

Musterlösung zur Aufgabe A2.1

a) Bei positiven Frequenzen erhält man $S_+(f)$ aus $S(f)$ durch Verdopplung. Daraus folgt, dass die Impulsgewichte von $S(f)$ nur jeweils $j \cdot 1 \text{ V}$ sein können. Aufgrund des Zuordnungssatzes muss $S(f)$ eine ungerade Funktion sein. Deshalb besitzt $S(f)$ noch zwei weitere Diracfunktionen bei $-f_{30}$ und $-f_{50}$, jeweils mit dem Gewicht: $-j \cdot 1 \text{ V}$:

$$S(f) = 1 \text{ V} \cdot [j \cdot \delta(f - f_{30}) - j \cdot \delta(f + f_{30}) + j \cdot \delta(f - f_{50}) - j \cdot \delta(f + f_{50})].$$

Richtig sind somit die Antworten 1 und 3.

b) Die Fourierrücktransformation von $S(f)$ führt zum Signal: (mit $\omega_{30} = 2\pi \cdot f_{30}$ und $\omega_{50} = 2\pi f_{50}$)

$$s(t) = -2 \text{ V} \cdot \sin(\omega_{30}t) - 2 \text{ V} \cdot \sin(\omega_{50}t).$$

Dieser enthält keinen Anteil bei $f_T = 40 \text{ kHz}$, so dass die erste Aussage zutrifft.

c) Bei ZSB-AM ohne Träger beinhaltet $s(t)$ nur die beiden Frequenzen $f_T - f_N$ und $f_T + f_N$. Daraus folgt mit $f_T = 40 \text{ kHz}$ für die Nachrichtenfrequenz: $f_N = 10 \text{ kHz}$.

d) Bei ZSB-AM ohne Träger gilt:

$$\begin{aligned} s(t) &= q(t) \cdot z(t) = A_N \cdot \cos(\omega_N t + \phi_N) \cdot \cos(\omega_T t + \phi_T) \\ &= \frac{A_N}{2} \cdot [\cos((\omega_T + \omega_N) \cdot t + \phi_T + \phi_N) + \cos((\omega_T - \omega_N) \cdot t + \phi_T - \phi_N)]. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit dem Ergebnis aus b) zeigt, dass gelten muss:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_{30} \cdot t + \phi_T + \phi_N) &= -\sin(\omega_{30} \cdot t), \\ \cos(\omega_{30} \cdot t + \phi_T - \phi_N) &= -\sin(\omega_{50} \cdot t). \end{aligned}$$

Beide Gleichungen sind gleichzeitig nur mit der Phase $\phi_N = 0$ zu erfüllen. Aus der letzten angegebenen trigonometrischen Beziehung folgt außerdem $\phi_T = 90^\circ = \pi/2$.

e) Ein Vergleich der Ergebnisse aus b) und d) führt auf $A_N = 4 \text{ V}$. Damit lauten die Gleichungen der an der Modulation beteiligten Signale:

$$\begin{aligned} q(t) &= 4 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot t), \\ z(t) &= 1 \cdot \cos(2\pi \cdot 40 \text{ kHz} \cdot t + 90^\circ) = -\sin(2\pi \cdot 40 \text{ kHz} \cdot t). \end{aligned}$$

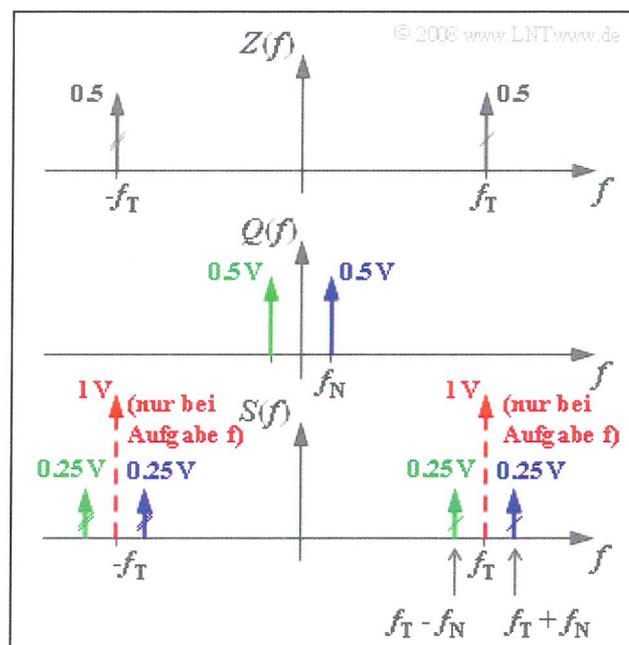
Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.1

- a) Beide Signale sind cosinusförmig: $\phi_N = 0, \phi_T = 0$.
- b) Aus der Grafik können für $q(t)$ und $z(t)$ die Periodendauern $200 \mu\text{s}$ bzw. $20 \mu\text{s}$ abgelesen werden. Daraus ergeben sich die Frequenzen zu $f_N = 5 \text{ kHz}$ und $f_T = 50 \text{ kHz}$.
- c) Die Nullstellen von $z(t)$ bei $\pm 5 \mu\text{s}, \pm 15 \mu\text{s}, \pm 25 \mu\text{s}$, usw. sind auch im Signal $s(t)$ vorhanden. Weitere Nullstellen von $s(t)$ – verursacht durch $q(t)$ – liegen bei $\pm 50 \mu\text{s}, \pm 150 \mu\text{s}, \pm 250 \mu\text{s}$, usw.. Die dritte Aussage trifft dagegen nicht zu, sondern es gilt:

$$s(t) = a(t) \cdot \cos(\omega_T t + \phi(t)).$$

Für $q(t) > 0$ ist die Phasenfunktion $\phi(t) = 0$ und $s(t)$ ist gleichlaufend mit $z(t)$. Dagegen gilt für $q(t) < 0$: $\phi(t) = \pi = 180^\circ$. Bei den Nulldurchgängen von $q(t)$ weist das modulierte Signal $s(t)$ Phasensprünge auf.

- d) Das Spektrum $S(f)$ ergibt sich aus der Faltung der Spektralfunktionen $Z(f)$ und $Q(f)$, die jeweils aus nur zwei Diracfunktionen bestehen. Die Grafik zeigt das Ergebnis.



Die rot eingezeichneten Diracfunktionen gelten nur für die „ZSB-AM mit Träger“ und beziehen sich auf die Teilaufgabe f). Die Faltung der beiden $Z(f)$ -Diracfunktionen bei $f_T = 50 \text{ kHz}$ mit $Q(f)$ führt zu den Diraclinien bei $f_T - f_N$ und $f_T + f_N$, jeweils mit Gewicht $0,5 \cdot 0,5 \text{ V} = 0,25 \text{ V}$.

Die gesuchten Werte sind somit $f_1 = 45 \text{ kHz}$ und $f_2 = 55 \text{ kHz}$. Die mit zwei Markierungsstrichen versehene Diracfunktion $0,5 \cdot \delta(f + f_T)$ führt zu zwei weiteren Diraclinien bei $-f_1$ und $-f_2$.

- e) Der Modulationsgrad berechnet sich zu:

$$m = \frac{q_{\max}}{A_T} = \frac{A_N}{A_T} = 0,5.$$

- f) Gemäß der Skizze bei d) ergeben sich Diraclinien bei $\pm f_T$, beide mit dem Impulsgewicht $A_T/2 = 1 \text{ V}$. Bei $m \leq 1$ ist $q(t)$ in der Hüllkurve erkennbar und Hüllkurvendemodulation anwendbar. Allerdings muss diese einfachere Empfängervariante durch eine sehr viel größere Sendeleistung erkaufte werden. In diesem Beispiel ($m = 0,5$) wird die Sendeleistung durch den Trägerzusatz verneunfacht. Richtig sind demzufolge die Lösungsvorschläge 1 und 3.

Musterlösung zur Aufgabe A2.2

a) Aus den beiden Gleichungen

$$A_{\max} = A_T + A_N = 2 \text{ V}, \quad A_{\min} = A_T - A_N$$

folgt direkt:

$$A_N = (A_{\max} - A_{\min})/2$$

$$A_T = (A_{\max} + A_{\min})/2.$$

Somit lautet der Modulationsgrad

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}.$$

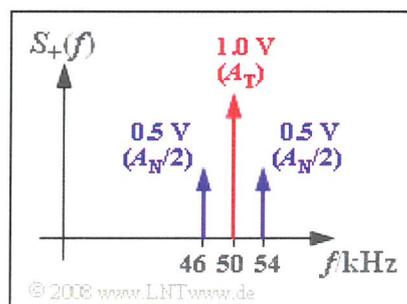
Mit den angegebenen Zahlenwerten erhält man:

$$m_1 = \frac{2 \text{ V} - 0.667 \text{ V}}{2 \text{ V} + 0.667 \text{ V}} = 0.5, \quad m_2 = \frac{2 \text{ V} - 0 \text{ V}}{2 \text{ V} + 0 \text{ V}} = 1.0,$$

$$m_3 = \frac{2 \text{ V} - (-1 \text{ V})}{2 \text{ V} + (-1 \text{ V})} = 3.0.$$

b) In diesem Fall ist $A_T = 0$, das heißt, es liegt tatsächlich eine „ZSB-AM ohne Träger“ vor und der Modulationsgrad $m = A_N/A_T$ ist unendlich groß. Richtig sind demnach die Aussagen 1 und 3.

c) Das Spektrum $S_+(f)$ setzt sich für jeden Modulationsgrad m aus drei Diraclinien mit den Gewichten A_T (bei $f = f_T$) sowie $m/2 \cdot A_T$ (bei $f = f_T \pm f_N$) zusammen. Für $m = 1$ ergeben sich die Gewichte entsprechend der Skizze: $S_+(f_T) = 1 \text{ V}$, $S_+(f_T \pm f_N) = 0.5 \text{ V}$.



d) Die auf den Widerstand 1Ω bezogene Leistung (Quadrat des Effektivwertes) einer harmonischen Schwingung mit der Amplitude A_T beträgt (mit $A_T = 1 \text{ V}$):

$$P_T = A_T^2/2 = 0.5 \text{ V}^2.$$

In gleicher Weise erhält man für die Leistungen des unteren und des oberen Seitenbandes:

$$P_{\text{USB}} = P_{\text{OSB}} = (A_N/2)^2/2 = 0.125 \text{ V}^2.$$

Das gesuchte Verhältnis ist somit:

$$m = 1 : \frac{P_T}{P_S} = \frac{P_T}{P_{\text{USB}} + P_T + P_{\text{OSB}}} = \frac{0.5 \text{ V}^2}{0.125 \text{ V}^2 + 0.5 \text{ V}^2 + 0.125 \text{ V}^2} = \frac{2}{3}.$$

e) Mit den Diracgewichten $m/2 \cdot A_T$ der beiden Seitenbänder (siehe Erklärungen unter c) erhält man

$$\frac{P_T}{P_S} = \frac{A_T^2/2}{A_T^2/2 + 2 \cdot (m/2)^2 \cdot A_T^2/2} = \frac{2}{2 + m^2}.$$

Dies führt zu den Zahlenwerten $8/9 = 0.889$ (für $m = 0.5$), $2/11 = 0.182$ (für $m = 3$) und 0 (für $m \rightarrow \infty$).

f) Die Zusetzung des Trägers macht nur Sinn, um den einfacheren Hüllkurvendemodulator verwenden zu können. Dies geht nur für $m < 1$. Ist dagegen der Modulationsgrad größer als 1 und somit der Einsatz eines Synchrondemodulators erforderlich, sollte man aus energetischen Gründen auf den Träger (fast) ganz verzichten. Ebenso ist bei Anwendung eines Hüllkurvendemodulators aus energetischen Gründen ein möglichst großer Modulationsgrad $m < 1$ anzustreben. Beide Aussagen treffen also zu.

Allerdings kann durch einen kleinen Restträger die Trägerrückgewinnung erleichtert werden, die beim Synchrondemodulator zur Frequenz- und Phasensynchronisation benötigt wird. Die zweite Aussage ist somit nur bedingt als richtig zu bewerten.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.2

a) Entsprechend den Gleichungen auf der Angabenseite gilt:

$$P_1 = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_0^{T_M} A_1^2 \cdot \cos^2(\omega_1 t + \phi_1) dt.$$

Zur allgemeineren Berechnung ist hier die Phase ϕ_1 berücksichtigt, die eigentlich 0 ist. Mit der Gleichung $\cos^2(\alpha) = 0.5 \cdot (1 + \cos(2\alpha))$ ergibt sich:

$$P_1 = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_0^{T_M} \frac{A_1^2}{2} dt + \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_0^{T_M} \frac{A_1^2}{2} \cdot \cos(2\omega_1 t + 2\phi_1) dt.$$

Der zweite Term liefert aufgrund der Integration über die Cosinusfunktion, der Division durch T_M und dem anschließenden Grenzübergang unabhängig von der Phase ϕ_1 keinen Beitrag. Damit erhält man:

$$P_1 = \frac{A_1^2}{2} = \frac{(2V)^2}{2} = 2V^2.$$

b) Mit $R = 50 \Omega$ erhält man für die „unnormierte“ Leistung:

$$P_1 = \frac{2V^2}{50\Omega} = 40 \text{ mW}.$$

c) Bereits in der Musterlösung zu a) wurde gezeigt, dass die Phase keinen Einfluss auf die Leistung hat. Daraus folgt:

$$P_2 = \frac{A_2^2}{2} = 0.5V^2.$$

d) Zur Leistungsberechnung muss über $s^2(t)$ gemittelt werden, wobei gilt:

$$s^2(t) = s_1^2(t) + s_2^2(t) + 2 \cdot s_1(t) \cdot s_2(t).$$

Aufgrund der Division durch die Messdauer T_M und des erforderlichen Grenzübergangs liefert der letzte Term unabhängig von der Phase ϕ keinen Beitrag und man erhält:

$$P_S = P_1 + P_2 = 2.5V^2.$$

e) Mit $f_2 = f_1$ lautet das Spektrum des analytischen Signals:

$$S_+(f) = (A_1 + A_2 \cdot e^{j\phi}) \cdot \delta(f - f_1).$$

Somit ergibt sich das Signal

$$s(t) = A_3 \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_3),$$

dessen Phase ϕ_3 für die Leistungsberechnung keine Rolle spielt. Die Amplitude dieses Signals ist

$$\begin{aligned} A_3 &= \sqrt{(A_1 + A_2 \cdot \cos(\phi))^2 + A_2^2 \cdot \sin^2(\phi)} = \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\phi)}. \end{aligned}$$

Für $\phi = 0$ addieren sich die Amplituden skalar:

$$A_3 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2} = A_1 + A_2 = 3 \text{ V} \Rightarrow P_S = 4.5 \text{ V}^2.$$

Dagegen addieren sich die Amplituden für $\phi = 90^\circ$ vektoriell:

$$A_3 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{5} \text{ V} \Rightarrow P_S = \frac{5 \text{ V}^2}{2} = 2.5 \text{ V}^2.$$

In diesem Sonderfall erhält man das gleiche Ergebnis wie in der Teilaufgabe d).

Für $\phi = 180^\circ$ überlagern sich die Cosinusschwingungen destruktiv:

$$A_3 = A_1 - A_2 = 1 \text{ V} \Rightarrow P_S = 0.5 \text{ V}^2.$$

Musterlösung zur Aufgabe A2.3

a) Aus $x(t) = A_0 + z(t) + q(t)$ erhält man mit $A_0 = 2 \text{ V}$ und $A_T = A_N = 1 \text{ V}$ den möglichen Bereich $0 \text{ V} \leq x(t) \leq 4 \text{ V}$. Die Hilfsgröße $w(t)$ kann somit Werte zwischen $w_{\min} = -2 \text{ V}$ und $w_{\max} = +2 \text{ V}$ annehmen.

b) Der Koeffizient c_0 ist gleich dem Kennlinienwert im Arbeitspunkt. Mit $A_0 = 2 \text{ V}$, $U = 3 \text{ V}$ erhält man:

$$c_0 = y(A_0) = U \cdot (1 - e^{-A_0/U}) = 1.460 \text{ V}.$$

Entsprechend gilt für den Taylorkoeffizienten c_1 :

$$c_1 = y'(A_0) = e^{-A_0/U} = 0.513.$$

c) Die weiteren Ableitungen ($n \geq 2$) lauten:

$$y^{(n)}(A_0) = \frac{(-1)^{n-1}}{U^{n-1}} \cdot e^{-A_0/U}.$$

Daraus ergeben sich folgende Koeffizienten:

$$c_2 = \frac{1}{2!} \cdot y^{(2)}(A_0) = \frac{1}{2U} \cdot e^{-A_0/U} = -0.086 \text{ V}^{-1},$$

$$c_3 = \frac{1}{3!} \cdot y^{(3)}(A_0) = \frac{1}{6U^2} \cdot e^{-A_0/U} = 0.0095 \text{ V}^{-2}.$$

d) Setzt man $c_3 = 0$, so lautet das Ausgangssignal des Verstärkers:

$$y(t) = c_0 + c_1 \cdot (z(t) + q(t)) + c_2 \cdot (z^2(t) + q^2(t) + 2 \cdot z(t) \cdot q(t)).$$

Nach dem Bandpass verbleiben somit noch folgende Signalanteile:

$$s(t) = c_1 \cdot z(t) + 2 \cdot c_2 \cdot z(t) \cdot q(t)$$

$$= [c_1 \cdot A_T + 2 \cdot c_2 \cdot A_T \cdot A_N \cdot \cos(\omega_N t)] \cdot \cos(\omega_T t).$$

Der Modulationsgrad ist dann als Quotient der „Amplitude“ der Nachrichtenschwingung zur „Amplitude“ des Trägers zu bestimmen:

$$m = \frac{2 \cdot |c_2| \cdot A_T \cdot A_N}{|c_1| \cdot A_T} = \frac{2 \cdot |c_2| \cdot A_N}{|c_1|} = \frac{2 \cdot 0.086 \cdot 1 \text{ V}}{0.513} = 0.335.$$

e) Unter Berücksichtigung des kubischen Anteils beinhaltet $y(t)$ noch folgende weitere Anteile:

$$y_3(t) = c_3 \cdot (z(t) + q(t))^3$$

$$= c_3 \cdot z^3(t) + 3 \cdot c_3 \cdot z^2(t) \cdot q(t) + 3 \cdot c_3 \cdot z(t) \cdot q^2(t) + c_3 \cdot q^3(t).$$

Der erste Term führt zu Anteilen bei f_T und $3f_T$, der letzte bei f_N und $3f_N$. Der zweite Term ergibt einen Anteil bei f_N und weitere bei $2f_T \pm f_N$:

$$3 \cdot c_3 \cdot z^2(t) \cdot q(t) = \frac{3}{2} \cdot A_T^2 \cdot A_N \cdot [\cos(\omega_N t) + \cos(2\omega_T t) \cdot \cos(\omega_N t)].$$

Entsprechend führt der dritte Summand in obiger Gleichung zu

$$3 \cdot c_3 \cdot z(t) \cdot q^2(t) = \frac{3}{2} \cdot A_T \cdot A_N^2 \cdot [\cos(\omega_T t) + \cos(\omega_T t) \cdot \cos(2\omega_N t)].$$

Innerhalb des Frequenzbereichs von 23 kHz bis 37 kHz kommt es also tatsächlich zu einer Veränderung der Spektrallinie bei f_T und es entstehen neue Diraclinien bei $f_T \pm 2f_N$, also bei 24 kHz und 36 kHz. Die

dadurch verbundenen Verzerrungen sind somit nichtlinear. Das heißt: Es treffen die Aussagen 2 und 3 zu.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.3

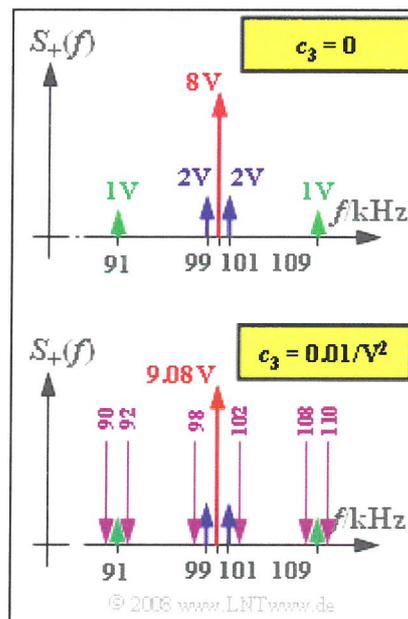
- a) Die Trägerfrequenz ist sinnvollerweise gleich der Mittenfrequenz des Bandpasses: $f_T = 100$ kHz. Eine „ZSB-AM“ ergibt sich ebenfalls, wenn f_T um nicht mehr als ± 1 kHz davon abweicht.
- b) $s_1(t)$ beinhaltet nur den Träger $z(t)$. Das Quellensignal $q(t)$ wird durch den Bandpass entfernt.
- c) Der quadratische Term $z^2(t)$ besteht aus einem Gleichanteil (bei $f = 0$) sowie einem Anteil bei $2f_T$. Auch alle Spektralanteile von $q^2(t)$ liegen außerhalb des Bandpasses. Richtig ist somit die letzte Antwort.
- d) Der Term $\cos^3(\omega_T t)$ hat seinen größten Signalanteil bei $f = f_T$. Der dritte Lösungsvorschlag liegt zwischen $100 \text{ kHz} \pm 18 \text{ kHz}$. Teile davon – nämlich die Frequenzanteile zwischen 90 kHz und 110 kHz – werden durch den Bandpass nicht entfernt und sind somit auch in $s(t)$ enthalten. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1 und 3.
- e) Das Sendesignal besteht aus insgesamt fünf Frequenzen:

$$s(t) = c_1 \cdot A_T \cdot \cos(\omega_T t) + c_2 \cdot A_T \cdot A_1 \cdot \cos((\omega_T \pm \omega_1)t) + c_2 \cdot A_T \cdot A_2 \cdot \cos((\omega_T \pm \omega_2)t).$$

Beachten Sie hierbei, dass der zweite und dritte Term jeweils zwei Signalfrequenzen (99 und 101 kHz bzw. 91 und 109 kHz) beinhaltet. Mit $A_T = 4 \text{ V}$, $A_1 = 1 \text{ V}$, $A_2 = 2 \text{ V}$, $c_1 = 1$ und $c_2 = 1/A_T = 0.25/\text{V}$ gilt auch:

$$s(t) = 4 \text{ V} \cdot \cos(\omega_T t) + 1 \text{ V} \cdot \cos((\omega_T \pm \omega_1)t) + 2 \text{ V} \cdot \cos((\omega_T \pm \omega_2)t).$$

Daran erkennt man, dass der Modulationsgrad $m = (A_1 + A_2)/A_T = 0.75$ ist.



- f) Die Grafik zeigt oben das Spektrum $S_+(f)$ – also nur positive Frequenzen – mit $c_3 = 0$. Mit $c_3 \neq 0$ fallen folgende zusätzliche Spektralanteile an:

$$c_3 \cdot z^3(t) = \frac{c_3 \cdot A_T^3}{4} \cdot [3 \cdot \cos(\omega_T t) + \cos(3\omega_T t)].$$

Dabei fällt der erste Anteil in den Durchlassbereich des Bandpasses. Das Diracgewicht bei $f_T = 100$ kHz wird dadurch von ursprünglich 8 V auf $8 \text{ V} + 0.75 \cdot 0.01/\text{V}^2 \cdot 4^3 \text{ V}^3 = 8.48 \text{ V}$ erhöht.

Weiterhin liefert der dritte Spektralanteil von Teilaufgabe d) einen unerwünschten Beitrag zu $S_+(f)$. Dabei gilt:

$$\begin{aligned}
q^2(t) &= [A_1 \cdot \cos(\omega_1 t) + A_9 \cdot \cos(\omega_9 t)]^2 = \\
&= A_1^2 \cdot \cos^2(\omega_1 t) + A_9^2 \cdot \cos^2(\omega_9 t) + \\
&\quad + 2 \cdot A_1 \cdot A_9 \cdot \cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_9 t) \\
\Rightarrow q^2(t) &= \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_1^2}{2} \cdot \cos(\omega_2 t) + \frac{A_9^2}{2} + \frac{A_9^2}{2} \cdot \cos(\omega_{18} t) + \\
&\quad + A_1 \cdot A_9 \cdot \cos(\omega_8 t) + A_1 \cdot A_9 \cdot \cos(\omega_{10} t)
\end{aligned}$$

Nach der Multiplikation mit $z(t)$ fallen alle diese Beiträge bis auf den vierten in den Bereich von 90 kHz bis 110 kHz. Das Gewicht bei f_T wird um $3 \cdot c_3 \cdot A_T \cdot 0.5 (A_1^2 + A_9^2) = 0.6 \text{ V}$ weiter erhöht und ist somit 9.08 V. Weitere Anteile ergeben sich bei:

- 98 kHz und 102 kHz mit den Gewichten $c_3 \cdot A_T/2 \cdot A_1^2/2 = 0.03 \text{ V}$,
- 92 kHz und 108 kHz mit den Gewichten $3c_3 \cdot A_T/2 \cdot A_1 \cdot A_9 = 0.12 \text{ V}$,
- 90 kHz und 110 kHz mit den Gewichten $3c_3 \cdot A_T/2 \cdot A_1 \cdot A_9 = 0.12 \text{ V}$.

Die untere Grafik zeigt das Spektrum $S_+(f)$ unter Berücksichtigung der kubischen Anteile. Man erkennt, dass neue Frequenzen entstanden sind, was auf nichtlineare Verzerrungen hindeutet. Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1 und 3.

Musterlösung zur Aufgabe A2.4

a) Richtig sind die Aussagen 2, 3 und 5: Bei ZSB-AM ohne Träger bzw. mit einem Modulationsgrad $m > 1$ ist Hüllkurvendemodulation nicht anwendbar. Die Leistungsfähigkeit des Synchron demodulators wird durch den zusätzlichen Trägeranteil nicht gesteigert, sondern führt lediglich zu einer unnötigen Vergrößerung der aufzubringenden Sendeleistung.

Auch die dritte Aussage ist richtig. In der Musterlösung zu Z2.4 wird gezeigt, welche Auswirkungen ein Verzicht bzw. eine falsche Dimensionierung von $H_E(f)$ hat.

b) Wie der Name „Synchron demodulator“ bereits impliziert, müssen die Signale $z(t)$ und $z_E(t)$ frequenz- und phasensynchron sein:

$$f_E = f_T = 50 \text{ kHz}, \quad \phi_E = \phi_T = -90^\circ.$$

Die Trägerfrequenz f_T kann dabei aus den Angaben über das Sendespektrum $S(f)$ ermittelt werden. Bei vollständiger Synchronität gilt:

$$v(t) = \frac{A_E}{2} \cdot q(t) + \frac{A_E}{2} \cdot q(t) \cdot \cos(2 \cdot \omega_T \cdot t).$$

Der zweite Term wird durch den Tiefpass entfernt. Mit $A_E = 2$ gilt somit $v(t) = q(t)$.

c) Im Theorieteil wurde gezeigt, dass bei ZSB-AM und Synchron demodulation allgemein gilt:

$$v(t) = \cos(\Delta\phi_T) \cdot q(t).$$

Auch bei ungenügender Phasensynchronisation kommt es nicht zu Verzerrungen, sondern nur zu einer frequenzunabhängigen Dämpfung. Mit $\phi_T = -90^\circ$ und $\phi_E = -120^\circ$ ist $\Delta\phi_T = -30^\circ$ und man erhält:

$$v(t) = \cos(30^\circ) \cdot q(t) = 0.866 \cdot q(t) \Rightarrow v(t=0) = 0.866 \cdot A_1 = 1.732 \text{ V}.$$

d) Nun beträgt die Phasendifferenz $\Delta\phi_T = 90^\circ$ und man erhält $v(t) = 0$. Es ist müßig darüber zu diskutieren, ob es sich hierbei noch um ein verzerrungsfreies System handelt.

Das Ergebnis $v(t) = 0$ ist darauf zurückzuführen, dass Cosinus und Sinus orthogonale Funktionen sind. Dieses Prinzip wird zum Beispiel bei der so genannten Quadratur-Amplitudenmodulation ausgenutzt.

e) Hier lautet die Gleichung für das Signal nach der Multiplikation:

$$\begin{aligned} b(t) &= q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t - 90^\circ) \cdot 2 \cdot \cos(\omega_E \cdot t - 90^\circ) = \\ &= 2 \cdot q(t) \cdot \sin(\omega_T \cdot t) \cdot \sin(\omega_E \cdot t). \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann mit der trigonometrischen Umformung

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

auch wie folgt geschrieben werden:

$$b(t) = q(t) \cdot \cos((\omega_T - \omega_E) \cdot t) + q(t) \cdot \cos((\omega_T + \omega_E) \cdot t).$$

Der zweite Term liegt für $f_E \approx f_T$ in der Umgebung von $2f_T$ und wird durch den Tiefpass entfernt. Somit bleibt mit der Frequenzdifferenz $\Delta f_T = f_E - f_T = 1 \text{ kHz}$:

$$v(t) = q(t) \cdot \cos(2\pi \cdot \Delta f_T \cdot t).$$

Die erste Aussage ist somit richtig. Diese besagt, dass nun das Nachrichtensignal $v(t)$ gemäß einer Cosinusfunktion leiser und wieder lauter wird („Schwebung“). Aus dem Cosinusanteil von $q(t)$ mit der Frequenz $f_1 = 2 \text{ kHz}$ werden nun zwei Anteile (jeweils halber Amplitude) bei 1 kHz und 3 kHz. Ebenso ist im Sinkensignal kein Anteil bei $f_2 = 5 \text{ kHz}$ enthalten, sondern lediglich Anteile bei 4 kHz und 6 kHz:

$$1 \text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot 5 \text{ kHz} \cdot t) \cdot \cos(2\pi \cdot 1 \text{ kHz} \cdot t) = \\ 0.5 \text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot 4 \text{ kHz} \cdot t) + 0.5 \text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot 6 \text{ kHz} \cdot t).$$

Richtig sind die Aussagen 1, 3 und 4.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.4

a) Das dargestellte Sinkensignal $v(t)$ stimmt exakt mit dem als Gleichung gegebenen Signal $b(t)$ überein und enthält somit auch Anteile um die doppelte Trägerfrequenz. Das Filter $H_E(f)$ fehlt entweder ganz oder dessen obere Grenzfrequenz f_O ist zu hoch \Rightarrow Richtig ist die erste Aussage.

Bezüglich der unteren Grenzfrequenz f_U ist nur die Aussage möglich, dass diese kleiner ist als die kleinste im Signal $b(t)$ vorkommende Frequenz (2 kHz). Ob ein Gleichanteil durch das Filter entfernt wird oder nicht, ist unklar, da ein solcher im Signal $b(t)$ nicht enthalten ist.

b) Voraussetzung für eine verzerrungsfreie Demodulation ist, dass bis zu einer bestimmten Frequenz f_1 alle Spektralanteile gleich und möglichst ungedämpft übertragen werden und alle Anteile bei Frequenzen $f > f_2$ vollständig unterdrückt werden. Der Rechteck- und der Trapez Tiefpass erfüllen diese Bedingung.

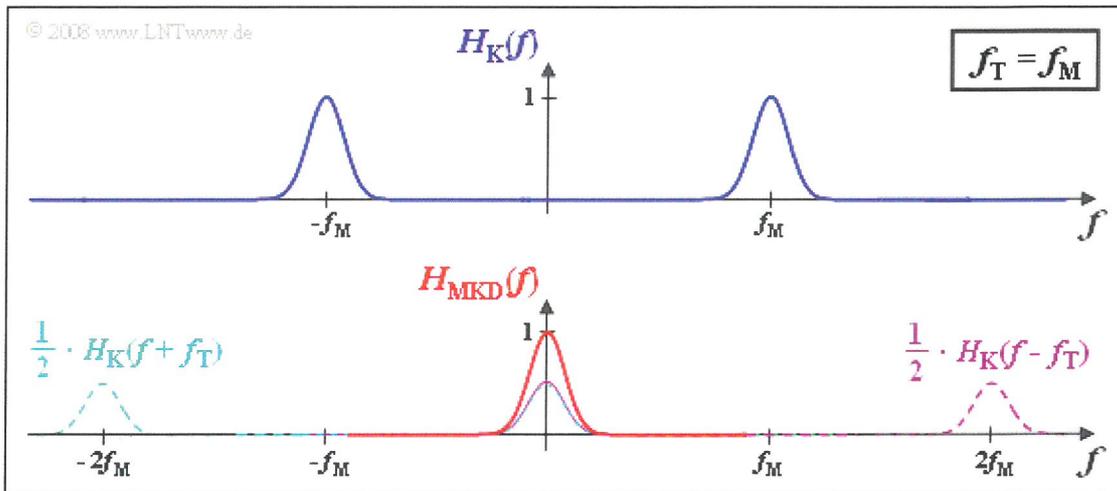
c) Sichergestellt werden muss, dass der 5 kHz-Anteil noch im Durchlassbereich liegt: $f_{1, \min} = 5 \text{ kHz}$.

d) Alle Spektralanteile in der Umgebung der doppelten Trägerfrequenz – genauer gesagt zwischen 95 kHz und 105 kHz – müssen vollständig unterdrückt werden: $f_{2, \max} = 95 \text{ kHz}$. Ansonsten würde es zu nichtlinearen Verzerrungen kommen.

e) Die Grenzfrequenz $f_G = 4 \text{ kHz}$ hätte (lineare) Verzerrungen zur Folge, da der 5 kHz-Anteil abgeschnitten würde. Zu bevorzugen ist der Tiefpass mit $f_G = 6 \text{ kHz}$, da mit $f_G = 10 \text{ kHz}$ dem Nutzsignal $v(t)$ mehr Rauschanteile überlagert wären.

Musterlösung zur Aufgabe A2.5

a) Die angegebene Gleichung besagt, dass der gegebene Bandpass-Frequenzgang jeweils um die Trägerfrequenz f_T nach links und rechts verschoben und die beiden Anteile aufaddiert werden müssen. Außerdem ist noch der Faktor $1/2$ zu berücksichtigen, wie die nachfolgende Skizze zeigt.



Bei niedrigen Frequenzen ergibt sich dann eine Gaußfunktion um die Mittenfrequenz $f_M' = 0$:

$$H_{MKD}(f) = e^{-\pi \cdot \left(\frac{f}{\Delta f_K}\right)^2}.$$

Die beiden Anteile bei $\pm 2f_T$ müssen nicht weiter betrachtet werden. Für die zwei gesuchten Frequenzen $f_1 = 1 \text{ kHz}$ und $f_5 = 5 \text{ kHz}$ erhält man:

$$H_{MKD}(f = f_1) = e^{-\pi \cdot \left(\frac{1 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}}\right)^2} = e^{-\pi/100} \approx 0.969,$$

$$H_{MKD}(f = f_5) = e^{-\pi \cdot \left(\frac{5 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}}\right)^2} = e^{-\pi/4} \approx 0.456.$$

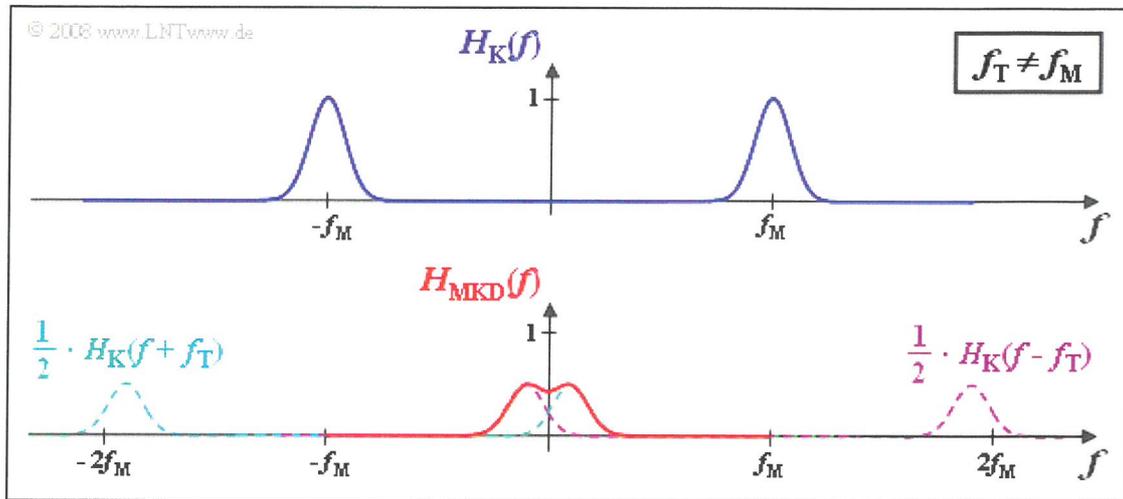
b) Mit $\omega_1 = 2\pi \cdot 1 \text{ kHz}$ und $\omega_5 = 2\pi \cdot 5 \text{ kHz}$ gilt:

$$\begin{aligned} v(t) &= 0.969 \cdot 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + 0.456 \cdot 3 \text{ V} \cdot \cos(\omega_5 \cdot t) = \\ &= 1.938 \text{ V} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + 1.368 \text{ V} \cdot \cos(\omega_5 \cdot t). \end{aligned}$$

Man erkennt, dass nun – im Gegensatz zum Quellsignal $q(t)$ – der Anteil bei 1 kHz größer ist als der 5 kHz-Anteil, da der Kanal die Frequenzen 49 kHz und 51 kHz weniger dämpft als die Spektralanteile bei 45 kHz und 55 kHz.

c) Die beiden um $\pm f_T$ verschobenen Spektralfunktionen kommen nun nicht mehr direkt übereinander zu liegen, sondern sind um 10 kHz gegeneinander versetzt. Der resultierende Frequenzgang $H_{MKD}(f)$ ist somit nicht mehr gaußförmig, sondern es gilt:

$$H_{MKD}(f) = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{-\pi \cdot \left(\frac{f-5 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}}\right)^2} + e^{-\pi \cdot \left(\frac{f+5 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}}\right)^2} \right].$$



Für die Frequenzen f_1 und f_5 erhält man:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{MKD}}(f = 1 \text{ kHz}) &= \frac{1}{2} \cdot [H_K(f = 56 \text{ kHz}) + H_K(f = -54 \text{ kHz})] = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[e^{-\pi \cdot \left(\frac{56 \text{ kHz} - 50 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} \right)^2} + e^{-\pi \cdot \left(\frac{-54 \text{ kHz} + 50 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} \right)^2} \right] = 0.161 + 0.302 = 0.463,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{\text{MKD}}(f = 5 \text{ kHz}) &= \frac{1}{2} \cdot [H_K(f = 60 \text{ kHz}) + H_K(f = -50 \text{ kHz})] = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[e^{-\pi \cdot \left(\frac{60 \text{ kHz} - 50 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} \right)^2} + e^{-\pi \cdot \left(\frac{-50 \text{ kHz} + 50 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} \right)^2} \right] = 0.022 + 0.500 = 0.521.
 \end{aligned}$$

Während bei $f_T = f_M = 50 \text{ kHz}$ der Synchrondemodulator die Information über das Nachrichtensignal aus beiden Seitenbändern in gleicher Weise gewinnt, liefert mit $f_T = 55 \text{ kHz}$ das untere Seitenband (USB) den größeren Beitrag. Zum Beispiel liegt das USB des 5 kHz-Anteils nun genau bei $f_M = 50 \text{ kHz}$ und wird ungedämpft übertragen, während das OSB bei 60 kHz starken Dämpfungen unterliegt.

d) Mit den Ergebnissen aus c) erhält man:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0.463 \cdot 2 \text{ V} = 0.926 \text{ V}, \\
 A_5 &= 0.521 \cdot 3 \text{ V} = 1.563 \text{ V}.
 \end{aligned}$$

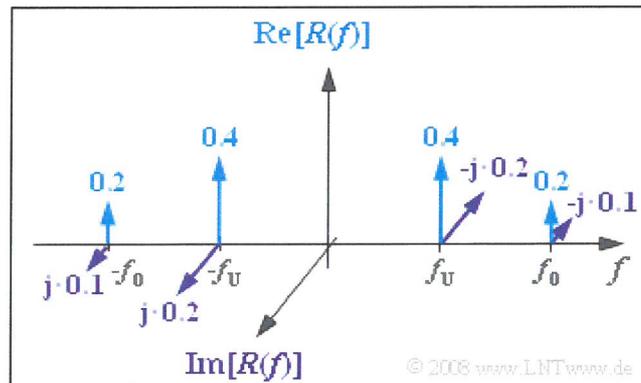
In diesem Fall sind die linearen Verzerrungen sogar weniger stark, da auch der 1 kHz-Anteil stärker gedämpft wird.

e) Mit der Trägerfrequenz $f_T = 50 \text{ kHz}$ wird der 5 kHz-Anteil stärker gedämpft als der 1 kHz-Anteil, während mit $f_T = 55 \text{ kHz}$ der 1 kHz-Anteil etwas mehr gedämpft wird. Wählt man nun $f_T = 54.5 \text{ kHz}$, so werden beide Anteile gleich gedämpft (etwa um den Faktor 0.53) und es gibt keine Verzerrungen.

Dieses Ergebnis gilt allerdings nur für das betrachtete Quellensignal. Ein anderes $q(t)$ mit ebenfalls zwei Spektralanteilen würde eine andere „optimale Trägerfrequenz“ erfordern. Bei einem Nachrichtensignal mit drei oder mehr Spektrallinien würde es stets zu linearen Verzerrungen kommen.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.5

a) Es gilt $R(f) = S(f) \cdot H_K(f)$. Damit erhält man das Linienspektrum entsprechend der folgenden Skizze (alle Gewichte sind noch durch die Einheit „V“ zu ergänzen). Das Gewicht der Spektrallinie bei $f = -f_0$ setzt sich aus dem Realteil 0.2 V und dem Imaginärteil 0.1 V zusammen.



b) Die Spektralfunktion von $v(t)$ lautet:

$$\begin{aligned} V(f) &= [R(f) * [\delta(f - f_T) + \delta(f + f_T)]] \cdot H_E(f) = \\ &= \frac{A_N}{4} \cdot (R_O + j \cdot I_O) \cdot \delta(f - f_N) + \frac{A_N}{4} \cdot (R_U + j \cdot I_U) \cdot \delta(f + f_N) + \\ &+ \frac{A_N}{4} \cdot (R_O - j \cdot I_O) \cdot \delta(f + f_N) + \frac{A_N}{4} \cdot (R_U - j \cdot I_U) \cdot \delta(f - f_N). \end{aligned}$$

Alle anderen Terme liegen um die doppelte Trägerfrequenz und werden durch den Tiefpass eliminiert. Umsortieren und Zusammenfassen der Terme führt zu:

$$\begin{aligned} V(f) &= A_N \cdot \frac{R_U + R_O}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot [\delta(f - f_N) + \delta(f + f_N)] + \\ &+ A_N \cdot \frac{I_U - I_O}{2} \cdot \frac{j}{2} \cdot [-\delta(f - f_N) + \delta(f + f_N)] \\ \Rightarrow v(t) &= A_N \cdot \frac{R_U + R_O}{2} \cdot \cos(\omega_N \cdot t) + A_N \cdot \frac{I_U - I_O}{2} \cdot \sin(\omega_N \cdot t). \end{aligned}$$

Mit $R_U = 0.8$, $R_O = 0.4$ und $I_O = I_U = -0.2$ folgt daraus:

$$v(t) = 0.6 \cdot A_N \cdot \cos(\omega_N \cdot t) \Rightarrow v(t=0) = 0.6 \cdot A_N = 1.2 \text{ V.}$$

Es ergibt sich gegenüber $q(t)$ eine Dämpfung um den Faktor 0.6. Der Synchrondemodulator bekommt durch das untere Seitenband mehr Information über das Quellensignal als über das obere. Wegen der Eigenschaft $I_O = I_U$ ist $v(t)$ ebenfalls cosinusförmig. Es tritt demnach keine Laufzeit auf bzw. die Laufzeit ist ein geradzahliges Vielfaches der Periodendauer.

c) Hier gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} H_K(f_N + f_T) &= R_O + j \cdot I_O, \\ H_K(f_N - f_T) &= H_K^*(f_T - f_N) = R_U - j \cdot I_U, \\ \Rightarrow H_{MKD}(f_N) &= \frac{1}{2} \cdot [(R_O + R_U) + j \cdot (I_O - I_U)], \\ H_{MKD}(-f_N) &= H_{MKD}^*(f_N) = \frac{1}{2} \cdot [(R_O + R_U) - j \cdot (I_O - I_U)]. \end{aligned}$$

Man erhält somit das gleiche Ergebnis wie unter b), aber schneller.

d) Für $f > 0$ lautet nun der resultierende Frequenzgang:

$$\begin{aligned} H_{\text{MKD}}(f) &= \frac{1}{2} \cdot [H_K(f_T + f) + H_K^*(f_T - f)] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{1 + 3j \cdot \left(\frac{f_T + f}{f_T} - 1\right)} + \frac{1}{1 - 3j \cdot \left(\frac{f_T - f}{f_T} - 1\right)} \right] = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{3f}{f_T}} \end{aligned}$$

Eingesetzt an der Stelle $f = f_N$ führt dies zum Ergebnis:

$$H_{\text{MKD}}(f_N) = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{3f_N}{f_T}} \Rightarrow \text{Betrag} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{3f_N}{f_T}\right)^2}}, \quad \text{Phase} = \arctan \frac{3f_N}{f_T}.$$

Mit $f_N/f_T = 0.1$ erhält man den Betrag 0.958 und die Phase 16.7° . Damit lautet das Sinkensignal:

$$v(t) = 0.958 \cdot 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_N \cdot t + 16.7^\circ) \Rightarrow v(t=0) = 1.835 \text{ V}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A2.6

a) Entsprechend der Gleichung für die Freiraumdämpfung gilt mit $d = 10$ km und $f_T = 20$ MHz:

$$\begin{aligned}\frac{a_K(d, f_T)}{\text{dB}} &= 34 + 20 \cdot \lg \frac{d}{\text{km}} + 20 \cdot \lg \frac{f_T}{\text{MHz}} = \\ &= 34 + 20 \cdot \lg(10) + 20 \cdot \lg(20) \approx 80 \text{ dB}.\end{aligned}$$

Dies entspricht einer Leistungsverminderung um den Faktor 10^8 :

$$P_E = 10^{-8} \cdot P_S = 10^{-8} \cdot 100 \text{ kW} = 10^{-3} \text{ W}.$$

b) Aus $P_S = 10^5$ W, $P_E = 10^{-4}$ W folgt eine Freiraumdämpfung von 90 dB. Daraus erhält man weiter:

$$\begin{aligned}20 \cdot \lg \frac{d}{\text{km}} &= (90 - 34 - 26) \text{ dB} = 30 \text{ dB} \\ \Rightarrow d &= 10^{1.5} \text{ km} = 31.6 \text{ km}.\end{aligned}$$

c) Bei ZSB-AM ohne Träger, das heißt für den Modulationsgrad $m \rightarrow \infty$, würde gelten:

$$\begin{aligned}\rho_v &= \frac{\alpha_K^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot B_{\text{NF}}} = \frac{P_E}{N_0 \cdot B_{\text{NF}}} = \frac{10^{-4} \text{ W}}{10^{-14} \text{ W/Hz} \cdot 8 \cdot 10^3 \text{ Hz}} = 1.25 \cdot 10^6 \\ \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_v &\approx 61 \text{ dB}.\end{aligned}$$

Mit dem Modulationsgrad $m = 0.5$ wird das Sinken-SNR um den Faktor

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{m^2}} = \frac{1}{9}$$

kleiner. Der Sinken-Störabstand ist somit ebenfalls geringer:

$$10 \cdot \lg \rho_v = 61 \text{ dB} - 10 \cdot \lg(9) \approx 51.5 \text{ dB}.$$

d) Entsprechend den Berechnungen zur Teilaufgabe c) muss nun folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\begin{aligned}10 \cdot \lg \left(1 + \frac{2}{m^2} \right) < 1 \text{ dB} &\Rightarrow 1 + \frac{2}{m^2} < 1.25 \\ \Rightarrow \frac{2}{m^2} < 0.25 &\Rightarrow m > \sqrt{8} \approx 2.83.\end{aligned}$$

e) Bei Verwendung eines Synchrondemodulators macht die Zusetzung des Trägers keinen Sinn, außer dass dieser für die erforderliche Trägerrückgewinnung nützlich sein könnte. Da der Träger zur Demodulation nicht genutzt werden kann, steht nur ein Bruchteil der Sendeleistung für die Demodulation zur Verfügung ($m = 1$: ein Drittel, $m = 0.5$: ein Neuntel). Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1 und 3.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.6

a) Das Leistungsdichtespektrum eines Cosinussignals mit der Amplitude A besteht aus zwei Diraclinien, jeweils mit Gewicht $A^2/4$. Die Leistung ergibt sich aus dem Integral über das LDS und ist somit gleich der Summe der beiden Diracgewichte. Mit $A = 4 \text{ V}$ erhält man somit für die Leistung des Quellensignals:

$$P_q = \frac{A^2}{2} = 8 \text{ V}^2.$$

Beim Modulationsverfahren „ZSB-AM ohne Träger“ ist dies gleichzeitig die auf den Einheitswiderstand 1Ω bezogene Sendeleistung.

b) Nach den elementaren Gesetzen der Elektrotechnik gilt:

$$P_q = \frac{8 \text{ V}^2}{50 \Omega} = 0.16 \text{ W}.$$

c) Im Theorieteil wird gezeigt, dass bei idealen Voraussetzungen $v(t) = q(t)$ gilt. Wegen der Amplitude 1 des empfängerseitigen Trägersignals (anstelle von 2) gilt hier $v(t) = q(t)/2$. Berücksichtigt man weiter die Kanaldämpfung $\alpha_K = 10^{-4}$, so erhält man das Ergebnis $\alpha = 0.5 \cdot 10^{-4}$.

d) Das Leistungsdichtespektrum (LDS) des Produktes $n(t) \cdot z(t)$ ergibt sich aus der Faltung der beiden Leistungsdichtespektren von $n(t)$ und $z(t)$:

$$\Phi'_\varepsilon(f) = \Phi_n(f) \star \Phi_z(f) = \frac{N_0}{2} \star [\delta(f - f_T) + \delta(f + f_T)] = N_0.$$

Für das Leistungsdichtespektrum des Signals $\varepsilon(t)$ nach dem Tiefpass erhält man eine Rechteckform mit dem gleichen Wert bei $f = 0$:

$$\Phi_\varepsilon(f) = \Phi'_\varepsilon(f) \cdot |H_E(f)|^2 \Rightarrow \Phi_\varepsilon(f = 0) = N_0 = 4 \cdot 10^{-19} \text{ W/Hz}.$$

e) Die Rauschleistung ist das Integral über die Rauschleistungsdichte:

$$P_\varepsilon = \int_{-f_E}^{+f_E} \Phi_\varepsilon(f) \, df = N_0 \cdot 2f_E = 4 \cdot 10^{-19} \frac{\text{W}}{\text{Hz}} \cdot 10^4 \text{ Hz} = 4 \cdot 10^{-15} \text{ W}.$$

f) Aus den Ergebnissen der Teilaufgaben b), c) und e) folgt:

$$\rho_v = \frac{\alpha^2 \cdot P_q}{P_\varepsilon} = \frac{(0.5 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 0.16 \text{ W}}{4 \cdot 10^{-15} \text{ W}} = 10^5 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_v = 50 \text{ dB}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A2.7

- a) Aus der Grafik erkennt man $A_T = 4 \text{ V}$. Daraus ergibt sich der Modulationsgrad $m = A_N/A_T = 1.25$.
 b) Aus der Bedingung $a(t) = q(t) + A_T = 0$ folgt direkt für die erste Nullstelle:

$$\cos(2\pi \cdot f_N \cdot t_1) = \frac{-A_T}{A_N} = -0.8 \Rightarrow t_1 = \frac{\arccos(-0.8)}{2\pi \cdot f_N} \approx \frac{0.795 \cdot \pi}{2\pi \cdot f_N}$$

Mit $f_N = 1 \text{ kHz}$ ergibt sich daraus $t_1 \approx 0.4 \text{ ms}$. Die zweite Nullstelle kann entsprechend zu $t_2 \approx 0.6 \text{ ms}$ berechnet werden.

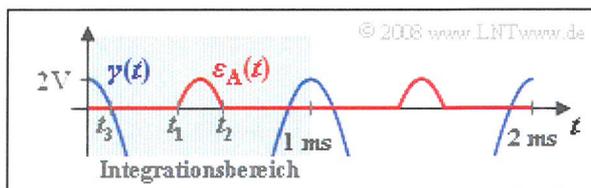
- c) Der Klirrfaktor zweiter Ordnung ist $K_2 = 0.458/4.48 \approx 0.102$. Entsprechend gilt für den Klirrfaktor dritter Ordnung: $K_3 = 0.367/4.48 \approx 0.082$. Die weiteren Klirrfaktoren sind $K_4 \approx 0.058$, $K_5 \approx 0.035$ sowie $K_6 \approx 0.015$. Damit erhält man für den Gesamtklirrfaktor:

$$K = \sqrt{K_2^2 + K_3^2 + K_4^2 + K_5^2 + K_6^2} \approx 14.8\%$$

- d) Die Verzerrungsleistung ergibt sich aus Mittelung von $\epsilon_A^2(t)$ über eine Periodendauer $T_0 = 1 \text{ ms}$:

$$P_{\epsilon A} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \epsilon_A^2(t) dt = \frac{I_\epsilon}{T_0}$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass das Fehlersignal $\epsilon_A(t)$ außerhalb des Intervalls von t_1 und t_2 gleich 0 ist.



Wie aus der Skizze hervorgeht, ist I_ϵ doppelt so groß als das Integral I_γ der Hilfsgröße γ im Intervall von 0 bis $t_3 = (t_2 - t_1)/2 \approx 0.1 \text{ ms}$:

$$I_\gamma = \int_0^{t_3} \gamma^2(t) dt = \text{mit } \gamma(t) = 2 \cdot (A_N \cdot \cos(\omega_N \cdot t) - A_T)$$

Eine Nebenrechnung liefert:

$$I_\gamma = 4 \cdot (I_1 + I_2 + I_3) \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= A_N^2 \cdot \int_0^{t_3} \cos^2(\omega_N \cdot t) dt = A_N^2 \cdot \left[\frac{t_3}{2} + \frac{\sin(2\omega_N \cdot t_3)}{4\omega_N} \right] = \\ &= 25 \text{ V}^2 \cdot [0.05 \text{ ms} + 0.0378 \text{ ms}] = 2.196 \cdot 10^{-3} \text{ V}^2\text{s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= -2 \cdot A_N \cdot A_T \cdot \int_0^{t_3} \cos(\omega_N \cdot t) dt = -2 \cdot A_N \cdot A_T \cdot \frac{\sin(\omega_N \cdot t_3)}{\omega_N} = \\ &= -2 \cdot 5 \text{ V} \cdot 4 \text{ V} \cdot 0.0935 \text{ ms} = -3.742 \cdot 10^{-3} \text{ V}^2\text{s}, \end{aligned}$$

$$I_3 = A_T^2 \cdot \int_0^{t_3} dt = A_T^2 \cdot t_3 = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ V}^2\text{s}$$

$$\Rightarrow I_\gamma = 0.216 \cdot 10^{-3} \text{ V}^2\text{s} \Rightarrow I_\varepsilon = 2 \cdot I_\gamma = 0.432 \cdot 10^{-3} \text{ V}^2\text{s}.$$

Somit erhält man als Endergebnis:

$$P_{\varepsilon A} = \frac{I_\varepsilon}{T_0} = 0.432 \text{ V}^2.$$

e) Die beiden Sinkensignale $v_A(t)$ und $v_B(t)$ unterscheiden sich ebenso wie die beiden Fehlersignale $\varepsilon_A(t)$ und $\varepsilon_B(t)$ um den Gleichanteil A_0 . Deshalb gilt:

$$P_{\varepsilon B} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} \varepsilon_B^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} [\varepsilon_A(t) - A_0]^2 dt.$$

Hierfür kann auch geschrieben werden:

$$P_{\varepsilon B} = P_1 + P_2 + P_3 \quad \text{mit}$$

$$P_1 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} \varepsilon_A^2(t) dt = P_{\varepsilon A},$$

$$P_2 = -2A_0 \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} \varepsilon_A(t) dt = -2A_0^2,$$

$$P_3 = A_0^2 \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} dt = A_0^2.$$

Damit ergibt sich für den quadratischen Mittelwert des Fehlersignals $\varepsilon_B(t)$:

$$P_{\varepsilon B} = P_{\varepsilon A} - A_0^2 = 0.432 \text{ V}^2 - (0.272 \text{ V})^2 = 0.358 \text{ V}^2.$$

Ein ähnliches Ergebnis hätte man auch nach folgendem Rechengang erhalten:

$$P_{\varepsilon B} = \frac{1 \text{ V}^2}{2} \cdot [(5 - 4.48)^2 + 0.458^2 + 0.367^2 + \dots + 0.066^2] \approx 0.356 \text{ V}^2.$$

Der geringe Unterschied in beiden Rechengängen ist darauf zurückzuführen, dass die Fourierkoeffizienten A_7, A_8, \dots zwar sehr klein, aber nicht identisch 0 sind.

f) Die Leistung des Quellensignals $q(t)$ beträgt $P_q = A_N^2/2 = 12.5 \text{ V}^2$. Daraus ergeben sich die beiden S/N-Verhältnisse:

$$\rho_{vA} = \frac{P_q}{P_{\varepsilon A}} = 28.94, \quad \rho_{vB} = \frac{P_q}{P_{\varepsilon B}} = 34.92.$$

Dies zeigt, dass der HKD mit Hochpass um etwa 6 dB besser ist als der Demodulator A.

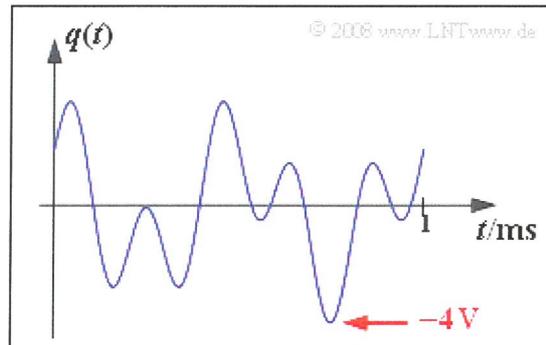
Anzumerken ist, dass die Näherung $\rho_v = \alpha^2 \cdot P_q/K^2$ hier zum verfälschten Zahlenwert $\rho_v = 36.66$ führen würde. Dieses unterschiedliche Ergebnis wird auf der Seite **Klirrfaktor (2)** im Kapitel 2.2 des Buches „Lineare zeitinvariante Systeme“ ausführlich begründet, wobei genau die für diese Aufgabe getroffenen Voraussetzungen zugrunde gelegt sind.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.7

a) Die Grafik zeigt, dass das Quellsignal alle Werte zwischen -4 V und $+3.667\text{ V}$ annehmen kann. Der maximale Betrag tritt zum Beispiel zum Zeitpunkt $t = 0.75\text{ ms}$ auf:

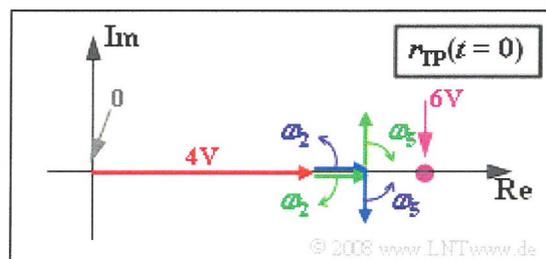
$$\begin{aligned} q(t = 0.75\text{ ms}) &= 2\text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 2\text{ kHz} \cdot 0.75\text{ ms}) + 2\text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot 5\text{ kHz} \cdot 0.75\text{ ms}) \\ &= 2\text{ V} \cdot \cos(3\pi) + 2\text{ V} \cdot \sin(7.5\pi) = -4\text{ V}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $q_{\max} = 4\text{ V}$.



b) In der Grafik auf der Angabenseite gibt das Gewicht der Diraclinie bei $f = 0$ die Amplitude des zusammengesetzten Trägers an. Diese ist $A_T = 4\text{ V}$. Daraus erhält man den Modulationsgrad $m = q_{\max}/A_T = 1$.

c) Da der Modulationsgrad nicht größer als 1 ist, führt auch der Hüllkurvendemodulator (HKD) nicht zu Verzerrungen. Der wesentliche Vorteil der HKD ist, dass keine Frequenz- und Phasensynchronität notwendig ist. Nachteilig ist, dass im Gegensatz zur Synchrondemodulation beim Sender eine deutlich höhere Leistung aufgebracht werden muss. Bei $m = 1$ ergibt sich gegenüber der ZSB-AM ohne Träger die dreifache Sendeleistung. Richtig sind die Lösungsvorschläge 2 und 3.

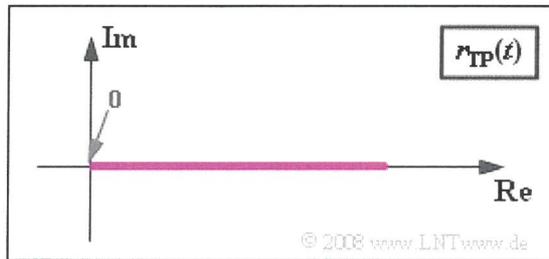


d) Mit $\omega_2 = 2\pi \cdot 2\text{ kHz}$ und $\omega_5 = 2\pi \cdot 5\text{ kHz}$ gilt:

$$\begin{aligned} r_{\text{TP}}(t) &= 4\text{ V} + 1\text{ V} \cdot e^{j \cdot \omega_2 \cdot t} + 1\text{ V} \cdot e^{-j \cdot \omega_2 \cdot t} \\ &\quad - j \cdot 1\text{ V} \cdot e^{j \cdot \omega_5 \cdot t} + j \cdot 1\text{ V} \cdot e^{-j \cdot \omega_5 \cdot t}. \end{aligned}$$

Bei der Konstruktion der Ortskurve $r_{\text{TP}}(t)$ sind somit genau fünf Zeiger zu berücksichtigen. Die Grafik zeigt eine Momentaufnahme zum Zeitpunkt $t = 0$. Der (rote) Träger ist für alle Zeiten durch den reellen Zeiger der Länge 4 V gegeben. Im Gegensatz zum Zeigerdiagramm (analytisches Signal) dreht dieser nicht.

Die dritte Aussage ist ebenso wie die Aussage 1 richtig: Die Drehzeiger bei negativen Frequenzen drehen in mathematisch negativer Richtung (im Uhrzeigersinn) im Gegensatz zu den beiden Zeigern mit $f > 0$. Die Aussagen 2 und 4 treffen dagegen nicht zu.



e) Im betrachteten Beispiel kann für das äquivalente TP-Signal auch geschrieben werden:

$$r_{\text{TP}}(t) = q(t) + A_{\text{T}}.$$

Damit ist offensichtlich, dass $r_{\text{TP}}(t)$ stets reell ist. Aus a) und b) folgt weiter $r_{\text{TP}}(t) \geq 0$ ist. Das bedeutet:

Die Ortskurve ist eine horizontale Gerade auf der reellen Geraden und liegt stets in der rechten Halbebene. Dies sind die beiden Bedingungen, dass mit einem Hüllkurvendemodulator das Nachrichtensignal verzerrungsfrei wiedergewonnen werden kann. Ist eine dieser Voraussetzungen nicht erfüllt, so kommt es zu **nichtlinearen** Verzerrungen. Das bedeutet, dass der letzte Lösungsvorschlag falsch ist.

Musterlösung zur Aufgabe A2.8

a) Bei cosinusförmigem Quellensignal gilt:

$$r_{\text{TP}}(t) = A_T + \frac{A_N}{2} \cdot \alpha_0 \cdot e^{j\omega_{\text{TR}}t} + \frac{A_N}{2} \cdot e^{-j\omega_{\text{TR}}t}.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ zeigen alle Vektoren in Richtung der reellen Achse. Somit kann aus der Grafik auf der Angabenseite $r_{\text{TP}}(t = 0) = 15 \text{ V}$ abgelesen werden.

b) Die Trägeramplitude ist durch den Ellipsenmittelpunkt festgelegt: $A_T = 10 \text{ V}$. Aus der bei Punkt a) angegebenen Gleichung kann somit auch die Amplitude A_N berechnet werden:

$$\frac{A_N}{2} \cdot (1 + \alpha_0) = r_{\text{TP}}(t = 0) - A_T = 5 \text{ V} \Rightarrow A_N = 8 \text{ V}.$$

Zur Kontrolle kann der Punkt (2) in der Grafik herangezogen werden:

$$\frac{A_N}{2} \cdot (1 - \alpha_0) = 3 \text{ V} \Rightarrow A_N = 8 \text{ V}.$$

c) Die für einen Umlauf benötigte Zeit t_1 ist gleich der Periodendauer des Quellensignals, also 0.5 ms .

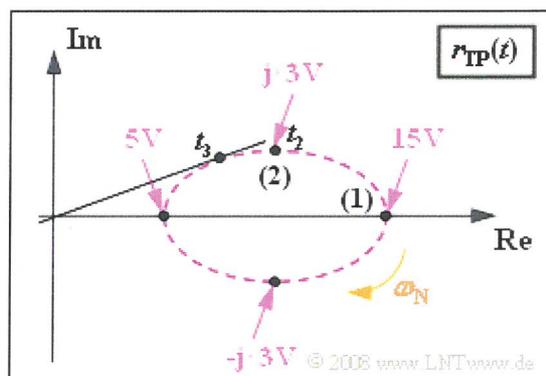
d) Da das USB größer ist als das OSB, bewegt sich die Spitze des Zeigerverbundes auf der Ellipse im Uhrzeigersinn. Der Punkt (2) wird zum Zeitpunkt $t_2 = 3/4 \cdot t_1 = 0.375 \text{ ms}$ zum ersten Mal erreicht.

e) Die Zeigerlänge zum Zeitpunkt t_2 kann mit dem Satz von **Pythagoras** bestimmt werden:

$$a(t = t_2) = \sqrt{(10 \text{ V})^2 + (3 \text{ V})^2} = 10.44 \text{ V}.$$

Für die Phasenfunktion gilt:

$$\phi(t = t_2) = \arctan \frac{3 \text{ V}}{10 \text{ V}} = 16.7^\circ.$$



Die maximale Phase ϕ_{max} ist geringfügig größer. Sie tritt (mit positivem Vorzeichen) zum Zeitpunkt $t_3 < t_2$ auf, wenn eine Gerade vom Koordinatenursprung die Ellipse tangiert. Durch Aufstellen der Ellipsengleichung kann dieser Punkt (x_3, y_3) analytisch exakt berechnet werden. Daraus würde für die maximale Phase gelten:

$$\phi_{\text{max}} = \arctan \frac{y_3}{x_3}.$$

f) Die Klirrfaktoren zweiter und dritter Ordnung lauten:

$$K_2 = \frac{0.148 \text{ V}}{2.424 \text{ V}} = 0.061, \quad K_3 = \frac{0.056 \text{ V}}{2.424 \text{ V}} = 0.023.$$

Damit erhält man für den Gesamtklirrfaktor:

$$K = \sqrt{K_2^2 + K_3^2} \approx 6.6\%.$$

g) Für die Leistungen von Nutz- und Störsignal erhält man:

$$P_{v1} = \frac{(2.424 \text{ V})^2}{2} = 2.94 \text{ V}^2,$$

$$P_\varepsilon = \frac{(-0.148 \text{ V})^2}{2} + \frac{(0.056 \text{ V})^2}{2} = 0.0125 \text{ V}^2.$$

Damit ergibt sich:

$$\rho_{v1} = \frac{P_{v1}}{P_\varepsilon} = \frac{(2.94 \text{ V})^2}{0.0125 \text{ V}^2} \approx 230 = \frac{1}{K^2}.$$

Würde man dagegen die Amplitudenverfälschung ebenfalls dem Fehlersignal zuweisen, so käme man zu einem deutlich kleineren SNR. Mit $P_q = A_N^2/2 = 8 \text{ V}^2$ und

$$P_\varepsilon' = \overline{(v(t) - q(t))^2} = \frac{1}{2} \cdot (4 \text{ V} - 2.424 \text{ V})^2 + P_\varepsilon = 1.254 \text{ V}^2$$

würde man erhalten:

$$\rho_{v'} = \frac{8 \text{ V}^2}{1.254 \text{ V}^2} \approx 6.4.$$

h) Alle Berechnungen gelten unabhängig von der Nachrichtenfrequenz f_N , wenn der Dämpfungsfaktor des OSB weiterhin $\alpha_O = 0.25$ beträgt. Dann erhält man ebenfalls $K \approx 6.6\%$.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.8

a) Anhand der Grafiken auf der Angabenseite sind folgende Aussagen möglich:

$$\begin{aligned}A_T \cdot 0.5 &= 2 \text{ V} &\Rightarrow & A_T = 4 \text{ V}, \\ \frac{A_1}{2} \cdot 0.4 &= 0.6 \text{ V} &\Rightarrow & A_1 = 3 \text{ V}, \\ \frac{A_2}{2} \cdot 0.2 &= 0.4 \text{ V} &\Rightarrow & A_2 = 4 \text{ V}.\end{aligned}$$

b) Der Modulationsgrad ergibt sich zu $m = (A_1 + A_2)/A_T = 1.75$. Damit ergeben sich bei Verwendung eines Hüllkurvendemodulators starke nichtlineare Verzerrungen. Ein Klirrfaktor kann nicht angegeben werden, da das Quellsignal zwei Frequenzanteile beinhaltet.

c) Die Fourierreücktransformation von $R_{TP}(f)$ führt zum Ergebnis:

$$r_{TP}(t) = 2 \text{ V} + 1.2 \text{ V} \cdot \cos(2\pi f_1 t) + 0.8 \text{ V} \cdot \cos(2\pi f_2 t).$$

Diese Funktion ist stets reell und nicht-negativ. Damit gilt gleichzeitig $\phi(t) = 0$. Richtig sind also die Aussagen 1 und 2.

d) Ein Vergleich der beiden Signale

$$\begin{aligned}q(t) &= 3 \text{ V} \cdot \cos(2\pi f_1 t) + 4 \text{ V} \cdot \cos(2\pi f_2 t), \\ v(t) &= 0.4 \cdot 3 \text{ V} \cdot \cos(2\pi f_1 t) + 0.2 \cdot 4 \text{ V} \cdot \cos(2\pi f_2 t)\end{aligned}$$

zeigt, dass nun lineare Verzerrungen – genauer gesagt Dämpfungsverzerrungen – auftreten.

Der Kanal $H_K(f)$ hat hier den positiven Effekt, dass anstelle von irreversiblen nichtlinearen Verzerrungen nun nichtlineare Verzerrungen entstehen, die durch ein nachgeschaltetes Filter eliminiert werden können. Dies ist darauf zurückzuführen, dass durch die stärkere Dämpfung des Quellsignals $q(t)$ im Vergleich zum Trägersignal $z(t)$ der Modulationsgrad von $m = 1.75$ auf $m = (0.4 \cdot 3 \text{ V} + 0.2 \cdot 4 \text{ V}) / (0.5 \cdot 4 \text{ V}) = 1$ vermindert wird.

Musterlösung zur Aufgabe A2.9

a) Bei der ZSB-AM sind folgende Dämpfungsfaktoren zu berücksichtigen:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot [H_K(f = 48 \text{ kHz}) + H_K(f = 52 \text{ kHz})] = 0.981,$$
$$\alpha_4 = \frac{1}{2} \cdot [H_K(f = 46 \text{ kHz}) + H_K(f = 54 \text{ kHz})] = 0.861.$$

Damit ergeben sich die Amplituden $A_2 = 1.882 \text{ V}$ und $A_4 = 1.722 \text{ V}$.

b) Bei ZSB führt ein Phasenversatz zwischen den Trägerfrequenzen von Sender und Empfänger nur zu einer für alle Frequenzen gleichen Dämpfung:

$$A_2 = \cos(30^\circ) \cdot 1.882 \text{ V} = 1.630 \text{ V},$$
$$A_4 = \cos(30^\circ) \cdot 1.722 \text{ V} = 1.491 \text{ V}.$$

Die Laufzeiten τ_2 und τ_4 sind jeweils 0.

c) Bei OSB-AM wird der Dämpfungsfaktor α_2 allein von $H_K(f = 52 \text{ kHz})$ bestimmt. Da der prinzipielle Amplitudenverlust um den Faktor 2 durch eine größere Trägeramplitude ausgeglichen wird, gilt:

$$A_2 = 0.882 \cdot 2 \text{ V} = 1.764 \text{ V},$$
$$A_4 = 0.754 \cdot 2 \text{ V} = 1.508 \text{ V}.$$

d) Analog zur Lösung der Teilaufgabe c) erhält man hier:

$$A_2 = H_K(f = 48 \text{ kHz}) \cdot 2 \text{ V} = 2 \text{ V},$$
$$A_4 = H_K(f = 46 \text{ kHz}) \cdot 2 \text{ V} = 1.936 \text{ V}.$$

e) Bei der USB-AM lautet das Empfangssignal:

$$r(t) = 1 \text{ V} \cdot \cos(\omega_{48} \cdot t) + 0.968 \text{ V} \cdot \cos(\omega_{46} \cdot t).$$

Durch Multiplikation mit dem empfangsseitigen Trägersignal

$$z_E(t) = 1 \cdot \cos(\omega_{50} \cdot t - \Delta\phi_T)$$

erhält man nach Anwendung des trigonometrischen Additionstheorems:

$$v(t) = r(t) \cdot z_E(t) = 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t - \Delta\phi_T) + 1.936 \text{ V} \cdot \cos(\omega_4 \cdot t - \Delta\phi_T) \\ + (\text{Anteile um die doppelte Trägerfrequenz}).$$

Unter Berücksichtigung des nachfolgenden Tiefpassfilters kann hierfür auch geschrieben werden:

$$v(t) = A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot (t - \tau_2)) + A_4 \cdot \cos(\omega_4 \cdot (t - \tau_4)).$$

Die Amplituden sind gegenüber Teilaufgabe d) unverändert. Für die Laufzeiten erhält man mit $\Delta\phi_T = \pi/6$:

$$\tau_2 = \frac{\Delta\phi_T}{2\pi \cdot f_2} = \frac{\pi/6}{2\pi \cdot 2 \text{ kHz}} \approx 41.6 \mu\text{s},$$
$$\tau_4 = \frac{\Delta\phi_T}{2\pi \cdot f_4} = \frac{\tau_2}{2} \approx 20.8 \mu\text{s}.$$

f) Richtig sind der erste und der letzte Lösungsvorschlag: Auch bei ESB führen Dämpfungsverzerrungen auf dem Kanal ausschließlich zu Dämpfungsverzerrungen bezüglich $v(t)$. Phasenverzerrungen gibt es nur bei einem Demodulator mit Phasenversatz, wenn eine Einseitenbandmodulation Anwendung findet. Bei der ZSB-AM hätte ein solcher Phasenversatz überhaupt keine Verzerrungen zur Folge, sondern lediglich

eine frequenzunabhängige Dämpfung.

Zu Phasenverzerrungen bezüglich $v(t)$ kommt es natürlich auch, wenn solche bereits auf dem Kanal auftreten, und zwar sowohl bei der ZSB- als auch bei der OSB-AM.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.9

a) Es handelt sich um einen Synchrondemodulator.

b) Bei ZSB-AM ohne Träger gilt $P_S = P_q/2$. Dies ist auch gleichzeitig die Leistung des Nutzanteils des Sinkensignals $v(t)$. Das Leistungsdichtespektrum $\Phi_\varepsilon(f)$ des Rauschanteils von $v(t)$ ergibt sich aus der Faltung:

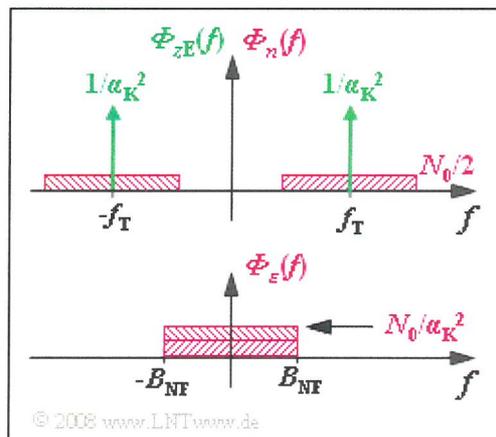
$$\Phi_\varepsilon(f) = \Phi_{zE}(f) \star \Phi_n(f) = \frac{1}{\alpha_K^2} \cdot [\delta(f - f_T) + \delta(f + f_T)] \star \Phi_n(f).$$

Der Ausdruck [...] beschreibt das Leistungsdichtespektrum eines Cosinussignals mit der Amplitude $K = 2$. Mit $1/\alpha_K^2$ wird die Korrektur des Kanaldämpfungsfaktors berücksichtigt. Unter Berücksichtigung von $\Phi_n(f) = N_0/2$ ergibt sich somit:

$$\Phi_\varepsilon(f) = \frac{N_0}{\alpha_K^2} \quad \Rightarrow \quad P_\varepsilon = \int_{-B_{NF}}^{+B_{NF}} \Phi_\varepsilon(f) df = \frac{2 \cdot N_0 \cdot B_{NF}}{\alpha_K^2}.$$

Daraus folgt für das Signal-zu-Rausch-Leistungsverhältnis (SNR):

$$\rho_v = \frac{P_q}{P_\varepsilon} = \frac{2 \cdot P_S}{2 \cdot N_0 \cdot B_{NF} / \alpha_K^2} = \frac{\alpha_K^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot B_{NF}} = \xi.$$



c) Im Gegensatz zur ZSB gilt nun $P_S = P_q/4$ sowie

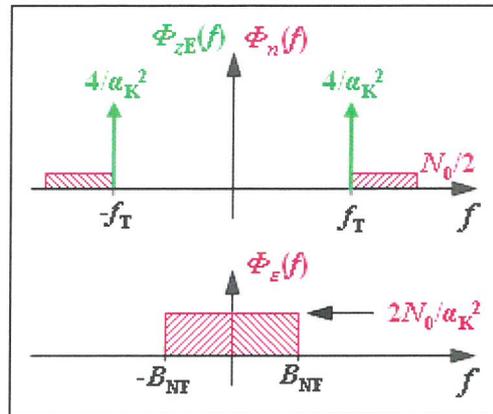
$$\Phi_\varepsilon(f) = \Phi_{zE}(f) \star \Phi_n(f) = \frac{1}{\alpha_K^2} \cdot [\delta(f - f_T) + \delta(f + f_T)] \star \Phi_n(f).$$

Unter Berücksichtigung von $B_{HF} = B_{NF}$ (siehe Skizze für OSB) erhält man nun:

$$\Phi_\varepsilon(f) = \frac{2 \cdot N_0}{\alpha_K^2} \quad \Rightarrow \quad P_\varepsilon = \frac{4 \cdot N_0 \cdot B_{NF}}{\alpha_K^2}.$$

$$\Rightarrow \quad \rho_v = \frac{P_q}{P_\varepsilon} = \frac{4 \cdot P_S}{4 \cdot N_0 \cdot B_{NF} / \alpha_K^2} = \frac{\alpha_K^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot B_{NF}}.$$

Das bedeutet: Verzichtet man auf die Übertragung des Trägers, so zeigt die Einseitenbandmodulation das gleiche Rauschverhalten wie die ZSB-AM.



d) Ausgehend vom cosinusförmigen Träger mit der Amplitude A_T und dem ebenfalls cosinusförmigen Nachrichtensignal $q(t)$ erhält man bei ZSB-AM mit Träger:

$$\begin{aligned} s(t) &= (q(t) + A_T) \cdot \cos(\omega_T \cdot t) = \\ &= A_T \cdot \cos(\omega_T \cdot t) + \frac{A_N}{2} \cdot \cos((\omega_T + \omega_N) \cdot t) + \frac{A_N}{2} \cdot \cos((\omega_T - \omega_N) \cdot t). \end{aligned}$$

Die Sendeleistung ergibt sich somit zu

$$P_S = \frac{A_T^2}{2} + 2 \cdot \frac{(A_N/2)^2}{2} = \frac{A_T^2}{2} + \frac{A_N^2}{4}.$$

Unter Berücksichtigung von $P_q = A_N^2/2$ und $m = A_N/A_T$ kann hierfür auch geschrieben werden:

$$P_S = \frac{A_N^2}{4} \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot A_T^2}{A_N^2} \right] = \frac{P_q}{2} \cdot \left[1 + \frac{2}{m^2} \right].$$

Mit der Rauschleistung P_ϵ gemäß Teilaufgabe b) erhält man somit:

$$\rho_v = \frac{P_q}{P_\epsilon} = \frac{2 \cdot P_S \cdot (1 + 2/m^2)}{2 \cdot N_0 \cdot B_{NF} / \alpha_K^2} = \frac{\alpha_K^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot B_{NF}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{m^2}},$$

und in logarithmischer Darstellung:

$$10 \cdot \lg \rho_v = 10 \cdot \lg \xi - 10 \cdot \lg \left[1 + \frac{2}{m^2} \right].$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_v (m = 0.5) &= 40 \text{ dB} - 10 \cdot \lg(9) = 30.46 \text{ dB} \\ 10 \cdot \lg \rho_v (m = 1.0) &= 40 \text{ dB} - 10 \cdot \lg(3) = 35.23 \text{ dB}. \end{aligned}$$

e) Bei der ESB-AM trägt nur ein Seitenband zur Sendeleistung bei und es gilt unter Berücksichtigung des Seitenband-zu-Träger-Verhältnisses $\mu = A_N/(2A_T)$:

$$P_S = \frac{A_T^2}{2} + \frac{(A_N/2)^2}{2} = \frac{A_N^2}{8} \cdot \left[1 + \frac{4 \cdot A_T^2}{A_N^2} \right] = \frac{P_q}{4} \cdot \left[1 + \frac{1}{\mu^2} \right].$$

Somit erhält man mit der Rauschleistung entsprechend der Teilaufgabe c):

$$\rho_v = \frac{P_q}{P_\epsilon} = \frac{4 \cdot P_S \cdot (1 + 1/\mu^2)}{4 \cdot N_0 \cdot B_{NF} / \alpha_K^2} = \frac{\alpha_K^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot B_{NF}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu^2}}$$

$$\Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_v = 10 \cdot \lg \xi - 10 \cdot \lg \left[1 + \frac{1}{\mu^2} \right].$$

Das bedeutet: Man erhält bei der ESB-AM das gleiche Ergebnis wie bei einer ZSB-AM mit dem Modulationsgrad $m = 2^{1/2} \cdot \mu$. Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} 10 \cdot \lg \rho_v (\text{ESB}, \mu = 0.5/\sqrt{2}) &= 10 \cdot \lg \rho_v (\text{ZSB}, m = 0.5) = 30.46 \text{ dB}, \\ 10 \cdot \lg \rho_v (\text{ESB}, \mu = 1.0/\sqrt{2}) &= 10 \cdot \lg \rho_v (\text{ZSB}, m = 1.0) = 35.23 \text{ dB}. \end{aligned}$$

Musterlösung zur Aufgabe A2.10

a) Der Maximalwert $a_{\max} = 2 \text{ V}$ und der Minimalwert $a_{\min} = 0$ können aus der Grafik abgelesen oder über die angegebene Gleichung berechnet werden:

$$\begin{aligned} a_{\max} &= A_T \cdot \sqrt{1 + \mu^2 + 2\mu} = A_T \cdot (1 + \mu) = 2 \text{ V}, \\ a_{\min} &= A_T \cdot \sqrt{1 + \mu^2 - 2\mu} = A_T \cdot (1 - \mu) = 0. \end{aligned}$$

Für die Extremwerte des Sinkensignals folgt daraus:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= 2 \cdot [a_{\max} - A_0] = 2 \cdot [2 \text{ V} - 1.273 \text{ V}] = 1.454 \text{ V}, \\ v_{\min} &= -2 \cdot A_0 = -2.546 \text{ V}. \end{aligned}$$

b) Unter Vernachlässigung der Fourierkoeffizienten A_5, A_6 , usw. erhält man:

$$K = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2}}{A_1} = \frac{\sqrt{0.170^2 + 0.073^2 + 0.040^2} \text{ V}}{0.849 \text{ V}} \approx 22.3\%.$$

Die Näherung $K \approx \mu/4$ liefert hier den Wert 25%.

c) Nur der erste Lösungsvorschlag ist richtig. Aufgrund des Hochpasses innerhalb des HKD wäre der Gleichsignalanteil auch dann 0, wenn keine Verzerrungen vorlägen.

d) Analog zur Teilaufgabe a) gilt hier:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= 2 \cdot [a_{\max} - A_0] = 2 \cdot [1.5 \text{ V} - 1.064 \text{ V}] = 0.872 \text{ V}, \\ v_{\min} &= -2 \cdot A_0 = -2.128 \text{ V}. \end{aligned}$$

e) Bei kleinerem Seitenband-zu-Träger-Verhältnis ergibt sich auch ein kleinerer Klirrfaktor:

$$K = \frac{0.058 \text{ V}}{0.484 \text{ V}} \approx 12\%.$$

Die Näherung $K \approx \mu/4$ ergibt hier 12.5%. Daraus kann geschlossen werden, dass die angegebene Faustformel bei kleinem μ genauer ist.

f) Der Klirrfaktor ist dann am größten, wenn eines der Seitenbänder völlig abgeschnitten wird. Da aber der Hüllkurvendemodulator keinerlei Kenntnis davon hat, ob eine ESB-AM oder eine durch $H_K(f)$ beeinträchtigte ZSB-AM vorliegt, gibt $K_{\max} \approx \mu/4$ gleichzeitig eine obere Schranke für die ZSB-AM an.

Ein Vergleich der Parameter $m = A_N/A_T$ und $\mu = A_N/(2A_T)$ führt zum Ergebnis:

$$K_{\max} = \frac{\mu}{4} = \frac{m}{8} = 6.25\%.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.10

a) Richtig sind die Lösungsvorschläge 2 und 4. Das äquivalente TP-Signal lautet:

$$s_{\text{TP}}(t) = 1 \text{ V} + j \cdot 1 \text{ V} \cdot e^{-j \cdot \omega_{\text{M}} \cdot t}.$$

Die Ortskurve ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt bei $A_{\text{T}} = 1 \text{ V}$. Da die Drehung im Uhrzeigersinn erfolgt, handelt es sich um eine USB-AM. Der sich drehende (grüne) Zeiger zeigt zum Startzeitpunkt $t = 0$ in Richtung der imaginären Achse. Daraus folgt, dass für das Quellsignal gelten wird:

$$q(t) = A_{\text{N}} \cdot \sin(\omega_{\text{N}} \cdot t).$$

b) Bei der USB wird nur das untere Seitenband mit der Zeigerlänge $A_{\text{N}}/2 = 1 \text{ V}$ übertragen. Daraus ergibt sich $A_{\text{N}} = 2 \text{ V}$. Für eine Umdrehung in der Ortskurve benötigt der Zeiger die Zeit $200 \mu\text{s}$. Der Kehrwert hiervon ist die Frequenz $f_{\text{N}} = 5 \text{ kHz}$.

c) Entsprechend der Definition auf der Angabenseite und den Ergebnissen zu a) und b) gilt:

$$\mu = \frac{A_{\text{N}}/2}{A_{\text{T}}} = 1.$$

Damit kann für das äquivalente TP-Signal auch geschrieben werden:

$$s_{\text{TP}}(t) = A_{\text{T}} \cdot (1 + j \cdot \mu \cdot e^{-j \cdot \omega_{\text{M}} \cdot t}), \text{ hier } \mu = 1.$$

d) Spaltet man die komplexe Exponentialfunktion mit dem Satz von Euler nach Real- und Imaginärteil auf, so erhält man:

$$s_{\text{TP}}(t) = A_{\text{T}} \cdot (1 + \sin(\omega_{\text{N}} \cdot t) + j \cos(\omega_{\text{N}} \cdot t)).$$

Durch Anwendung des Satzes von Pythagoras kann hierfür auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} a(t) &= |s_{\text{TP}}(t)| = A_{\text{T}} \cdot \sqrt{(1 + \sin(\omega_{\text{N}} \cdot t))^2 + \cos^2(\omega_{\text{N}} \cdot t)} = \\ &= |s_{\text{TP}}(t)| = A_{\text{T}} \cdot \sqrt{2 + 2 \cdot \sin(2\omega_{\text{N}} \cdot t)}. \end{aligned}$$

Die abgefragten Werte lauten mit $A_{\text{T}} = 1 \text{ V}$:

$$a(t = 50 \mu\text{s}) = 2 \text{ V}, \quad a(t = 100 \mu\text{s}) = 1.414 \text{ V}, \quad a(t = 150 \mu\text{s}) = 0.$$

Diese Ergebnisse können auch direkt aus der Grafik auf der Angabenseite abgelesen werden.

e) Ein Hinweis für die Lage der Nulldurchgänge von $s(t)$ gegenüber dem durch das Trägersignal $z(t)$ vorgegebenen Raster liefert die Phasenfunktion $\phi(t)$. Bei der gegebenen Ortskurve können diese Werte zwischen $\pm\pi/2$ ($\pm 90^\circ$) annehmen. Diese Maximalwerte treten zum Beispiel im Bereich um $t \approx 150 \mu\text{s}$ auf, da hier ein Phasensprung stattfindet. Der Zusammenhang zwischen τ_{max} und ϕ_{max} lautet:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\Delta\phi_{\text{max}}}{2\pi} \cdot \frac{1}{f_{\text{T}}} = \frac{1}{4} \cdot 10 \mu\text{s} = 2.5 \mu\text{s}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A2.11

a) Mit den angegebenen trigonometrischen Umformungen erhält man:

$$\begin{aligned} s(t) &= A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) \cdot \sin(\omega_T \cdot t) = \\ &= \frac{A_1}{2} \cdot \cos((\omega_T - \omega_1) \cdot t) + \frac{A_1}{2} \cdot \cos((\omega_T + \omega_1) \cdot t) + \\ &+ \frac{A_2}{2} \cdot \cos((\omega_T - \omega_2) \cdot t) - \frac{A_2}{2} \cdot \cos((\omega_T + \omega_2) \cdot t). \end{aligned}$$

Richtig ist demnach der zweite Lösungsvorschlag.

b) Mit $A_1 = A_2 = 2 \text{ V}$ und $f_1 = f_2 = 5 \text{ kHz}$ überlagern sich zwei dieser Cosinusschwingungen konstruktiv und zwei weitere heben sich vollständig auf. Es ergibt sich somit das folgende einfache Ergebnis:

$$s(t) = 2 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 20 \text{ kHz} \cdot t) \Rightarrow s(t = 50 \mu\text{s}) = 2 \text{ V}.$$

c) Richtig ist der erste Lösungsvorschlag. Bei phasensynchroner Demodulation ($\Delta\phi_T = 0$) erhält man für die Signale vor den beiden Tiefpässen mit $r(t) = s(t)$ entsprechend Teilaufgabe b):

$$\begin{aligned} b_1(t) &= 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_{20} \cdot t) \cdot 2 \cdot \cos(\omega_{25} \cdot t) = 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_5 \cdot t) + 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_{45} \cdot t), \\ b_2(t) &= 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_{20} \cdot t) \cdot 2 \cdot \sin(\omega_{25} \cdot t) = 2 \text{ V} \cdot \sin(\omega_5 \cdot t) + 2 \text{ V} \cdot \sin(\omega_{45} \cdot t). \end{aligned}$$

Nach Eliminierung der jeweiligen 45 kHz-Anteile ergibt sich somit $v_1(t) = q_1(t)$ und $v_2(t) = q_2(t)$.

d) Analog zur Teilaufgabe c) gilt nun:

$$\begin{aligned} b_1(t) &= 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_{20} \cdot t) \cdot 2 \cdot \cos(\omega_{25} \cdot t + \Delta\phi_T) = \\ &= 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_5 \cdot t + \Delta\phi_T) + (45 \text{ kHz} - \text{Anteil}), \\ b_2(t) &= 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_{20} \cdot t) \cdot 2 \cdot \sin(\omega_{25} \cdot t + \Delta\phi_T) = \\ &= 2 \text{ V} \cdot \sin(\omega_5 \cdot t + \Delta\phi_T) + (45 \text{ kHz} - \text{Anteil}). \end{aligned}$$

Die Sinkensignale $v_1(t)$ und $v_2(t)$ weisen bei dieser Konstellation gegenüber $q_1(t)$ und $q_2(t)$ Laufzeiten und damit Phasenverzerrungen auf. Diese gehören zur Klasse der linearen Verzerrungen.

e) Allgemein gilt für das Empfangssignal:

$$r(t) = s(t) = q_1(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t) + q_2(t) \cdot \sin(\omega_T \cdot t).$$

Die Multiplikation mit den empfängerseitigen Trägersignalen $z_{1,E}(t)$ und $z_{2,E}(t)$ und die abschließende Bandbegrenzung führt zu den Sinkensignalen

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \cos(\Delta\phi_T) \cdot q_1(t) - \sin(\Delta\phi_T) \cdot q_2(t), \\ v_2(t) &= \sin(\Delta\phi_T) \cdot q_1(t) + \cos(\Delta\phi_T) \cdot q_2(t). \end{aligned}$$

Daraus ist zu ersehen: Bei einem Phasenversatz von $\Delta\phi_T = 30^\circ$ beinhaltet das Sinkensignal $v_1(t)$ nicht nur das um $\cos(30^\circ) = 0.866$ gedämpfte Signal $q_1(t)$, sondern auch die in $q_2(t)$ enthaltene Frequenz f_2 (diese ist mit dem Faktor $\sin(30^\circ) = 0.5$ gewichtet). Es liegen somit nichtlineare Verzerrungen vor.

Musterlösung zur Aufgabe A2.12

a) Durch Anwendung der auf der Angabenseite gegebenen trigonometrischen Umformungen erhält man unter Berücksichtigung der beiden Tiefpässe (Anteile um die doppelte Trägerfrequenz werden entfernt):

$$\begin{aligned}b_1(t) &= q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \Delta\phi_T) \cdot 2 \cdot \cos(\omega_T \cdot t) = q(t) \cdot \cos(\Delta\phi_T), \\b_2(t) &= q(t) \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \Delta\phi_T) \cdot (-2) \cdot \sin(\omega_T \cdot t) = q(t) \cdot \sin(\Delta\phi_T).\end{aligned}$$

Richtig sind somit die erste und die vierte Antwort.

b) Die Summe der Quadrate der beiden Teilsignale ergibt:

$$b(t) = b_1^2(t) + b_2^2(t) = q^2(t) \cdot (\cos^2(\Delta\phi_T) + \sin^2(\Delta\phi_T)) = q^2(t).$$

Die möglichen Amplitudenwerte sind somit $b_{\min} = 0$ und $b_{\max} = 9$.

c) Richtig ist der zweite Lösungsvorschlag.

d) Das Ergebnis $b(t) = q^2(t)$ – siehe Teilaufgabe b) – führt hier zu $b_{\min} = b_{\max} = 9$. Dies zeigt, dass der hier betrachtete Demodulator nur dann funktioniert, wenn $q(t) \geq 0$ oder $q(t) \leq 0$ gilt und dies dem Empfänger auch bekannt ist.

