurve zu?

- ☐ Für die zugehörige Zufallsgröße X gilt $M_X = |X| = 2$.
- ☐ Für die zugehörige Zufallsgröße X gilt $M_X = |X| = 4$.
- ☐ C_{rot} ist gleichzeitig die Kanalkapazität der 4–ASK.
- ☐ C_{rot} ist gleichzeitig die Kanalkapazität der 4–QAM.
- ☐ Für alle $E_S/N_0 > 0$ liegt C_{rot} zwischen „grün” und „braun”.

d) Welche Aussagen treffen für die braune Kurve zu?

- ☐ Für die zugehörige Zufallsgröße gilt $M_X = |X| = 8$.
- ☐ C_{braun} ist gleichzeitig die Kanalkapazität der 8–ASK.
- ☐ C_{braun} ist gleichzeitig die Kanalkapazität der 8–PSK.
- ☐ $p_B = 0$ ist mit 8–ASK, $R = 2.5$ und $(E_S/N_0)_{\text{dB}} = 10$ dB möglich.
- ☐ $p_B = 0$ ist mit 8–ASK, $R = 2$ und $(E_S/N_0)_{\text{dB}} = 10$ dB möglich.

Z4.9: Ist $C_{\rm BPSK} \equiv 1$ möglich?



Wir gehen hier von einem binären bipolaren Quellensignal $\Rightarrow X = (+1, -1)$ aus. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) der Quelle lautet somit:

$$f_X(x) = 1/2 \cdot \delta(x-1) + 1/2 \cdot \delta(x+1)\,.$$

Die Transinformation zwischen der Quelle X und der Sinke Y kann gemäß der folgenden Gleichung berechnet werden:

$$I(X;Y) = h(Y) - h(N)\,,$$

wobei gilt:

- ***h*(*Y*)** bezeichnet die **differentielle Sinkenentropie**:

$$h(Y) = -\int\limits_{{\rm supp}(f_Y)} f_Y(y) \cdot {\rm log}_2 \left[f_Y(y) \right] {\rm d}y\,,$$

$$\text{mit} \quad f_Y(y) = 1/2 \cdot \left[f_{Y|X}(y|X=-1) + f_{Y|X}(y|X=+1) \right]\,.$$

- ***h*(*N*)** gibt die **differentielle Störentropie** an, berechenbar aus der WDF $f_N(n)$:

$$h(N) = -\int\limits_{{\rm supp}(f_N)} f_N(n) \cdot {\rm log}_2 \left[f_N(n) \right] {\rm d}n\,.$$

Nimmt man für die Störung N eine Gaußverteilung $f_N(n)$ entsprechend der oberen Skizze an, so ergibt sich die gewünschte Kanalkapazität $C_{\rm BPSK} = I(X; Y)$, die **im Theorieteil** abhängig von $10 \cdot \lg\,(E_{\rm B}/N_0)$ dargestellt ist.

Beantwortet werden soll in dieser Aufgabe die Frage, ob es einen endlichen $E_{\rm B}/N_0$–Wert gibt, für den **$C_{\rm BPSK}(E_{\rm B}/N_0) \equiv 1$ bit/Kanalzugriff möglich ist** $\Rightarrow$ Teilaufgabe (e).

In den Teilaufgaben (a), ... , (d) werden Vorarbeiten zur Beantwortung dieser Frage geleistet. Dabei wird stets von einer gleichverteilten Stör–WDF $f_N(n)$ ausgegangen (siehe untere Skizze):

$$f_N(n) = \left\{ \begin{array}{c} 1/(2A) \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{*{20}c} \text{für} \\ \text{für} \end{array} \begin{array}{*{20}c} |n| < A, \\ |n| > A. \end{array}$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf **Seite 5b** im Kapitel 4.3.

Fragebogen zu "Z4.9: Ist $C_{\rm BPSK} \equiv 1$ möglich?"

a) Wie groß ist die differentielle Entropie $h(N)$ bei gleichverteilter Störung?

Gleichverteilung, A = 1/8: $h(N)$ = bit

b) Wie groß ist die differentielle Entropie der Sinke?

Gleichverteilung, A = 1/8: $h(Y)$ = bit

c) Wie groß ist die Transinformation zwischen Quelle und Sinke?

$I(X;Y)$ = bit/Symbol

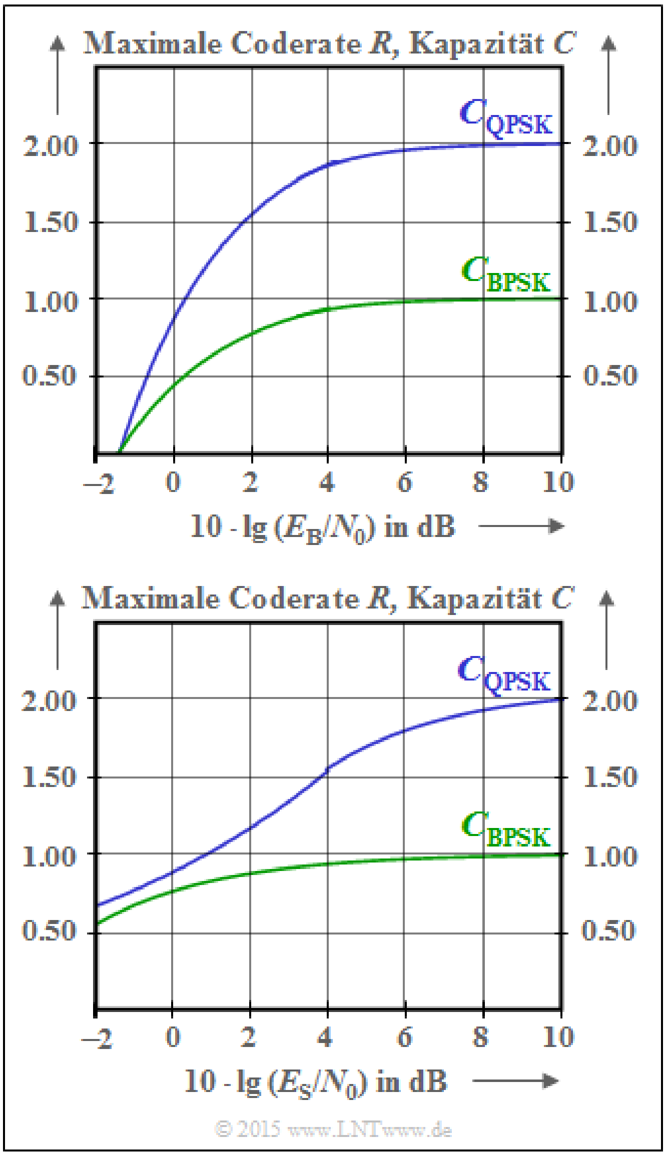
d) Unter welchen Bedingungen ändert sich am Ergebnis (c) nichts?

- [ ] Für jedes $A \le 1$ bei der vorgegebenen Gleichverteilung.
- [ ] Für jede andere WDF $f_N(n)$, wenn $|N| \le 1$ gilt.
- [ ] Wenn sich $f_{Y|X}(y|–1)$ und $f_{Y|X}(y|+1)$ nicht überlappen.

e) Beantworten Sie nun die entscheidende Frage.
Hinweis: Der Quotient $E_{\rm B}/N_0$ wird als endlich vorausgesetzt.

- [ ] $C_{\rm BPSK}(E_{\rm B}/N_0) \equiv 1$ bit/Symbol ist mit Gauß–WDF möglich.
- [ ] Bei endlichem $E_{\rm B}/N_0$ gilt stets $C_{\rm BPSK}(E_{\rm B}/N_0) < 1$ bit/Symbol.

A4.10: QPSK–Kanalkapazität



Gegeben sind AWGN–Kanalkapazitätskurven für die beiden Modulationsverfahren

- **Binary Phase Shift Keying** (BPSK),
- **Quaternary Phase Shift Keying** (4–PSK oder auch QPSK).

Das obere Diagramm zeigt die Abhängigkeit von $10 \cdot \lg (E_{\rm B}/N_0)$ in dB, wobei $E_{\rm B}$ die „Energie pro Informationsbit” angibt. Für große $E_{\rm B}/N_0$–Werte liefert die BPSK–Kurve die maximale Coderate $R \approx 1$, während für die QPSK–Kurve $R \approx 2$ abgelesen werden kann.

Die Kapazitätskurven für digitalen Eingang (jeweils mit der Einheit „bit/Symbol”),

- grüne Kurve $C_{\rm BPSK}(E_{\rm B}/N_0)$ und
- blaue Kurve $C_{\rm QPSK}(E_{\rm B}/N_0)$

sollen in der Teilaufgabe (c) in Bezug gesetzt werden zu zwei Shannon–Grenzkurven, die jeweils für eine Gaußsche Eingangsverteilung gültig sind:

$$C_1(E_{\rm B}/N_0) = \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{2\,R\,E_{\rm B}}{N_0}\right),$$

$$C_2(E_{\rm B}/N_0) = \log_2 \left(1 + \frac{R\,E_{\rm B}}{N_0}\right).$$

Die beiden Kurven geben gleichzeitig die maximale Coderate R an, mit der durch lange Kanalcodes eine fehlerfreie Übertragung entsprechend dem **Kanalcodierungstheorem** möglich ist. Natürlich gelten für $C_1(E_{\rm B}/N_0)$ bzw. $C_2(E_{\rm B}/N_0)$ unterschiedliche Randbedingungen. Welche, sollen Sie herausfinden.

Die Abszisse im unteren Diagramm ist dagegen $10 \cdot \lg (E_{\rm S}/N_0)$ mit der „Energie pro Symbol” ($E_{\rm S}$). Die beiden Endwerte bleiben gegenüber oben unverändert.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.3.**

Fragebogen zu "A4.10: QPSK–Kanalkapazität"

a) Unterscheiden sich QPSK und 4–QAM aus informationstechnischer Sicht?

- ○ Ja.
- ○ Nein.

b) Wie lässt sich $C_{\rm QPSK}(E_{\rm B}/N_0)$ aus $C_{\rm BPSK}(E_{\rm B}/N_0)$ konstruieren?

- ☐ Durch Verdopplung: $C_{\rm QPSK}(E_{\rm B}/N_0) \ = \ 2 \cdot C_{\rm BPSK}(E_{\rm B}/N_0)$.
- ☐ Zusätzlich durch eine Verschiebung nach rechts.
- ☐ Zusätzlich durch eine Verschiebung nach links.
- ☐ $C_{\rm QPSK}(E_{\rm B}/N_0)$ kann man aus $C_{\rm BPSK}(E_{\rm B}/N_0)$ nicht konstruieren.

c) Welcher Zusammenhang besteht zu den Shannon–Grenzkurven?

- ☐ Es gilt $C_{\rm BPSK}(E_{\rm B}/N_0) \le C_1(E_{\rm B}/N_0)$.
- ☐ Es gilt $C_{\rm BPSK}(E_{\rm B}/N_0) \le C_2(E_{\rm B}/N_0)$.
- ☐ Es gilt $C_{\rm QPSK}(E_{\rm B}/N_0) \le C_1(E_{\rm B}/N_0)$.
- ☐ Es gilt $C_{\rm QPSK}(E_{\rm B}/N_0) \le C_2(E_{\rm B}/N_0)$.

d) Wie lässt sich $C_{\rm QPSK}(E_{\rm S}/N_0)$ aus $C_{\rm BPSK}(E_{\rm S}/N_0)$ konstruieren?

- ☐ Durch Verdopplung: $C_{\rm QPSK} \ (E_{\rm S}/N_0) \ = \ 2 \cdot C_{\rm BPSK}(E_{\rm S}/N_0)$.
- ☐ Zusätzlich durch eine Verschiebung nach rechts.
- ☐ Zusätzlich durch eine Verschiebung nach links.
- ☐ $C_{\rm QPSK}(E_{\rm S}/N_0)$ kann man aus $C_{\rm BPSK}(E_{\rm S}/N_0)$ nicht konstruieren.