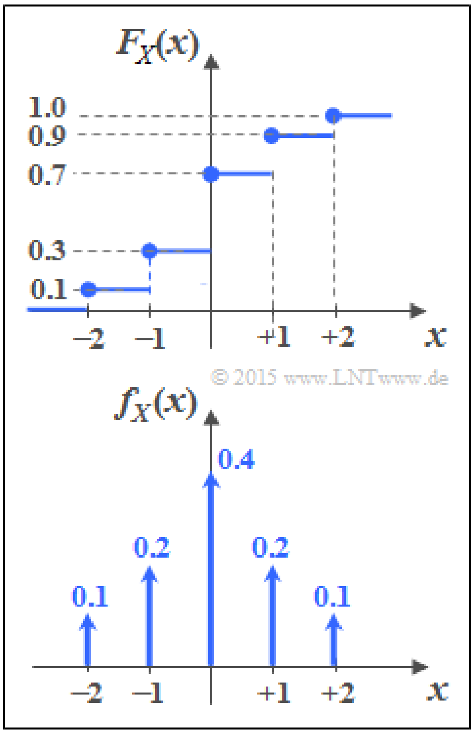
Musterlösung zur Aufgabe A4.1



a) Die Verteilungsfunktion (VTF) $F_X(x)$ ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ durch Integration über die (umbenannte) Zufallsgröße im Bereich von $-\infty$ bis x. Die Umkehrung lautet: Ist die VTF gegeben, so erhält man die WDF durch Differentiation.

Die vorgegebene VTF beinhaltet fünf Unstetigkeitsstellen, die nach der Differentiation zu fünf Diracfunktionen führen:

$$\begin{aligned} f_X(x) \;&=\; 0.1 \cdot \delta(x+2) + 0.2 \cdot \delta(x+1) + \\ &+\; 0.4 \cdot \delta(x) + 0.2 \cdot \delta(x-1) + \\ &+\; 0.1 \cdot \delta(x-2)\,. \end{aligned}$$

Die Diracgewichte geben die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße $X = \{-2, -1, 0, +1, +2\}$ an, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \Pr(X=0) \;&=\; F_X(x \to 0^+) - F_X(x \to 0^-) = \\ &=\; 0.7 - 0.3 = 0.4\,. \end{aligned}$$

Dementsprechend lauten die weiteren Wahrscheinlichkeiten:

$$\Pr(X=+1) = \Pr(X=-1) = 0.2\,, \quad \Pr(X=+2) = \Pr(X=-2) = 0.1\,.$$

Richtig sind somit die <u>Lösungsvorschläge 1 und 2</u>.

b) Aus der eben berechneten WDF erhält man:

$$\begin{aligned} \Pr(X>0) \;&=\; \Pr(X=+1) + \Pr(X=+2) \;\underline{=0.3}\,, \\ \Pr(|X| \le 1) \;&=\; \Pr(X=-1) + \Pr(X=0) + \Pr(X=+1) = 0.2 + 0.4 + 0.2 \;\underline{=0.8}\,. \end{aligned}$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man über die Verteilungsfunktion. Hier lautet die allgemeine Gleichung, die für wertdiskrete und wertkontinuierliche Zufallsgrößen gleichermaßen gilt:

$$\Pr(A < X \le B) = F_X(B) - F_X(A)\,.$$

- Mit $A = 0$ und $B = +2$ erhält man somit:

$$\Pr(0 < X \le +2) = \Pr(X>0) = F_X(+2) - F_X(0) = 1 - 0.7 \;\underline{=0.3}\,.$$

- Setzt man $A = -2$ und $B = +1$, so ergibt sich:

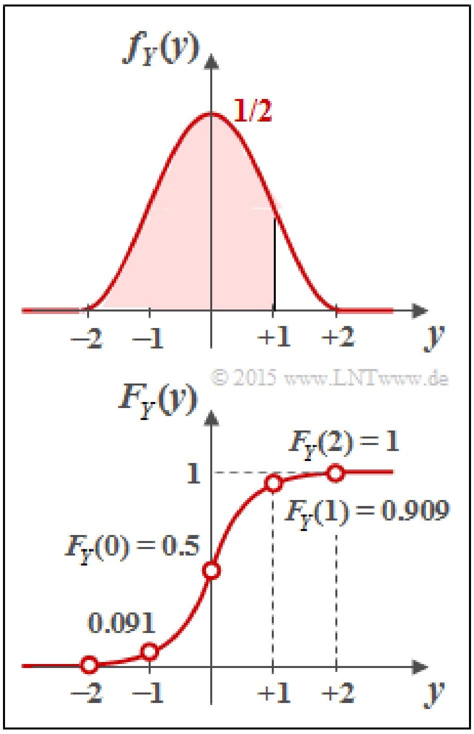
$$\Pr(-2 < X \le +1) = \Pr(|X| \le 1) = F_X(+1) - F_X(-2) = 0.9 - 0.1 \;\underline{=0.8}\,.$$

c) Die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ ergibt sich aus der (umbenannten) WDF $f_Y(\eta)$ durch Integration von $-\infty$ bis y. Aufgrund der Symmetrie kann hierfür im Bereich $0 \le y \le 2$ geschrieben werden:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2} + \int_{0}^{y} f_Y(\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

$$\Rightarrow \quad F_Y(y) = \frac{1}{2} + \int_{0}^{y} \frac{1}{2} \cdot \cos^2\!\left(\frac{\pi}{4} \cdot \eta\right)\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2} + \frac{y}{4} + \frac{1}{2\pi} \cdot \sin\!\left(\frac{\pi}{2} \cdot y\right).$$

Die Gleichung gilt im gesamten Bereich $-2 \le y \le +2$. Die gesuchten VTF–Werte sind damit:



- $F_Y(y = 0) \underline{= 0.5}$ (Integral über die halbe WDF)
- $F_Y(y = 2) \underline{= 1}$ (Integral über die gesamte WDF)
- $F_Y(y \underline{= 1)} = 3/4 + 1/(2\,\pi) \approx \underline{0.909}$ (rot hinterlegte Fläche in der WDF)

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass die wertkontinuierliche Zufallsgröße Y im Bereich von $-\varepsilon$ bis $+\varepsilon$ liegt, kann mit der angegebenen Gleichung wie folgt berechnet werden:

$$\Pr(-\varepsilon \le Y \le +\varepsilon) = F_Y(+\varepsilon) - F_Y(-\varepsilon)\,.$$

Berücksichtigt wurde, dass man bei der kontinuierlichen Zufallsgröße Y das „$<$"–Zeichen ohne Verfälschung durch das „$\le$"–Zeichen ersetzen kann. Mit dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}\Pr(Y = 0) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \Pr(-\varepsilon \le Y \le +\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_Y(+\varepsilon) - \lim_{\varepsilon \to 0} F_Y(-\varepsilon) = \\ &= F_Y(y \to 0^+) - F_Y(y \to 0^-)\,.\end{aligned}$$

Da bei einer kontinuierlichen Zufallsgröße die beiden Grenzwerte gleich sind, gilt $\underline{\Pr(Y = 0) = 0}$.

Allgemein gilt: Die Wahrscheinlichkeit $\Pr(Y = y_0)$, dass eine wertkontinuierliche Zufallsgröße Y einen festen Wert y_0 annimmt, ist stets 0.

e) Richtig ist der Lösungsvorschlag 2: Aufgrund der vorliegenden WDF kann das Ergebnis $Y = 3$ ausgeschlossen werden. Das Ergebnis $Y = 0$ ist dagegen durchaus möglich, obwohl $\Pr(Y = 0) = 0$ ist. Führt man zum Beispiel ein Zufallsexperiment $N \to \infty$ mal durch und erhält dabei N_0 mal das Ergebnis $Y = 0$, so gilt bei endlichem N_0 nach der klassischen Definition:

$$\Pr(Y = 0) = \lim_{N \to \infty} N_0/N = 0\,.$$

f) Wir gehen wieder von der Gleichung $\Pr(A \le Y \le B) = F_Y(B) - F_Y(A)$ aus. Mit $A = 0$ und $B \to \infty$ (bzw. $B = 2$) erhält man:

$$\Pr(Y > 0) = \Pr(0 \le Y \le \infty) = \Pr(0 \le Y \le 2) = F_Y(2) - F_Y(0) \; \underline{= 0.5}\,.$$

Bei der symmetrischen kontinuierlichen Zufallsgröße Y ist erwartungsgemäß $\Pr(Y > 0) = 1/2$. Obwohl auch die wertdiskrete Zufallsgröße X symmetrisch um $x = 0$ ist, wurde dagegen oben $\Pr(X > 0) = 0.3$ ermittelt. Weiter erhält man mit $A = -1$ und $B = +1$ wegen $F_Y(-1) = 1 - F_Y(+1)$:

$$\begin{aligned}\Pr(|Y| \le 1) &= \Pr(-1 \le Y \le +1) = F_Y(+1) - F_Y(-1) = \\ &= 2 \cdot F_Y(+1) - 1 = 2 \cdot 0.909 - 1 \; \underline{= 0.818}\,.\end{aligned}$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.1

a) Die Fläche unter der WDF muss immer 1 sein. Daraus folgt für die Exponentialverteilung:

$$A_X \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x = A_X \cdot (-1/\lambda) \cdot \left[\mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\right]_0^\infty = A_X \cdot (1/\lambda) \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad A_X = \lambda\,.$$

Richtig ist somit der Lösungsvorschlag 2.

b) Aus der Grafik auf der Angabenseite erkennt man, dass die Höhe A_Y der Laplaceverteilung nur halb so groß ist wie das Maximum der Exponentialverteilung $\Rightarrow A_Y = \lambda/2$ $\Rightarrow$ Lösungsvorschlag 1.

c) Richtig ist JA, obwohl für $z \neq 0$ stets $f_X(z) \neq f_Y(z)$ gilt. Betrachten wir nun den Sonderfall $z = 0$:

- Für die Laplaceverteilung gilt $f_Y(0) = \lambda/2$.
- Bei der Exponentialverteilung unterscheiden sich der links- und der rechtsseitige Grenzwert für $x \to 0$. Der WDF–Wert an der Stelle $x = 0$ ist der Mittelwert dieser beiden Grenzwerte:

$$f_X(0) = \frac{1}{2} \cdot [0 + \lambda] = \lambda/2 = f_Y(0)\,.$$

d) Bei der Exponentialverteilung erhält man entsprechend **[BS01]** für

- den linearen Mittelwert (Moment erster Ordnung):

$$m_1 = \lambda \cdot \int_0^\infty x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \left[\frac{\mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}}{(-\lambda)^2} \cdot (-\lambda \cdot x - 1)\right]_0^\infty = 1/\lambda\,,$$

- den quadratischen Mittelwert (Moment zweiter Ordnung):

$$m_2 = \lambda \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \left[\mathrm{e}^{-\lambda \cdot x} \cdot \left(\frac{x^2}{-\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\right)\right]_0^\infty = 2/\lambda^2\,.$$

Daraus ergibt sich mit dem Satz von Steiner für die Varianz der Exponentialverteilung:

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 1/\lambda\,.$$

Richtig sind also alle Lösungsvorschläge. *Hinweis:* Bei der Exponentialverteilung berechnet sich das Moment k–ter Ordnung allgemein zu $m_k = k!/\lambda^k \;\Rightarrow\; m_1 = 1/\lambda,\;\; m_2 = 2/\lambda^2,\;\; m_3 = 6/\lambda^3$, ...

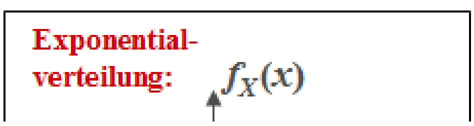
e) Richtig ist nur der Lösungsvorschlag 2: Der quadratische Mittelwert der Laplaceverteilung ist aufgrund der symmetrischen WDF genau so groß wie bei der Exponentialverteilung:

$$m_2 = \frac{\lambda}{2} \cdot \int_{-\infty}^\infty y^2 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot |y|}\,\mathrm{d}y = \lambda \cdot \int_0^\infty y^2 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot y}\,\mathrm{d}y = 2/\lambda^2\,.$$

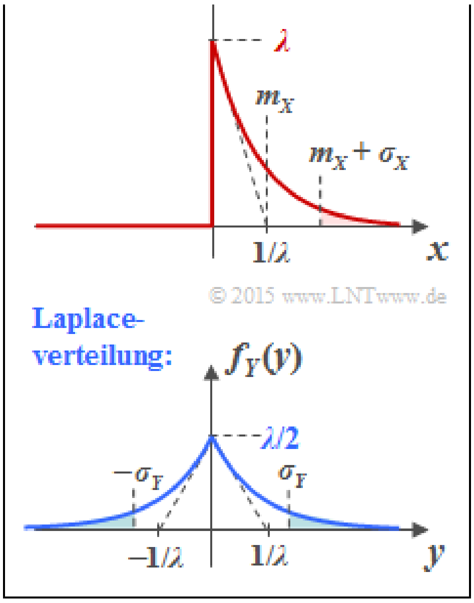
Der Mittelwert der Laplaceverteilung ist $m_1 = 0$. Damit ist die Varianz der Laplaceverteilung doppelt so groß wie bei der Exponentialverteilung:

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = 2/\lambda^2 - 0 = 2/\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{2}/\lambda\,.$$

f) Für die Exponentialverteilung ergibt sich entsprechend der oberen Grafik mit $m_X = \sigma_X = 1/\lambda$:



$$\Pr(|X - m_X| > \sigma_X) = \Pr(X > 2/\lambda) =$$
$$= \lambda \cdot \int_{2/\lambda}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x = -\left[\mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\right]_{2/\lambda}^{\infty} =$$
$$= \mathrm{e}^{-2}\ \underline{\approx 0.135}\,.$$



Für die Laplaceverteilung (untere Grafik) erhält man mit $m_Y = 0$ und $\sigma_Y = 2^{0.5}/\lambda$:

$$\Pr(|Y - m_Y| > \sigma_Y) = 2 \cdot \Pr(Y > \sqrt{2}/\lambda) =$$
$$= 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \int_{\sqrt{2}/\lambda}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\right]_{\sqrt{2}/\lambda}^{\infty} =$$
$$- \ \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\ \underline{\approx 0.243}\,.$$

Ein Vergleich der schraffierten Flächen in nebenstehender Grafik bestätigt das Ergebnis qualitativ: Die blauen Flächen sind zusammen etwas größer als die rote Fläche.

Musterlösung zur Aufgabe A4.2

a) Für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gilt im Bereich $0 \le X \le 1$ vereinbarungsgemäß:

$$f_X(x) = 2x = C \cdot x\,.$$

Wir haben hierbei „2" durch C ersetzt ⇒ Verallgemeinerung, um in der Teilaufgabe (c) die nachfolgende Berechnung nochmals nutzen zu können.

Da die differentielle Entropie in „nat" gesucht ist, verwenden wir den natürlichen Logarithmus. Mit der Substitution $\xi = C \cdot x$ erhalten wir folgendes Integral:

$$\begin{aligned} h_{\rm nat}(X) &= -\int_0^1 C \cdot x \cdot \ln\,[C \cdot x]\,{\rm d}x = -\frac{1}{C} \cdot \int_0^C \xi \cdot \ln\,[\xi]\,{\rm d}\xi = \\ &= -\frac{\xi^2}{C} \cdot \left[\frac{\ln\,(\xi)}{2} - \frac{1}{4}\right]_{\xi=0}^{\xi=C}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde das vorne angegebene unbestimmte Integral benutzt. Nach Einsetzen der Grenzen erhält man hieraus unter Berücksichtigung von $C = 2$:

$$\begin{aligned} h_{\rm nat}(X) &= -C/2 \cdot [\ln\,(C) - 1/2] = -\ln\,(2) + 1/2 = -\ln\,(2) + 1/2 \cdot \ln\,({\rm e}) = \\ &= \ln\,(\sqrt{\rm e}/2) = \ln\,(0.824) = -0.193 \quad\Rightarrow\quad h(X) \;\underline{= -0.193\,{\rm nat}}\,. \end{aligned}$$

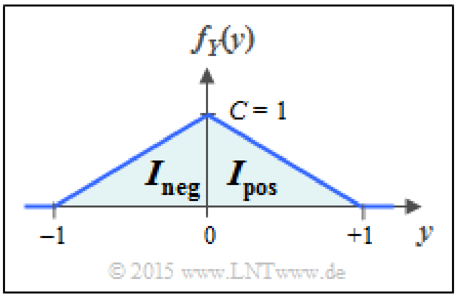
b) Allgemein gilt:

$$h_{\rm bit}(X) = \frac{h_{\rm nat}(X)}{\ln\,(2)\,{\rm nat/bit}} = -0.279 \quad\Rightarrow\quad h(X) \;\underline{= -0.279\,{\rm bit}}\,.$$

Diese Umrechnung kann man sich sparen, wenn man bereits im analytischen Ergebnis der Teilaufgabe a) direkt „ln" durch „$\log_2$" ersetzt:

$$h(X) = \log_2\,(\sqrt{\rm e}/2)\,, \qquad {\rm Pseudo-Einheit:}\ \ {\rm bit}\,.$$

c) Wir verwenden wieder den natürlichen Logarithmus und teilen das Integral in zwei Teilintegrale auf:



$$h(Y) = -\int_{{\rm supp}(f_Y)} f_Y(y) \cdot \ln\,[f_Y(y)]\,{\rm d}y = I_{\rm neg} + I_{\rm pos}\,.$$

Das erste Integral (Bereich $-1 \le y \le 0$) ist formgleich mit dem der Teilaufgabe (a) und gegenüber diesem nur verschoben, was das Ergebnis nicht beeinflusst. Zu berücksichtigen ist nun die Höhe $C = 1$ anstelle von $C = 2$:

$$I_{\rm neg} = -C/2 \cdot [\ln\,(C) - 1/2] = -1/2 \cdot [\ln\,(1) - 1/2 \cdot \ln\,({\rm e})] = 1/4 \cdot \ln\,({\rm e})\,.$$

Der zweite Integrand ist bis auf eine Verschiebung und Spiegelung identisch mit dem ersten. Außerdem überlappen sich die Integrationsintervalle nicht ⇒ $I_{\rm pos} = I_{\rm neg}$:

$$\begin{aligned} &h_{\rm nat}(Y) = 2 \cdot I_{\rm neg} = 1/2 \cdot \ln\,({\rm e}) = \ln\,(\sqrt{\rm e}) \\ &\Rightarrow\quad h_{\rm bit}(Y) = \log_2\,(\sqrt{\rm e}) \quad\Rightarrow\quad h(Y) = \log_2\,(1.649) \;\underline{= 0.721\,{\rm bit}}\,. \end{aligned}$$

d) Für die differentielle Entropie der Zufallsgröße $Z = A \cdot Y$ gilt allgemein:

$$h(Z) = h(A \cdot Y) = h(Y) + \log_2(A)\,.$$

Aus der Forderung $h(Z) = 1$ bit und dem Ergebnis der Teilaufgabe (c) folgt somit:

$$\log_2(A) = 1\,\text{bit} - 0.721\,\text{bit} = 0.279\,\text{bit} \quad \Rightarrow \quad A = 2^{0.279} \;\underline{= 1.213}\,.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.2

a) Das Integral über die WDF muss 1 ergeben:

$$f_X(x)\,\mathrm{d}x = 0.25 \cdot 2 + (A - 0.25) \cdot \varepsilon \stackrel{!}{=} 1$$
$$\Rightarrow \quad (A - 0.25) \cdot \varepsilon \stackrel{!}{=} 0.5 \quad \Rightarrow \quad A = 0.5/\varepsilon + 0.25\,.$$

Richtig ist also der <u>Lösungsvorschlag 2</u>.

b) Die differentielle Entropie (in „bit”) ist wie folgt gegeben:

$$h(X) = \int_{\mathrm{supp}(f_X)} f_X(x) \cdot \log_2 \frac{1}{f_X(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Wir unterteilen nun das Integral in drei Teilintegrale:

$$\begin{aligned} h(X) &= \int_0^{1-\varepsilon/2} 0.25 \cdot \log_2 \frac{1}{0.25}\,\mathrm{d}x + \int_{1+\varepsilon/2}^{2} 0.25 \cdot \log_2 \frac{1}{0.25}\,\mathrm{d}x + \\ &+ \int_{1-\varepsilon/2}^{1+\varepsilon/2} [0.5/\varepsilon + 0.25] \cdot \log_2 \frac{1}{0.5/\varepsilon + 0.25}\,\mathrm{d}x = \\ &= 2 \cdot 0.25 \cdot 2 \cdot (2 - \varepsilon) - (0.5 + 0.25 \cdot \varepsilon) \cdot \log_2 (0.5/\varepsilon + 0.25)\,. \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man

- für $\varepsilon = 0.1$:

$$h(X) = 1.9 - 0.525 \cdot \log_2 (5.25) = 1.9 - 1.256 \ \underline{= 0.644\ \mathrm{bit}}\,,$$

- für $\varepsilon = 0.01$:

$$h(X) = 1.99 - 0.5025 \cdot \log_2 (50.25) = 1.99 - 2.84 \ \underline{= -0.850\ \mathrm{bit}}\,,$$

- für $\varepsilon = 0.001$:

$$h(X) = 1.999 - 0.50025 \cdot \log_2 (500.25) = 1.999 - 8.967 \ \underline{= -6.968\ \mathrm{bit}}\,.$$

c) <u>Alle Lösungsvorschläge</u> sind hier zutreffend. Nach dem Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ erhält man für die differentielle Entropie

$$\begin{aligned} h(X) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(2 - \varepsilon) - (0.5 + 0.25 \cdot \varepsilon) \cdot \log_2 (0.5/\varepsilon + 0.25)] = \\ &= 2\,\mathrm{bit} - 0.5 \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log_2 (0.5/\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad -\infty\,. \end{aligned}$$

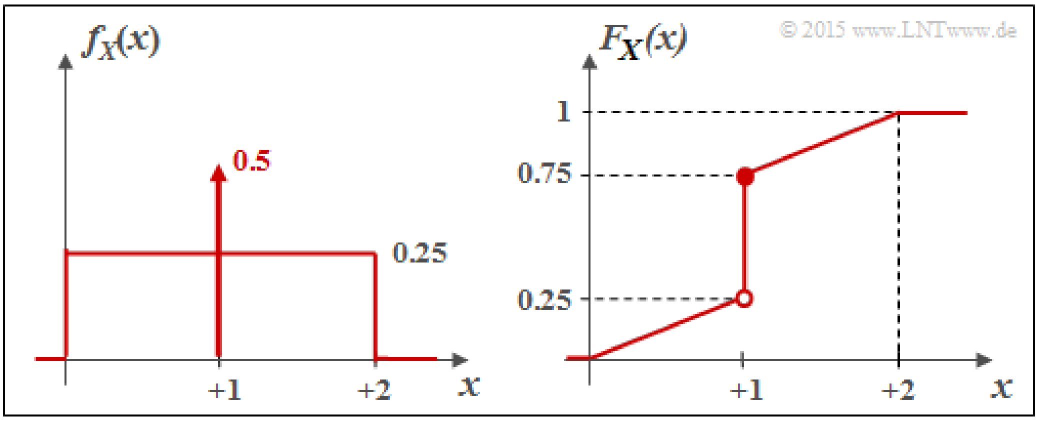
Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) ergibt sich in diesem Fall zu

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{c} 0.25 + 0.5 \cdot \delta(x-1) \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} \text{für } 0 \le x \le 2, \\ \text{sonst} \end{array}\,.$$

Es handelt sich demzufolge um eine „gemischte” Zufallsgröße mit

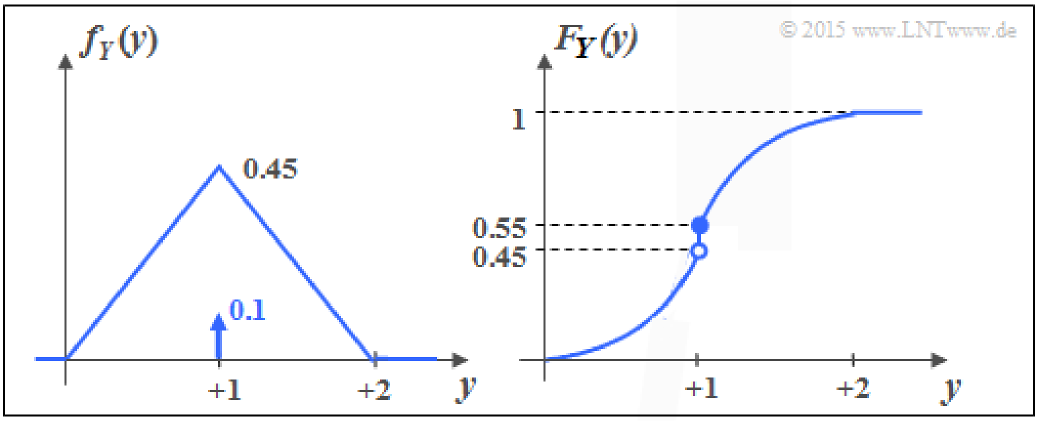
- einem stochastischen, gleichverteilten Anteil zwischen $0 \le x \le 2$, und
- einem diskreten Anteil bei $x = 1$ mit der Wahrscheinlichkeit 0.5.

Die Grafik zeigt links die WDF $f_X(x)$ und rechts die Verteilungsfunktion (kurz VTF) $F_X(x)$.



d) Richtig sind die Lösungsvorschläge 2, 3 und 5. Die untere Grafik zeigt die WDF und die VTF der Zufallsgröße Y. Man erkennt:

- Y beinhaltet wie X sowohl einen kontinuierlichen als auch einen diskreten Anteil.
- Der diskrete Anteil tritt mit der Wahrscheinlichkeit $\Pr(Y = 1) = 0.1$ auf.
- Da $F_Y(y) = \Pr(Y \le y)$ gilt, ergibt sich der rechtsseitige Grenzwert: $F_Y(y = 1) = 0.55$.
- Der kontinuierliche Anteil ist nicht gleichverteilt; vielmehr liegt eine Dreieckverteilung vor.



Richtig ist auch der letzte Vorschlag: $h(Y) = h(X) = -\infty$. Denn: Bei einer jeden Zufallsgröße mit einem diskreten Anteil – und ist er auch noch so klein, ist die differentielle Entropie gleich minus unendlich.

Musterlösung zur Aufgabe A4.3

a) Wir gehen von der mittelwertfreien Gauß–WDF aus:

$$f_X(x) = f_4(x) = A \cdot \exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}] \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

Logarithmiert man diese Funktion, so erhält man als Ergebnis den Lösungsvorschlag 1:

$$\ln\,[f_X(x)] = \ln\,(A) + \ln\left[\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})\right] = \ln\,(A) - \frac{x^2}{2\sigma^2}.$$

b) Mit diesem Ergebnis erhält man für die differentielle Entropie in „nat”:

$$h_{\rm nat}(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot \ln\,[f_X(x)]\;{\rm d}x =$$
$$= -\ln\,(A) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\;{\rm d}x + \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\;{\rm d}x = -\ln\,(A) + \frac{1}{2}.$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass das erste Integral gleich 1 ist (WDF–Fläche) und das zweite Integral gleich die Varianz σ^2 angibt (wenn wie hier der Gleichanteil $m_1 = 0$ ist).

Ersetzt man die Abkürzungsvariable A, so erhält man:

$$h_{\rm nat}(X) = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \ln\,(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2} \cdot \ln\,({\rm e}) = \frac{1}{2} \cdot \ln\,(2\pi{\rm e} \cdot \sigma^2)\;.$$

Soll die differentielle Entropie $h(X)$ nicht in „nat” angegeben werden, sondern in „bit”, so ist für den Logarithmus die Basis 2 zu wählen:

$$h_{\rm bit}(X) = \frac{1}{2} \cdot \log_2\,(2\pi{\rm e} \cdot \sigma^2)\;.$$

Das heißt: Hier sind beide Lösungsvorschläge richtig.

c) Nach der impliziten Definition $h(X) = 1/2 \cdot \log_2\,(\Gamma_{\rm L} \cdot \sigma^2)$ ergibt sich somit für die Kenngröße:

$$\Gamma_{\rm L} = 2\pi{\rm e} \approx \underline{17.08}\,.$$

d) Wir betrachten nun eine Gaußsche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit Mittelwert m_1:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}\right]\;.$$

Das zweite Moment $m_2 = {\rm E}[|X|^2]$ kann man auch als die Leistung P bezeichnen, während für die Varianz gilt: $\sigma^2 = {\rm E}[|X - m_1|^2] = \mu_2$ (ist gleichzeitig das zweite Zentralmoment). Nach dem Satz von Steiner gilt $P = m_2 = m_1^2 + \sigma^2$. Unter der Voraussetzung $m_1 = \sigma = 1$ ist somit $P/\sigma^2 \,\underline{= 2}$.

Durch den Gleichanteil wird zwar die Leistung verdoppelt. An der differentiellen Entropie ändert sich dadurch aber nichts. Es gilt somit weiterhin:

$$h(X) = 1/2 \cdot \log_2\,(2\pi{\rm e} \cdot \sigma^2) = 1/2 \cdot \log_2\,(17.08) \approx \underline{2.047\;{\rm bit}}\,.$$

e) In der vervollständigten Tabelle sind auch die numerischen Werte der Kenngrößen $\Gamma_{\rm L}$ und $\Gamma_{\rm A}$ eingetragen.

WDF $f_X(x)$	Differentielle Entropie $h(X)$: $\log(\Gamma_{\rm A} \cdot A)$	$1/2 \cdot \log(\Gamma_{\rm L} \cdot \sigma^2)$
$f_1(x)$	$\Gamma_{\rm A} = 2$	$\Gamma_{\rm L} = 12$
$f_2(x)$	$\Gamma_{\rm A} = {\rm e}^{1/2} \approx 1.649$	$\Gamma_{\rm L} = 6{\rm e} \approx 16.31$
$f_3(x)$	$\Gamma_{\rm A} = -\infty$	$\Gamma_{\rm L} = 2{\rm e}^2 \approx 14.78$
$f_4(x)$	$\Gamma_{\rm A} = -\infty$	$\Gamma_{\rm L} = 2\pi{\rm e} \approx 17.08$

Eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ ist bei Leistungsbegrenzung immer dann besonders günstig, wenn der Wert $\Gamma_{\rm L}$ (rechte Spalte) möglichst groß ist. Dann ist die differentielle Entropie $h(X)$ ebenfalls groß.

Die numerischen Ergebnisse lassen sich wie folgt interpretieren:

- Wie im **Theorieteil** bewiesen, führt die Gaußverteilung $f_4(x)$ hier zum größtmöglichen $\Gamma_{\rm L} \approx 17.08$ ⇒ Lösungsvorschlag 1 ist richtig (Wert in der letzten Spalte rot markiert).
- Für die Gleichverteilung $f_1(x)$ ist die Kenngröße $\Gamma_{\rm L} = 12$ die kleinste in der gesamten Tabelle ⇒ Lösungsvorschlag 2 ist falsch.
- Die Dreieckverteilung $f_2(x)$ ist mit $\Gamma_{\rm L} = 16.31$ günstiger als die Gleichverteilung und auch besser als die Laplaceverteilung ($f_3(x$, $\Gamma_{\rm L} = 14.78$) ⇒ auch Lösungsvorschlag 3 ist falsch.

f) Eine WDF $f_X(x)$ ist unter der Nebenbedingung der Spitzenwertbegrenzung ⇒ $|X| \le A$ günstig hinsichtlich der differentiellen Entropie $h(X)$, wenn $\Gamma_{\rm A}$ (mittlere Spalte) möglichst groß ist:

- Wie im **Theorieteil** gezeigt wird, führt die Gleichverteilung $f_1(x)$ hier zum größtmöglichen $\Gamma_{\rm A} = 2$ ⇒ Lösungsvorschlag 2 ist richtig (Wert in der mittleren Spalte rot markiert).
- Die ebenfalls spitzenwertbegrenzte Dreieckverteilung $f_2(x)$ ist durch ein etwas kleineres $\Gamma_{\rm A} = 1.649$ gekennzeichnet ⇒ Lösungsvorschlag 3 ist falsch.
- Die Gaußverteilung $f_4(x)$ ist unendlich weit ausgedehnt. Eine Spitzenwertbegrenzung auf $|X| \le A$ führt hier zu Diracfunktionen in der WDF ⇒ $h(X) = -\infty$, siehe **Aufgabe Z4.2 – Musterlösung.**
- Gleiches würde auch für die Laplaceverteilung $f_3(x)$ gelten.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.3

a) Obwohl in dieser Aufgabe das Ergebnis in „bit” angegeben werden soll, verwenden wir zur Herleitung den natürlichen Logarithmus. Dann gilt für die differentielle Entropie:

$$h(X) = -\int_{x \in \mathrm{supp}(f_X)} f_X(x) \cdot \ln\,[f_X(x)]\;\mathrm{d}x\,.$$

Für die Exponentialverteilung sind die Integrationsgrenzen 0 und +∞ anzusetzen. In diesem Bereich wird die auf dem Angabenblatt angegebene WDF $f_X(x)$ eingesetzt:

$$h(X) = -\int_0^{\infty} \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x} \cdot \left[\ln\,(\lambda) + \ln\,(\mathrm{e}^{-\lambda \cdot x})\right]\;\mathrm{d}x =$$

$$= -\ln\,(\lambda) \cdot \int_0^{\infty} \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x \;+\; \lambda \cdot \int_0^{\infty} \lambda \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Man erkennt:

- Der erste Integrand ist identisch mit der hier betrachteten WDF $f_X(x)$. Das Integral über den gesamten Integrationsbereich ergibt somit 1.
- Das zweite Integral entspricht genau der Definition des Mittelwertes m_1 (Moment erster Ordnung). Für die Exponentialverteilung gilt $m_1 = 1/\lambda$. Daraus folgt:

$$h(X) = -\ln\,(\lambda) + 1 = -\ln\,(\lambda) + \ln\,(\mathrm{e}) = \ln\,(\mathrm{e}/\lambda)\,.$$

Dieses Ergebnis ist mit der Zusatzeinheit „nat” zu versehen. Mit „$\log_2$” anstelle von „ln” erhält man die differentielle Entropie in „bit”:

$$h(X) = \log_2\,(\mathrm{e}/\lambda) \quad\Rightarrow\quad \lambda = 1\!: \;\; h(X) = \log_2\,(\mathrm{e}) = \frac{\ln\,(\mathrm{e})}{\ln\,(2)} \;\underline{= 1.443\,\mathrm{bit}}\,.$$

b) Unter Berücksichtigung der für die Exponentialverteilung gültigen Gleichung $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ kann man das in der Teilaufgabe a) gefundene Ergebnis wie folgt umformen:

$$h(X) = \log_2\,(\mathrm{e}/\lambda) = \frac{1}{2} \cdot \log_2\,(\mathrm{e}^2/\lambda^2) = \frac{1}{2} \cdot \log_2\,(\mathrm{e}^2 \cdot \sigma^2)\,.$$

Ein Vergleich mit der geforderten Grundform $1/2 \cdot \log_2\,(\mathit{\Gamma}_{\rm L} \cdot \sigma^2)$ führt zum Ergebnis:

$$\mathit{\Gamma}_{\rm L} = \mathrm{e}^2 \;\underline{\approx 7.39}\,.$$

c) Bei der Laplaceverteilung unterteilen wir den Integrationsbereich in zwei Teilbereiche:

- Y negativ ⇒ Anteil $h_{\rm neg}(Y)$,
- Y positiv ⇒ Anteil $h_{\rm pos}(Y)$.

Die gesamte differentielle Entropie ergibt sich unter Berücksichtigung von $h_{\rm neg}(Y) = h_{\rm pos}(Y)$ zu

$$h(Y) = h_{\rm neg}(Y) + h_{\rm pos}(Y) = 2 \cdot h_{\rm pos}(Y)$$

$$\Rightarrow \quad h(Y) \;=\; -2 \cdot \int_0^\infty \lambda/2 \cdot {\rm e}^{-\lambda \hspace{0.05cm}\cdot \hspace{0.05cm} y} \cdot \left[{\rm ln}\,(\lambda/2) + {\rm ln}\,({\rm e}^{-\lambda \hspace{0.05cm}\cdot \hspace{0.05cm} y}) \right] \,{\rm d}y =$$

$$= -\,{\rm ln}\,(\lambda/2) \cdot \int_0^\infty \lambda \cdot {\rm e}^{-\lambda \hspace{0.05cm}\cdot \hspace{0.05cm} y}\,{\rm d}y \;+\; \lambda \cdot \int_0^\infty \lambda \cdot y \cdot {\rm e}^{-\lambda \hspace{0.05cm}\cdot \hspace{0.05cm} y}\,{\rm d}y\,.$$

Berücksichtigen wir wiederum, dass

- das erste Integral den Wert 1 ergibt (WDF–Fläche), und
- das zweite Integral den Mittelwert $m_1 = 1/\lambda$ angibt,

so erhalten wir:

$$h(Y) = -\,{\rm ln}\,(\lambda/2) + 1 = -\,{\rm ln}\,(\lambda/2) + {\rm ln}\,({\rm e}) = {\rm ln}\,(2{\rm e}/\lambda)\,.$$

Da das Ergebnis in „bit” gefordert ist, muss noch „ln” durch „$\log_2$” ersetzt werden:

$$h(Y) = {\rm log}_2\,(2{\rm e}/\lambda) \quad\Rightarrow\quad \lambda = 1\text{:}\;\; h(Y) = {\rm log}_2\,(2{\rm e}) \;\underline{= 2.443\,{\rm bit}}\,.$$

d) Bei der Laplaceverteilung gilt der Zusammenhang $\sigma^2 = 2/\lambda^2$. Damit erhält man:

$$h(X) = {\rm log}_2\,(\frac{2{\rm e}}{\lambda}) = \frac{1}{2} \cdot {\rm log}_2\,(\frac{4{\rm e}^2}{\lambda^2}) = \frac{1}{2} \cdot {\rm log}_2\,(2{\rm e}^2 \cdot \sigma^2)$$

$$\Rightarrow \quad \varGamma_{\rm L} = 2 \cdot {\rm e}^2 \;\underline{\approx 14.78}\,.$$

Der $\varGamma_{\rm L}$–Wert ist bei der Laplaceverteilung doppelt so groß wie bei der Exponentialverteilung. Damit ist offensichtlich, dass die Laplaceverteilung hinsichtlich der differentiellen Entropie $h(X)$ deutlich besser ist als die Exponentialverteilung, wenn man von leistungsbegrenzten Signalen ausgeht. Unter der Nebenbedingung der Spitzenwertbegrenzung sind sowohl die Exponential– als auch die Laplaceverteilung völlig ungeeignet, ebenso wie die Gaußverteilung. Diese reichen alle bis ins Unendliche.

Musterlösung zur Aufgabe A4.4

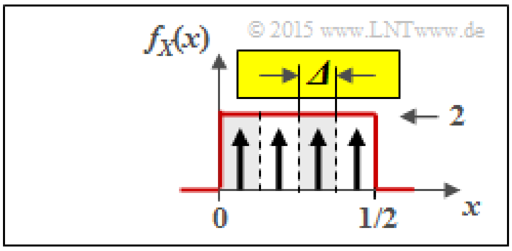
a) Gemäß der entsprechenden **Theorieseite** gilt mit $x_{\rm min}$ = 0 und $x_{\rm max}$ = 1/2:

$$h(X) = \log_2\left(x_{\rm max} - x_{\rm min}\right) = \log_2\left(1/2\right) \;\underline{= -1\,{\rm bit}}\,.$$

b) Mit $y_{\rm min}$ = –1 und $y_{\rm max}$ = +1 ergibt sich für die differentielle Entropie der Zufallsgröße Y:

$$h(Y) = \log_2\left(x_{\rm max} - x_{\rm min}\right) = \log_2\left(2\right) \;\underline{= +1\,{\rm bit}}\,.$$

c) Die nachfolgende Grafik verdeutlicht die bestmögliche Quantisierung der Zufallsgröße X mit der Quantisierungsstufenzahl M = 4 ⇒ Zufallsgröße $Z_{X,\,M\,=\,4}$:



- Die Intervallbreite ist hier gleich Δ = 0.5/4 = 1/8.
- Die möglichen Werte (jeweils in der Intervallmitte) sind z ∈ {0.0625, 0.1875, 0.3125, 0.4375}.
- Die direkte Berechnung der Entropie ergibt mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $P_Z(Z)$ = [1/4, ... , 1/4]:

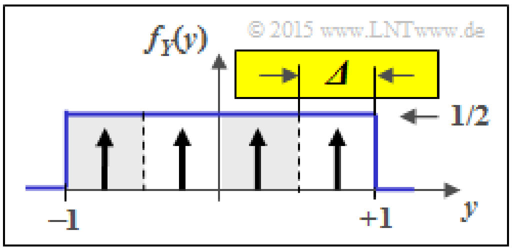
$$H(Z_{X,M=4}) = \log_2\left(4\right) \;\underline{= 2\,{\rm bit}}\,.$$

- Mit der Näherung erhält man unter Berücksichtigung des Ergebnisses der Teilaufgabe (a):

$$H(Z_{X,M=4}) \approx -\log_2\left(\Delta\right) + h(X) = 3\,{\rm bit} + \left(-1\,{\rm bit}\right) \;\underline{= 2\,{\rm bit}}\,.$$

Hinweis: Nur bei der Gleichverteilung liefert die Näherung genau das gleiche Ergebnis.

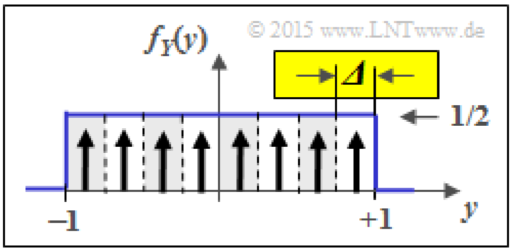
d) Aus der zweiten Grafik erkennt man die Gemeinsamkeiten / Unterschiede zur Teilaufgabe (c):



- Der Quantisierungsparameter ist nun Δ = 2/4 = 1/2.
- Die möglichen Werte sind nun z ∈ {±0.75, ±0.25}.
- Somit liefert hier die „Näherung" (ebenso wie die direkte Berechnung) das Ergebnis:

$$\begin{aligned} H(Z_{Y,M=4}) &\approx -\log_2\left(\Delta\right) + h(Y) = \\ &= 1\,{\rm bit} + 1\,{\rm bit} \;\underline{= 2\,{\rm bit}}\,. \end{aligned}$$

e) Im Gegensatz zur Teilaufgabe (d) gilt nun Δ = 1/4. Daraus folgt für die „Näherung":



$$\begin{aligned} H(Z_{Y,M=8}) &\approx -\log_2\left(\Delta\right) + h(Y) = \\ &= 2\,{\rm bit} + 1\,{\rm bit} \;\underline{= 3\,{\rm bit}}\,. \end{aligned}$$

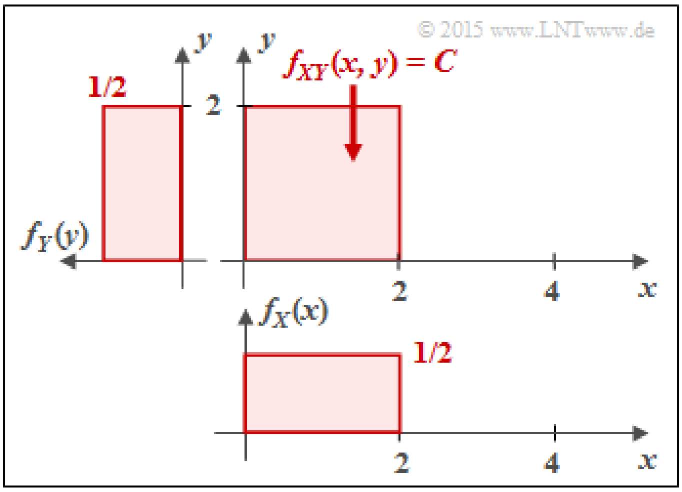
Wieder gleiches Ergebnis bei direkter Berechnung.

f) Richtig ist nur die Aussage 1:

- Die Entropie $H(Z)$ einer diskreten Zufallsgröße $Z = \{z_1, \ldots, z_M\}$ kann nie negativ werden. Der Grenzfall $H(Z)$ = 0 ergibt sich z.B. für $\Pr(Z = z_1) = 1$ und $\Pr(Z = z_\mu) = 0$ für $2 \le \mu \le M$.
- Dagegen kann die differentielle Entropie $h(X)$ einer kontinuierlichen Zufallsgröße X negativ (Teilaufgabe a), positiv (Teilaufgabe b) oder auch $h(X)$ = 0 (z.B. $x_{\rm min}$ = 0, $x_{\rm max}$ = 1) sein.

Musterlösung zur Aufgabe A4.5

a) Bei der rechteckförmigen Verbund–WDF $f_{XY}(x, y)$ gibt es zwischen X und Y keine statistischen Bindungen ⇒ $\underline{I(X; Y) = 0}$.



Formal lässt sich dieses Ergebnis mit der folgenden Gleichung nachweisen:

$$I(X;Y) = h(X) + h(Y) - h(XY).$$

Die rote Fläche 2D–WDF $f_{XY}(x, y)$ ist $F = 4$. Da $f_{XY}(x, y)$ in diesem Gebiet konstant ist und das Volumen unter $f_{XY}(x, y)$ gleich 1 sein muss, gilt $C = 1/F = 1/4$. Daraus folgt für die differentielle Verbundentropie in „bit”:

$$\begin{aligned} h(XY) &= -\iint\limits_{(x,y)\,\in\,\mathrm{supp}(f_{XY})} f_{XY}(x,y) \cdot \log_2 \left[f_{XY}(x,y) \right] \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \log_2\,(4) \cdot \iint\limits_{(x,y)\,\in\,\mathrm{supp}(f_{XY})} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{bit}. \end{aligned}$$

Es ist berücksichtigt, das das Doppelintegral gleich 1 ist. Die Pseudo–Einheit „bit” korrespondiert mit dem *Logarithmus dualis* ⇒ „$\log_2$”. Weiterhin gilt:

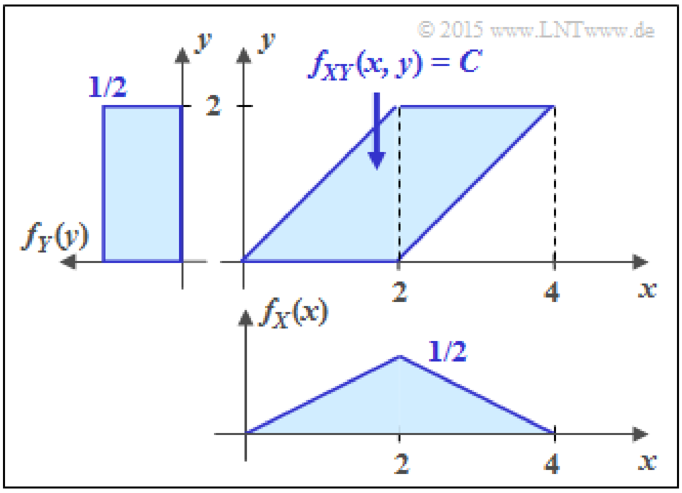
- Die beiden Randwahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ sind jeweils rechteckförmig ⇒ Gleichverteilung zwischen 0 und 2:

$$h(X) = h(Y) = \log_2\,(2) = 1\,\mathrm{bit}.$$

- Setzt man diese Ergebnisse in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$I(X;Y) = h(X) + h(Y) - h(XY) = 1\,\mathrm{bit} + 1\,\mathrm{bit} - 2\,\mathrm{bit} = 0\,(\mathrm{bit}).$$

b) Auch bei diesem Parallelogramm ergibt sich $F = 4$, $C = 1/4$ sowie $h(XY) = 2$ bit. Die Zufallsgröße Y ist hier wie in der Teilaufgabe (a) zwischen 0 und 2 gleichverteilt. Somit gilt weiter $h(Y) = 1$ bit.



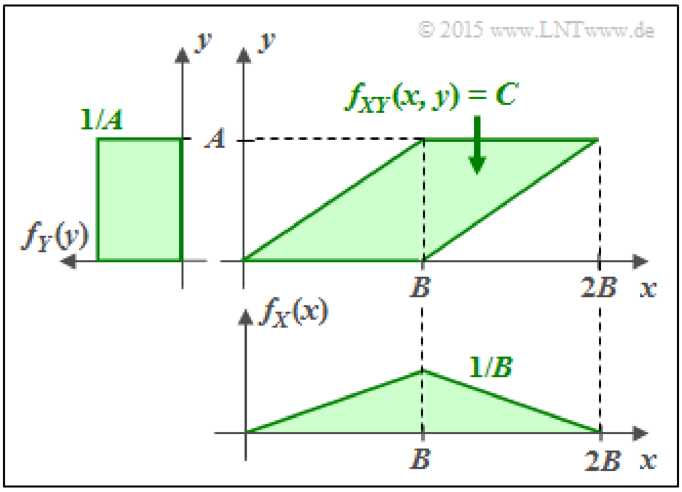
Dagegen ist X dreieckverteilt zwischen 0 und 4 (mit Maximum bei 2). Es ergibt sich hierfür die gleiche differentielle Entropie $h(Y)$ wie bei einer symmetrischen Dreieckverteilung im Bereich zwischen ±2 (siehe Angabenblatt):

$$h(X) = \log_2\left[2 \cdot \sqrt{\mathrm{e}}\right] = 1.721\,\mathrm{bit}$$

$$\Rightarrow \quad I(X;Y) = 1.721\,\mathrm{bit} + 1\,\mathrm{bit} - 2\,\mathrm{bit} \underline{= 0.721\,(\mathrm{bit})}.$$

c) Bei den grünen Gegebenheiten berechnet sich die Verbundentropie wie folgt:

$$F = A \cdot B \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{A \cdot B}$$
$$\Rightarrow \quad h(XY) = \log_2\,(A \cdot B)\,.$$



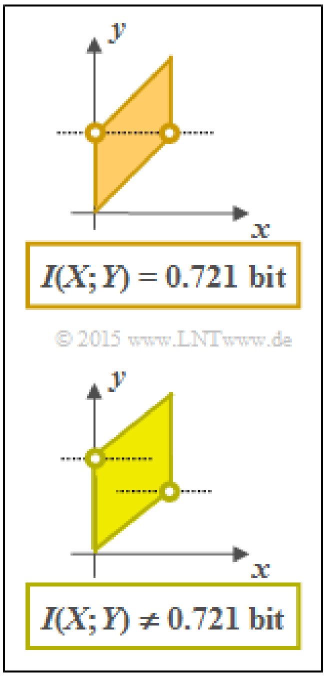
Die Zufallsgröße Y ist nun zwischen 0 und A gleichverteilt und die Zufallsgröße X ist zwischen 0 und B dreieckverteilt:

$$h(X) \;=\; \log_2\,(B \cdot \sqrt{\mathrm{e}})\,,$$
$$h(Y) \;=\; \log_2\,(A)\,.$$

Damit ergibt sich für die Transinformation zwischen X und Y:

$$I(X;Y) \;=\; \log_2\,(B \cdot \sqrt{\mathrm{e}}) + \log_2\,(A) - \log_2\,(A \cdot B) =$$
$$=\; \log_2 \frac{B \cdot \sqrt{\mathrm{e}} \cdot A}{A \cdot B} = \log_2\,(\sqrt{\mathrm{e}}) \;\underline{= 0.721\ \mathrm{bit}}\,.$$

$I(X;\,Y)$ ist somit unabhängig von den WDF–Parametern A und B.



d) Alle genannten Voraussetzungen sind erforderlich. Allerdings sind nicht für jedes Parallelogramm die Forderungen 2 und 3 zu erfüllen. Nebenstehende Grafik zeigt zwei solche Konstellationen, wobei nun die Zufallsgröße X jeweils gleichverteilt ist zwischen 0 und 1.

- Bei der oberen Grafik liegen die beiden eingezeichneten Punkte auf einer Höhe $\Rightarrow$ $f_Y(y)$ ist dreieckverteilt $\Rightarrow$ $I(X;\,Y) = 0.721$ bit.
- Die untere Verbund–WDF besitzt eine andere Transinformation, da die beiden Punkte nicht auf gleicher Höhe liegen $\Rightarrow$ die WDF $f_Y(y)$ hat hier eine Trapezform. Gefühlsmäßig tippe ich auf $I(X;\,Y) < 0.721$ bit, da sich das 2D–Gebiet eher einem Rechteck annähert. Wenn Sie noch Lust haben, so überprüfen Sie das bitte.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.5

a) Hier bietet sich die Verwendung des natürlichen Logarithmus an:

- Die Zufallsgröße X ist gleichverteilt zwischen 0 und $1/\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^{-2}$:

  $$h(X) = \ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right) \underline{= -2\,\mathrm{nat}}\,.$$

- Die Zufallsgröße Y ist dreieckverteilt zwischen $\pm\mathrm{e}^{0.5}$:

  $$h(Y) = \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\cdot\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}\right) \underline{= +1\,\mathrm{nat}}\,.$$

- Die Fläche des Parallelogramms ergibt sich zu

  $$F = A \cdot B = \mathrm{e}^{-2}\cdot\mathrm{e}^{0.5} = \mathrm{e}^{-1.5}\,.$$

  Damit hat die 2D–WDF im grün hinterlegten Bereich die konstante Höhe $C = 1/F = \mathrm{e}^{1.5}$ und man erhält für die Verbundentropie:

  $$h(XY) = \ln\left(F\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-1.5}\right) \underline{= -1.5\,\mathrm{nat}}\,.$$

Daraus ergibt sich für die Transinformation:

$$I(X;Y) = h(X) + h(Y) - h(XY) = -2\,\mathrm{nat} + 1\,\mathrm{nat} - (-1.5\,\mathrm{nat}) \underline{= 0.5\,\mathrm{nat}}\,.$$

b) Allgemein gilt der Zusammenhang $\log_2(x) = \ln(x)/\ln(2)$.

$$\begin{aligned}
h(X) &= \frac{-2\,\mathrm{nat}}{0.693\,\mathrm{nat/bit}} && \underline{= -2.886\,\mathrm{bit}}\,,\\
h(Y) &= \frac{+1\,\mathrm{nat}}{0.693\,\mathrm{nat/bit}} && \underline{= +1.443\,\mathrm{bit}}\,,\\
h(XY) &= \frac{-1.5\,\mathrm{nat}}{0.693\,\mathrm{nat/bit}} && \underline{= -2.164\,\mathrm{bit}}\,,\\
I(X;Y) &= \frac{0.5\,\mathrm{nat}}{0.693\,\mathrm{nat/bit}} && \underline{= 0.721\,\mathrm{bit}}\,.
\end{aligned}$$

Oder auch:

$$I(X;Y) = -2.886\,\mathrm{bit} + 1.443\,\mathrm{bit} + 2.164\,\mathrm{bit} = 0.721\,\mathrm{bit}\,.$$

c) Die Transinformation kann auch in der Form $I(X;\,Y) = h(Y) - h(Y|X)$ geschrieben werden:

$$h(Y\,|\,X) = h(Y) - I(X;Y) = 1\,\mathrm{nat} - 0.5\,\mathrm{nat} \underline{= 0.5\,\mathrm{nat} = 0.721\,\mathrm{bit}}\,.$$

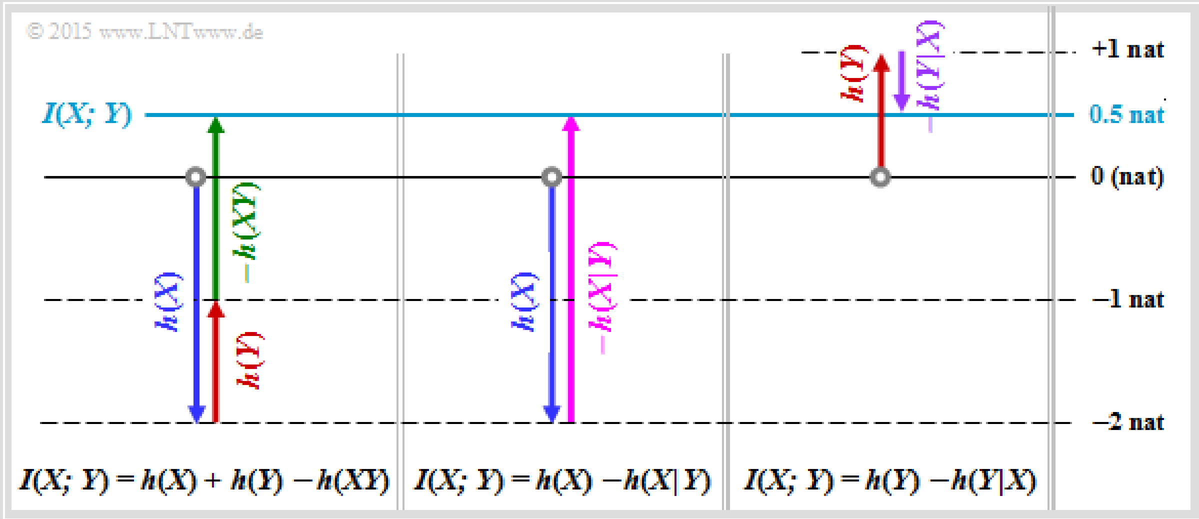
d) Für die differentielle Rückschlussentropie gilt entsprechend:

$$h(X\,|\,Y) = h(X) - I(X;Y) = -2\,\mathrm{nat} - 0.5\,\mathrm{nat} \underline{= -2.5\,\mathrm{nat} = -3.607\,\mathrm{bit}}\,.$$

Alle hier berechneten Größen sind in der Grafik am Seitenende zusammengestellt. Pfeile nach oben kennzeichnen einen positiven Beitrag, Pfeile nach unten einen negativen.

e) Richtig sind die <u>Lösungsvorschläge 1 bis 3</u>. Nochmals zur Verdeutlichung:

- Für die Transinformation gilt stets $I(X;\,Y) \ge 0$.
- Im wertdiskreten Fall gibt es keine negative Entropie, jedoch im wertkontinuierlichen.



© 2015 www.LNTwww.de
I(X; Y)
+1 nat
0.5 nat
0 (nat)
−1 nat
−2 nat
h(X)
h(Y)
−h(XY)
−h(X|Y)
−h(Y|X)
I(X; Y) = h(X) + h(Y) − h(XY)
I(X; Y) = h(X) − h(X| Y)
I(X; Y) = h(Y) − h(Y|X)

Musterlösung zur Aufgabe A4.6

a) Die Gleichung für die AWGN–Kanalkapazität in „bit" lautet:

$$C_{\rm bit} = 1/2 \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_X}{P_N} \right) .$$

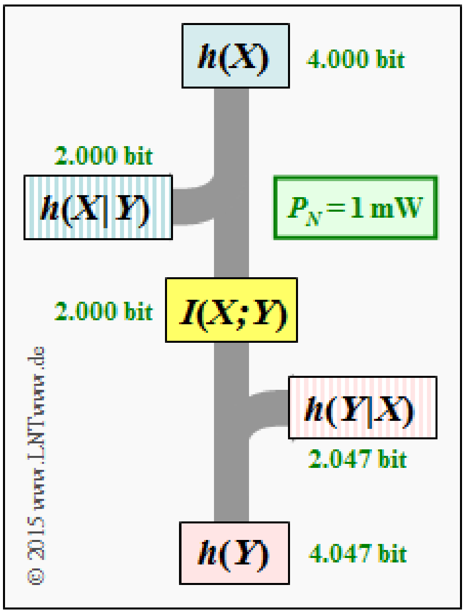
Mit $C_{\rm bit} = 2$ ergibt sich daraus:

$$4 \stackrel{!}{=} \log_2 \left(1 + \frac{P_X}{P_N} \right) \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{P_X}{P_N} \stackrel{!}{=} 2^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad P_X = 15 \cdot P_N \; \underline{= 15\,{\rm mW}} .$$

b) Richtig sind die <u>Lösungsvorschläge 1 bis 4</u>. Begründung:

- Für $P_X < 15$ mW wird die Transinformation $I(X;\,Y)$ stets kleiner als 2 bit sein, unabhängig von allen anderen Gegebenheiten.
- Mit $P_X = 15$ mW ist die maximale Transinformation $I(X;\,Y) = 2$ bit nur erreichbar, wenn die Eingangsgröße X gaußverteilt ist. Die Ausgangsgröße Y ist dann ebenfalls gaußverteilt.
- Weist die Zufallsgröße X einen Gleichanteil m_X auf, so ist die Varianz $\sigma_X^2 = P_X - m_X^2$ bei gegebenem P_X kleiner, und es gilt $I(X;Y) = 1/2 \cdot \log_2 (1 + \sigma_X^2/P_N) < 2$ bit.
- Voraussetzung für die gegebene Kanalkapazitätsgleichung ist, dass X und N unkorreliert sind. Wären dagegen die Zufallsgrößen X und Y unkorreliert, so ergäbe sich $I(X;\,Y) = 0$.

c) Die angegebene Gleichung für die differentielle Entropie macht nur bei dimensionsloser Leistung Sinn. Mit der vorgeschlagenen Normierung erhält man:



- $P_N = 1$ mW $\Rightarrow$ $P'_N = 1$:

$$\begin{aligned} h(N) &= 1/2 \cdot \log_2 (2\pi{\rm e} \cdot 1) = \\ &= 1/2 \cdot \log_2 (17.08) \; \underline{= 2.047\,{\rm bit}} , \end{aligned}$$

- $P_X = 15$ mW $\Rightarrow$ $P'_X = 15$:

$$\begin{aligned} h(X) &= 1/2 \cdot \log_2 (2\pi{\rm e} \cdot 15) = \\ &= \; 1/2 \cdot \log_2 (2\pi{\rm e}) + 1/2 \cdot \log_2 (15) = \\ &= 2.047\,{\rm bit} + 1.953\,{\rm bit} \; \underline{= 4.000\,{\rm bit}} , \end{aligned}$$

- $P_Y = P_X + P_N = 16$ mW $\Rightarrow$ $P'_Y = 16$:

$$h(Y) = 2.047\,{\rm bit} + 2.000\,{\rm bit} \; \underline{= 4.047\,{\rm bit}} .$$

d) Für die differentielle Irrelevanz gilt beim AWGN–Kanal:

$$h(Y\,|\,X) = h(N) \; \underline{= 2.047\,{\rm bit}} .$$

Entsprechend nebenstehender Grafik gilt aber auch:

$$h(Y\,|\,X) = h(Y) - I(X;Y) = 4.047\,{\rm bit} - 2\,{\rm bit} \; \underline{= 2.047\,{\rm bit}} .$$

Entsprechend kann die differentielle Äquivokation wie folgt berechnet werden:

$$h(X\,|\,Y) = h(X) - I(X;Y) = 4.000\,{\rm bit} - 2\,{\rm bit} \; \underline{= 2.000\,{\rm bit}} .$$

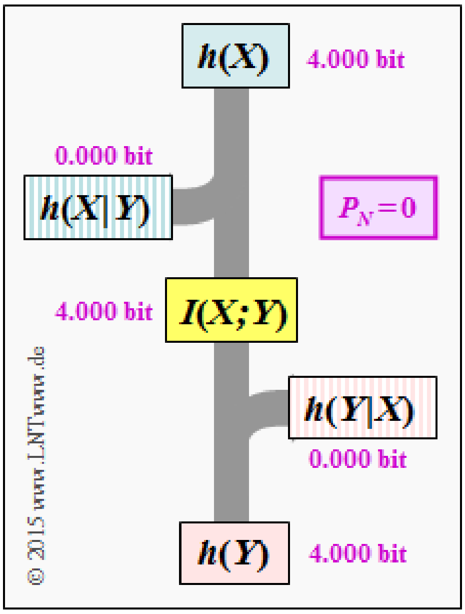
Abschließend wird auch noch die differentielle Verbundentropie angegeben, die aus obigem Schaubild nicht direkt ablesbar ist:

$$h(XY) = h(X) + h(Y) - I(X;Y) = 4.000\,\text{bit} + 4.047\,\text{bit} - 2\,\text{bit} \underline{= 6.047\,\text{bit}}\,.$$

e) Bei einem idealen Kanal erhält man mit <u>$h(X)$ = 4 bit</u>:

$$\begin{aligned} h(Y\,|\,X) &= h(N) \underline{= 0\,(\text{bit})}\,, \\ h(Y) &= h(X) \underline{= 4\,\text{bit}}\,, \\ I(X;Y) &= h(Y) - h(Y\,|\,X) \underline{= 4\,\text{bit}}\,, \\ h(X\,|\,Y) &= h(X) - I(X;Y) \underline{= 0\,(\text{bit})}\,. \end{aligned}$$

Die Grafik zeigt diese Größen in einem Flussdiagramm.



Das gleiche Diagramm ergäbe sich auch im wertdiskreten Fall mit M = 16 gleichwahrscheinlichen Symbolen ⇒ $H(X)$ = 4 bit. Man müsste nur jedes „h" durch ein „H" ersetzen.

Musterlösung zur Aufgabe A4.7

a) Der Parameter K ist gleich der Dimension der Signalraumdarstellung:

- Für ASK und BPSK ist $K = 1$.
- Für die Konstellationen 3 – 5 gilt $K = 2$ (orthogonale Modulation mit Cosinus und Sinus).

b) Für jeden der Kanäle ($1 \le k \le K$) beträgt die Kanalkapazität $C_k = 1/2 \cdot \log_2 (1 + (P_X/k)/P_N)$. Die Gesamtkapazität ist dann um den Faktor K größer ⇒ Lösungsvorschlag 2:

$$C_K(P_X) = \sum_{k=1}^{K} C_k = \frac{K}{2} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_X}{K \cdot P_N}\right).$$

Der Lösungsvorschlag 1 ist zu positiv. Dieser würde bei Begrenzung der Gesamtleistung auf $K \cdot P_X$ gelten. Der Vorschlag 3 würde dagegen bedeuten, dass man durch die Nutzung mehrerer unabhängiger Kanäle keine Kapazitätssteigerung erreicht, was offensichtlich nicht zutrifft.

c) Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse für $K = 1$, $K = 2$ und $K = 4$ und verschiedene Signal–zu–Störleistungsverhältnisse P_X/P_N.

$\xi = P_X/P_N$	0	5	10	15	20	25	30
C_1 in bit ⇒ $K = 1$	0	1.292	1.730	2.000	2.196	2.350	2.477
C_2 in bit ⇒ $K = 2$	0	1.807	2.585	3.087	3.549	3.755	4.000
C_4 in bit ⇒ $K = 4$	0	2.340	3.615	4.496	5.170	5.716	6.175
C_∞ in bit ⇒ $K \to \infty$	0	3.607	7.213	10.820	14.427	18.034	21.640

Für $P_X/P_N = 15$ (markierte Spalte) ergibt sich:

$K = 1$: $C_K = 1/2 \cdot \log_2 (16) = $ 2.000 bit,

$K = 2$: $C_K = 1 \cdot \log_2 (8.5) = $ 3.087 bit,

$K = 4$: $C_K = 2 \cdot \log_2 (4.75) = $ 4.496 bit.

d) Schon aus obiger Tabelle ist ersichtlich, dass der erste Lösungsvorschlag falsch sein muss. Richtig sind vielmehr die Lösungsvorschläge 3 und 4, wie die nachfolgende Rechnung zeigt:

- Wir schreiben die Kanalkapazität mit „ln" und der Abkürzung $\xi = P_X/P_N$:

$$C_{\rm nat}(\xi, K) = \frac{K}{2} \cdot \ln \left(1 + \frac{\xi}{K}\right).$$

- Für große K–Werte, also für kleine Werte von $\varepsilon = \xi/K$ gilt dann:

$$\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \ldots \quad \Rightarrow \quad C_{\rm nat}(\xi, K) = \frac{K}{2} \cdot \left[\frac{\xi}{K} - \frac{\xi^2}{2K^2} + \frac{\xi^3}{3K^3} - \ldots\right]$$

$$\Rightarrow \quad C_{\rm bit}(\xi, K) = \frac{\xi}{2 \cdot \ln(2)} \cdot \left[1 - \frac{\xi}{2K} + \frac{\xi^2}{3K^2} - \frac{\xi^3}{4K^3} + \frac{\xi^4}{5K^4} - \ldots\right].$$

- Für $K \to \infty$ ergibt sich der vorgeschlagene Wert:

$$C_{\rm bit}(\xi, K \to \infty) = \frac{\xi}{2 \cdot \ln(2)} = \frac{P_X/P_N}{2 \cdot \ln(2)}\,.$$

- Für kleinere Werte von K ergibt sich stets ein kleinerer C–Wert, da

$$\frac{\xi}{2K} > \frac{\xi^2}{3K^2}, \qquad \frac{\xi^3}{4K^3} > \frac{\xi^4}{5K^4}, \qquad \text{usw.}$$

Die letzte Zeile der Tabelle zur Teilaufgabe (c) zeigt, dass man für große ξ–Werte mit K = 4 noch weit vom theoretischen Maximum (für $K \to \infty$) entfernt ist.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.7

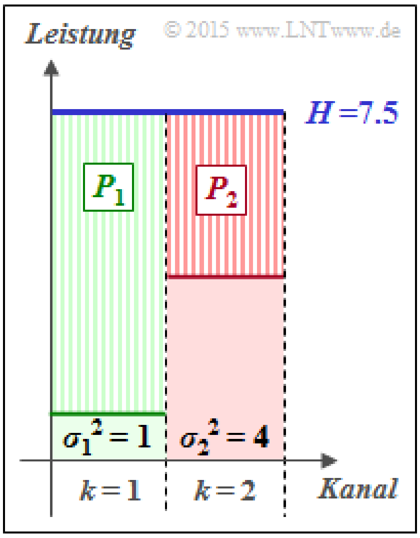
a) Nach den Ausführungen im **Theorieteil** ist die Strategie „Water–Filling" ⇒ Vorschlag 2 anzuwenden, wenn ungleiche Bedingungen vorliegen. Lösungsvorschlag 3 ist aber ebenfalls richtig: Bei gleich guten Kanälen spricht nichts dagegen, alle K Kanäle mit der gleichen Leistung $P_1 = ... = P_K = P_X/K$ zu versorgen.

b) Für die Transinformation gilt bei gleicher Leistungsaufteilung:

$$I = I(X_1, X_2; Y_1, Y_2) = \frac{1}{2} \cdot \log_2\left(1 + \frac{5}{1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \log_2\left(1 + \frac{5}{4}\right) = \\ = 1.292\,\text{bit} + 0.585\,\text{bit} \underline{= 1.877\,\text{bit}}.$$

c) Entsprechend nebenstehender Skizze muss gelten:

$$P_2 = P_1 - (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) = P_1 - 3\,,$$
$$P_1 + P_2 = P_X = 10$$
$$\Rightarrow \quad P_1 + (P_1 - 3) = 10 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot P_1 = 13$$
$$\Rightarrow \quad \underline{P_1 = 6.5}\,, \quad \underline{P_2 = 3.5}\,.$$



d) Die Kanalkapazität gibt die maximale Transinformation an. Das Maximum liegt durch die bestmögliche Leistungsaufteilung gemäß der Teilaufgabe (c) bereits fest. Es gilt $P_X = 10$:

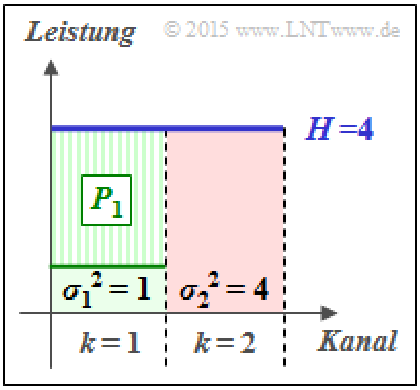
$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \log_2\left(1 + \frac{6.5}{1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \log_2\left(1 + \frac{3.5}{4}\right) = \\ = 1.453\,\text{bit} + 0.453\,\text{bit} \underline{= 1.906\,\text{bit}}.$$

e) Für $P_X = 3$ erhält man bei gleicher Leistungsaufteilung ($P_1 = P_2 = 1.5$):

$$I = I(X_1, X_2; Y_1, Y_2) = \frac{1}{2} \cdot \log_2\left(1 + \frac{1.5}{1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \log_2\left(1 + \frac{1.5}{4}\right) = \\ = 0661\,\text{bit} + 0.230\,\text{bit} \underline{= 0.891\,\text{bit}}.$$

Entsprechend dem Water–Filling–Algorithmus wird die gesamte zur Verfügung stehende Sendeleistung $P_X = 3$ nun dem ersten Kanal zugewiesen:

$$P_1 = 3\,, \quad P_2 = 0\,.$$



Damit erhält man für die Kanalkapazität:

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \log_2\left(1 + \frac{3}{1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \log_2\left(1 + \frac{0}{4}\right) = \\ = 1\,\text{bit} + 0\,\text{bit} \underline{= 1\,\text{bit}}.$$

Während für $P_X = 10$ die Differenz zwischen gleichmäßiger und bester Leistungsaufteilung nur 0.03 bit betragen hat, ist bei $P_X = 3$ die Differenz größer, nämlich 0.109 bit. Bei noch größerem $P_X > 10$ wird der Abstand zwischen gleichmäßiger und bestmöglicher Leistungsaufteilung noch geringer: Zum Beispiel beträgt die Differenz für $P_X = 100$ nur noch 0.001 bit:

- $P_1 = P_2 = 50$:

$$I = I(X_1, X_2; Y_1, Y_2) = \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{50}{1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{50}{4}\right) =$$
$$= 2.836 \text{ bit} + 1.877 \text{ bit} \underline{= 4.713 \text{ bit}}\,.$$

- $P_1 = 51.5$, $P_2 = 48.5$:

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{51.5}{1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{48.5}{4}\right) =$$
$$= 2.857 \text{ bit} + 1.857 \text{ bit} \underline{= 4.714 \text{ bit}}\,.$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.8

a) Ausgehend von der Gleichung

$$C = 1/2 \cdot \log_2 \left(1 + 2 \cdot E_{\rm S}/N_0\right)$$

erhält man mit $C = R$ und $E_{\rm S} = R \cdot E_{\rm B}$ die Gleichung gemäß Lösungsvorschlag 1:

$$R = 1/2 \cdot \log_2 \left(1 + 2 \cdot R \cdot E_{\rm B}/N_0\right).$$

Bringt man den Faktor 1/2 auf die linke Seite der Gleichung und bildet die Potenz zur Basis 2, so erhält man den Lösungsvorschlag 2:

$$2^{2R} = 1 + 2 \cdot R \cdot E_{\rm B}/N_0 \, .$$

Löst man diese Gleichung nach $E_{\rm B}/N_0$ auf, so ergibt sich

$$E_{\rm B}/N_0 = \frac{2^{2R}-1}{2R} \, .$$

Das bedeutet: <u>Alle Lösungsvorschläge</u> sind richtig.

b) Über einen Kanal mit der Kanalkapazität C ist eine fehlerfreie Übertragung möglich, solange die Coderate $R \le C$ ist. Die absolute Grenze ergibt sich im Grenzfall $C = R = 0$. Oder präziser ausgedrückt: für ein beliebig kleines positives ε: $C = R = \varepsilon$ mit $\varepsilon \to 0$.

Mit dem Ergebnis der Teilaufgabe (a) lautet die Bestimmungsgleichung:

$${\rm Min}\,[E_{\rm B}/N_0] = \lim_{R \to 0} \frac{2^{2R}-1}{2R} \, .$$

Da hier der Quotient im Grenzübergang $R \to 0$ das Ergebnis „0 geteilt durch 0" liefert, ist hier die **l'Hospitalsche Regel** anzuwenden: Man differenziert Zähler und Nenner, bildet den Quotienten und setzt schließlich $R = 0$ ein. Mit $x = 2R$ lautet das Ergebnis:

$${\rm Min}\,[E_{\rm B}/N_0] = \lim_{x \to 0} \frac{2^x-1}{x} = \frac{\ln(2) \cdot 2^x}{1}\Bigg|_{x=0} = \ln(2) \underline{\,= 0.693} \, .$$

c) In logarithmierter Form erhält man:

$${\rm Min}\,[10 \cdot {\rm lg}\,(E_{\rm B}/N_0)] = 10 \cdot {\rm lg}\,(0.693) \underline{\,= -1.59\,{\rm dB}} \, .$$

d) Der Abszissenwert lautet somit in nichtlogarithmierter Form: $E_{\rm B}/N_0 = 1$. Daraus folgt mit $C = R$:

$$\frac{2^{2C}-1}{2C} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{C = 0.5} \, .$$

e) Für $R = 1$ ist $E_{\rm B} = E_{\rm S}$. Deshalb gilt:

$$C(E_{\rm B}/N_0) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad C(E_{\rm S}/N_0) = 1 \, .$$

Aus der Tabelle auf der Angabenseite ist abzulesen:

$$C(E_{\rm S}/N_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad E_{\rm S}/N_0 = 1.5 \quad \Rightarrow \quad \underline{E_{\rm B}/N_0 = 1.5} \, .$$

Der dazugehörige dB–Wert ist $10 \cdot {\rm lg}\,(E_{\rm B}/N_0) = 1.76$ dB.

Zum gleichen Ergebnis kommt man mit $R = 1$ über die Gleichung

$$E_{\rm B}/N_0 = \frac{2^{2R}-1}{2\cdot R} = \frac{4-1}{2} = 1.5\,.$$

f) Richtig ist der Lösungsvorschlag 2, wie an einem Beispiel gezeigt werden soll.

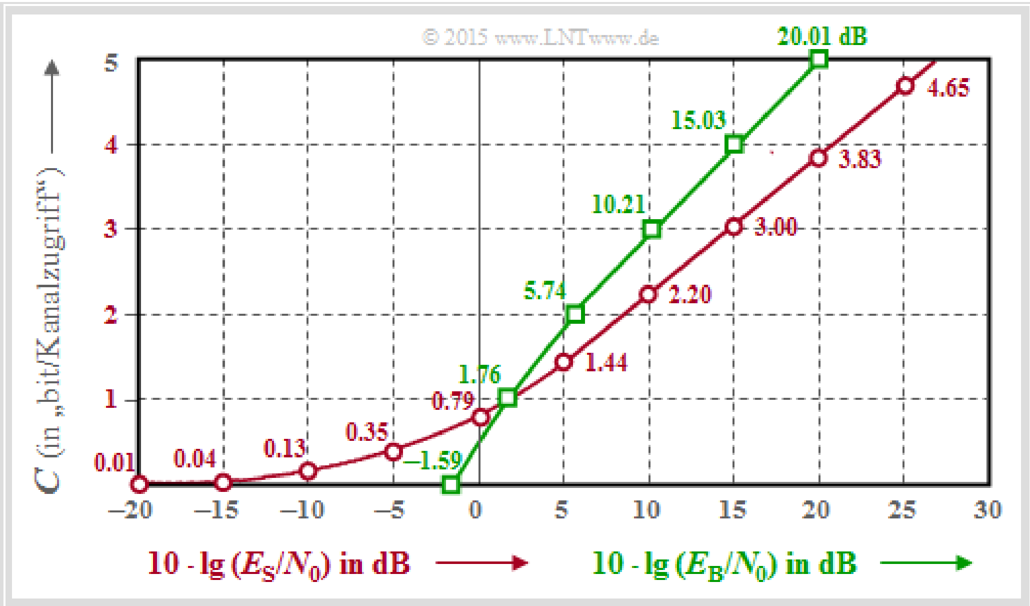
- Gesucht ist die Kanalkapazität C für $10 \cdot \lg\,(E_{\rm B}/N_0) = 15$ dB $\Rightarrow$ $E_{\rm B}/N_0 = 31.62$. Dann gilt entsprechend dem Lösungsvorschlag 1 mit $x = 2C$:

  $$31.62 = \frac{2^x - 1}{x} \quad\Rightarrow\quad 31.62\cdot x = 2^x - 1\,.$$

  Die Lösung $x = 7.986$ $\Rightarrow$ $C = 3.993$ (bit/use) kann nur grafisch oder iterativ gefunden werden.

- Gesucht ist der notwendige Abszissenwert $10 \cdot \lg\,(E_{\rm B}/N_0)$ für die Kapazität $C = 4$ bit/Symbol:

$$E_{\rm B}/N_0 = \frac{2^{2C}-1}{2\cdot C} = \frac{2^8-1}{8} = 31.875 \quad\Rightarrow\quad 10\cdot\lg\left(E_{\rm B}/N_0\right) = 15.03\,{\rm dB}\,.$$



Die Grafik zeigt die AWGN–Kanalkapazität C in „bit/Kanalzugriff" oder auch „bit/Symbol" abhängig von

- $10 \cdot \lg\,(E_{\rm S}/N_0)$ $\Rightarrow$ rote Kurve und rote Zahlen;

  diese geben die Kanalkapazität C für das vorgegebene $10 \cdot \lg\,(E_{\rm S}/N_0)$ an.

- $10 \cdot \lg\,(E_{\rm B}/N_0)$ $\Rightarrow$ grüne Kurve und und grüne Zahlen;

  diese geben das erforderliche $10 \cdot \lg\,(E_{\rm B}/N_0)$ für die vorgegebene Kanalkapazität C an.

Der Schnittpunkt der beiden Kurven liegt bei 1.76 dB.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.8

a) Da der Punkt X rechts von der Kanalkapazitätskurve $C_{\text{Gauß}}(E_B/N_0)$ liegt, gibt es (mindestens) ein Nachrichtensystem der Rate $R = 1$, das mit $10 \cdot \lg (E_B/N_0) = 4$ dB eine quasi–fehlerfreie Übertragung ermöglicht. Trotz der Coderate $R = 1$ beinhaltet dieses System eine Kanalcodierung mit einem unendlich langen Code, der aber leider unbekannt ist. Ein Binärsystem der Rate $R = 1$ erlaubt allerdings keine Kanalcodierung. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1 und 3.

b) Hier gelten folgende Aussagen:

- Das erforderliche E_B/N_0 für die Rate $R = 2$ ergibt sich zu

$$(E_{\rm B}/N_0)_{\rm min} = \frac{2^{2R}-1}{2\cdot R} = \frac{2^4-1}{4} = 3.75 \quad\Rightarrow\quad 10\cdot\lg\,(E_{\rm B}/N_0)_{\rm min} = 15.74\,{\rm dB}\,.$$

- Die maximale Coderate R_{max} für $10 \cdot \lg (E_B/N_0) = 0$ dB $\Rightarrow$ $E_B/N_0 = 1$ berechnet sich wie folgt:

$$C = R = \frac{1}{2}\cdot\log_2\,(1+\frac{2\cdot R\cdot E_{\rm B}}{N_0}) \quad\Rightarrow\quad 2^{2R}-1 \stackrel{!}{=} 2R \quad\Rightarrow\quad R_{\rm max} = 0.5\,.$$

Beide Berechnungen zeigen, dass der Punkt Y mit den Kenngrößen $10 \cdot \lg (E_B/N_0) = 0$ dB und $R = 1$ das Kanalcodierungstheorem nicht erfüllt. Richtig ist nur der Lösungsvorschlag 2.

c) Mit einem Binärsystem ist die Rate $R = 1.5$ niemals realisierbar ⇒ Lösungsvorschlag 1.

d) Der Punkt Z liegt rechts von der Grenzkurve und für die Coderate eines Quaternärsystems gilt $R \le 2$. Die Rate $R = 1.5$ wäre also mit $M_X = 4$ durchaus zu realisieren. Das heißt: Der Lösungsvorschlag 1 ist falsch. Richtig ist dagegen der zweite Lösungsvorschlag.

- Die vorgegebene Kurve $C_{\text{Gauß}}(E_B/N_0)$ geht stets von einem gaußverteilten Eingang aus.
- Für ein Binärsystem ergibt sich eine andere Grenzkurve, nämlich $\boldsymbol{C_{\rm BPSK}(E_B/N_0)}$ mit der Eigenschaft $C_{\text{BPSK}} \le 1$ bit/Kanalzugriff. C_{BPSK} und $C_{\text{Gauß}}$ unterscheiden sich signifikant.
- Für das Quaternärsystem ($M = 4$) müsste man eine entsprechende Kurve $C_{M=4}$ berechnen und analysieren. Auch hier gilt $C_{M=4} \le C_{\text{Gauß}}$. Für kleines E_B/N_0 gilt $C_{M=4} \approx C_{\text{Gauß}}$, danach weicht der Kurvenverlauf deutlich ab und endet in einer Horizontalen bei $C_{M=4} = 2$ bit/Kanalzugriff.

Der Punkt $Z \Rightarrow 10 \cdot \lg E_B/N_0 = 6$ dB, $R = 1.5$ liegt unterhalb von $C_{M=4}$. Ein solches Quaternärsystem wäre also realisierbar, wie in **Aufgabe A4.10** noch gezeigt wird. Aber allein aus Kenntnis von $C_{\text{Gauß}}$ kann die Frage nicht beantwortet werden.

Musterlösung zur Aufgabe A4.9

a) Richtig ist der Vorschlag 2, wie die Rechnung für $10 \cdot \lg(E_S/N_0) = 15$ dB ⇒ $E_S/N_0 = 31.62$ zeigt:

$$C_2(15\text{ dB}) = 1/2 \cdot \log_2(1 + 2 \cdot 31.62) = 1/2 \cdot \log_2(64.25) \approx 3\,\text{bit/Kanalzugriff}\,.$$

Die beiden anderen Lösungsvorschläge liefern folgende Zahlenwerte:

$$C_3(15\text{ dB}) = \log_2(1 + 31.62) \approx 5.03\,\text{bit/Kanalzugriff}\,,$$
$$C_1(15\text{ dB}) = C_3/2 \approx 2.51\,\text{bit/Kanalzugriff}\,.$$

Der Lösungsvorschlag 3 entspricht dabei dem Fall **zweier unabhängiger Gaußkanäle** mit jeweils halber Sendeleistung pro Kanal.

b) Richtig sind die Lösungsvorschläge 1, 2 und 4. Würde man E_S durch E_B ersetzen, so wäre auch die Aussage 3 richtig. Für $E_B/N_0 < \ln 2$ gilt nämlich $C_{\text{Gauß}} \equiv 0$ und damit auch $C_{\text{BPSK}} \equiv 0$.

c) Richtig sind die Aussagen 2, 3 und 5. Der rote Kurvenzug (C_{rot}) liegt stets oberhalb von C_{BPSK}, aber unterhalb von C_{braun} und der Shannon–Grenzkurve $C_{\text{Gauß}}$. Diese Aussagen gelten auch, wenn für gewisse E_S/N_0–Werte Kurven innerhalb der Zeichengenauigkeit nicht zu unterscheiden sind.

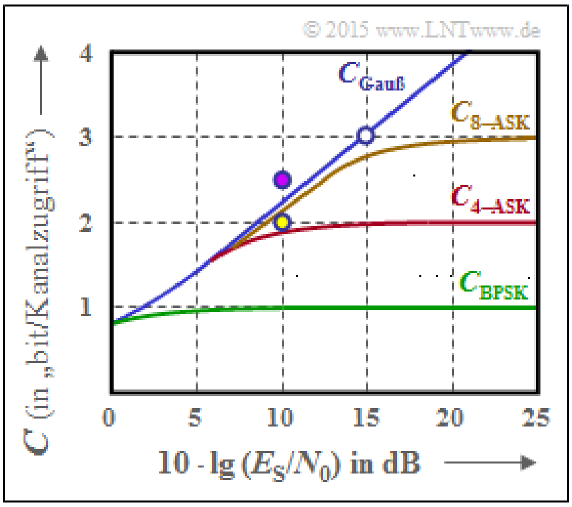
Aus dem Grenzwert $C_{\text{rot}} = 2$ bit/Kanalzugriff für $E_S/N_0 \rightarrow \infty$ kann auf den Symbolumfang $M_X = 4$ geschlossen werden. Die rote Kurve beschreibt also die 4–ASK. $M_X = 2$ würde für die BPSK gelten.

Die 4–QAM führt genau zum gleichen Endwert 2 bit/Kanalzugriff. Für kleine E_S/N_0–Werte liegt aber die Kanalkapazität $C_{\text{4–QAM}}$ oberhalb der roten Kurve, da C_{rot} von der Gauß–Grenzkurve C_2 begrenzt wird, $C_{\text{4–QAM}}$ aber von C_3. Die Bezeichnungen C_2 und C_3 beziehen sich hierbei auf die Teilaufgabe (a).

d) Aus dem braunen Kurvenverlauf erkennt man die Richtigkeit der beiden ersten Aussagen, während die 8–PSK mit I– und Q–Komponente – also mit $K = 2$ Dimensionen – für kleinere E_S/N_0–Werte etwas oberhalb der braunen Kurve liegen wird.

In nebenstehender Grafik sind die beiden Systeme gemäß den Vorschlägen 4 und 5 eingezeichnet.

- Der violette Punkt liegt über der Kurve $C_{\text{8–ASK}}$. Das heißt: $10 \cdot \lg(E_S/N_0) = 10$ dB und $R = 2.5$ reichen nicht, um die 8–ASK fehlerfrei decodieren zu können ⇒ $R > C$ ⇒ Kanalcodierungstheorem wird nicht erfüllt.
- Reduziert man die Coderate auf $R = 2 < C$, so wird das Kanalcodierungstheorem erfüllt ⇒ gelber Punkt.



Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1, 2 und 5.

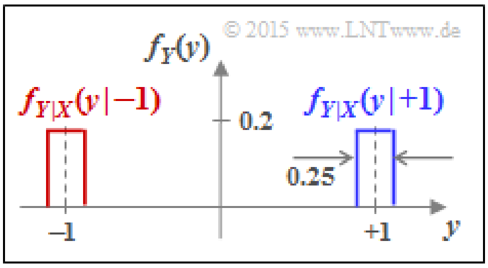
Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.9

a) Die differentielle Entropie einer Gleichverteilung der absoluten Breite $2A$ ist gleich

$$h(N) = \log_2 (2A) \quad \Rightarrow \quad A = 1/8: \; h(N) = \log_2 (1/4) \; \underline{= -2\,\text{bit(/Symbol)}}\,.$$

b) Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion am Ausgang ergibt sich entsprechend der Gleichung:

$$f_Y(y) = 1/2 \cdot \left[f_{Y|X}(y|-1) + f_{Y|X}(y|+1) \right] \,.$$



Die Grafik zeigt das Ergebnis für unser Beispiel (A = 1/8):

- Rot gezeichnet ist der erste Term $1/2 \cdot f_{Y|X}(y|-1)$, wobei das Rechteck $f_N(n)$ an die Stelle $Y = -1$ verschoben und mit 1/2 multipliziert wird. Es ergibt sich ein Rechteck der Breite $2A$ = 1/4 und der Höhe $1/(4A)$ = 2.
- Blau dargestellt ist der zweite Term $1/2 \cdot f_{Y|X}(y|+1)$ mit der Mitte bei $Y = +1$.
- Lässt man die Farben außer Betracht, so ergibt sich die gesamte WDF $f_Y(y)$.

Die differentiellen Entropie wird nicht verändert wird, wenn man nicht überlappende WDF–Abschnitte verschiebt. Somit ergibt sich für die gesuchte differentielle Sinkenentropie:

$$h(Y) = \log_2 (4A) \quad \Rightarrow \quad A = 1/8: \; h(Y) = \log_2 (1/2) \; \underline{= -1\,\text{bit(/Symbol)}}\,.$$

c) Damit erhält man für die Transinformation zwischen Quelle und Sinke:

$$I(X;Y) = h(Y) - h(N) = (-1\,\text{bit/Symbol}) - (-2\,\text{bit/Symbol}) \; \underline{= +1\,\text{bit/Symbol}}\,.$$

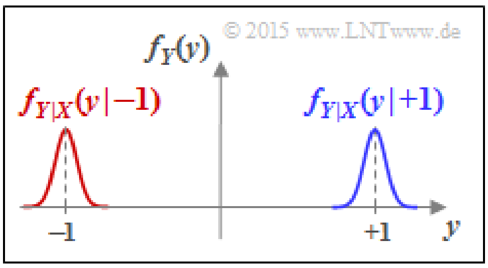
d) <u>Alle Lösungsvorschläge</u> sind zutreffend:

- Für jedes $A \le 1$ gilt

$$h(Y) \;=\; \log_2 (4A) = \log_2 (2A) + \log_2 (2)\,,$$
$$h(N) \;=\; \log_2 (2A)$$
$$\Rightarrow \quad I(X;Y) = h(Y) - h(N) = \log_2 (2) \; \underline{= +1\,\text{bit/Symbol}}\,.$$

- An diesem Prinzip ändert sich auch bei anderer WDF $f_N(n)$ nichts, solange die Störung auf den Bereich $|N| \le 1$ begrenzt ist.
- Überlappen sich jedoch die beiden bedingten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, so ergibt sich für $h(Y)$ ein kleinerer Wert als oben berechnet und damit auch eine kleinere Transinformation.

e) Richtig ist der <u>Lösungsvorschlag 2</u>:



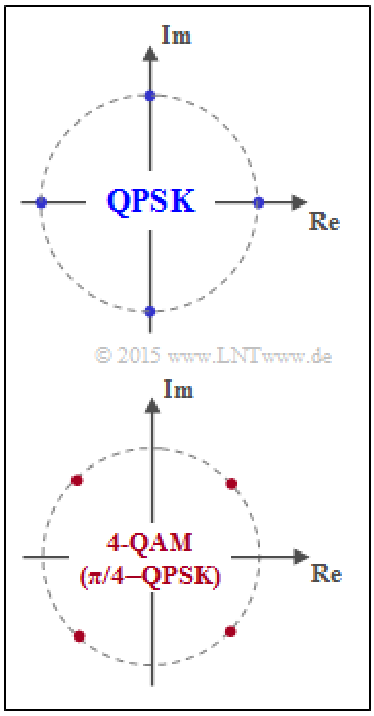
- Die Gaußfunktion klingt zwar sehr schnell ab, sie wird aber nie exakt gleich 0.
- Deshalb kommt es hier immer zu einer Überlappung der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f_{Y|X}(y|-1)$ und $f_{Y|X}(y|+1)$.
- Entsprechend der Teilaufgabe (d) ist deshalb $C_{\text{BPSK}}(E_B/N_0) \equiv 1$ bit/Symbol nicht möglich.

Musterlösung zur Aufgabe A4.10

a) Die Grafik zeigt die Signalraumkonstellationen für

- QPSK (*Quaternary Phase Shift Keying*), und
- 4–QAM (vierstufige Quadraturamplitudenmodulation).

Letztere wird auch als **π/4–QPSK** bezeichnet. Beide sind aus informationstechnischer Sicht identisch ⇒ Antwort NEIN.

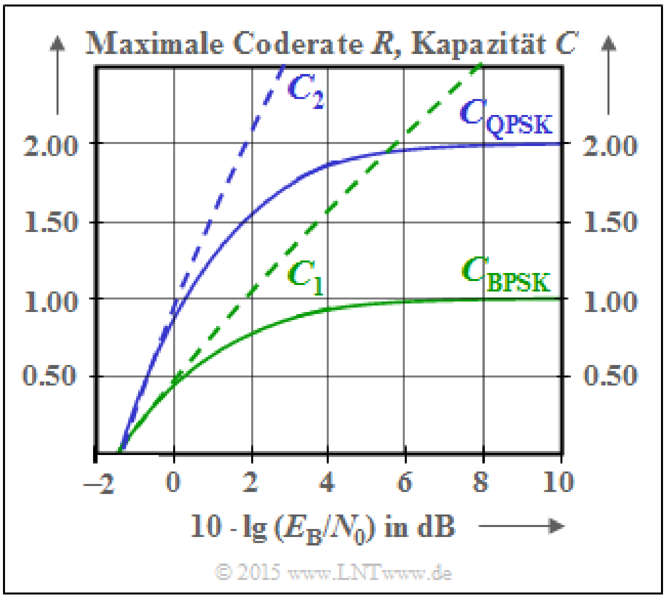


b) Richtig ist der Lösungsvorschlag 1: Die 4–QAM kann man als zwei BPSK–Konstellationen in orthogonalen Ebenen betrachten, wobei die Energie pro Informationsbit (E_B) in beiden Fällen gleich ist. Da entsprechend Teilaufgabe (a) die 4–QAM mit der QSPK identisch ist, gilt tatsächlich $C_{QPSK}(E_B/N_0) = 2 \cdot C_{BPSK}(E_B/N_0)$.

c) In der nebenstehenden Grafik sind die beiden angegebenen Shannon–Grenzkurven zusammen mit $C_{BPSK}(E_B/N_0)$ und $C_{QPSK}(E_B/N_0)$ skizziert:

$$C_1(E_B/N_0) = \frac{1}{2} \cdot \log_2\left(1 + \frac{2R\,E_B}{N_0}\right),$$

$$C_2(E_B/N_0) = \log_2\left(1 + \frac{R\,E_B}{N_0}\right).$$



Die grün–gestrichelte Kurve $C_1(E_B/N_0)$ gilt für den AWGN–Kanal mit gaußverteiltem Eingang. Für die Coderate R = 1 sind nach dieser Kurve $10 \cdot \lg(E_B/N_0)$ = 1.76 dB erforderlich. Für R = 2 benötigt man $10 \cdot \lg(E_B/N_0)$ = 5.74 dB.

Die blau–gestrichelte Kurve $C_2(E_B/N_0)$ gibt die Shannon–Grenze für K = 2 parallele Gaußkanäle an.
Hier benötigt man $10 \cdot \lg(E_B/N_0)$ = 0 dB für R = 1 bzw. $10 \cdot \lg(E_B/N_0)$ = 1.76 dB für R = 2.

Man erkennt aus der obigen Skizze:

- Die eindimensionale BPSK liegt im gesamten Bereich unterhalb von C_1 und damit natürlich auch unterhalb von $C_2 > C_1$.
- Die zweidimensionale QPSK liegt erwartungsgemäß unter der für sie relevanten Grenzkurve C_2. Sie liegt aber im unteren Bereich (bis nahezu 6 dB) oberhalb von C_1.

Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1, 2 und 4.

d) Die $C_{\rm QPSK}(E_{\rm S}/N_0)$–Kurve kann ebenfalls aus $C_{\rm BPSK}(E_{\rm S}/N_0)$ konstruiert werden und zwar

- durch Verdopplung:

  $$C_{\rm BPSK}(10 \cdot {\rm lg}\, E_{\rm S}/N_0) \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot C_{\rm BPSK}(10 \cdot {\rm lg}\, E_{\rm S}/N_0),$$

- sowie durch eine Verschiebung um 3 dB nach rechts:

  $$C_{\rm QPSK}(10 \cdot {\rm lg}\, E_{\rm S}/N_0) = 2 \cdot C_{\rm BPSK}(10 \cdot {\rm lg}\, E_{\rm S}/N_0 - 3\,{\rm dB}).$$

Richtig sind die beiden ersten Lösungsvorschläge, wobei der zweite Vorschlag berücksichtigt, dass bei QPSK die Energie in einer Dimension nur $E_{\rm S}/2$ beträgt.