

Musterlösung zur Aufgabe A3.1

a) Es handelt sich um eine ESB-AM mit dem Seitenband-zu-Träger-Verhältnis $\mu = 1 \Rightarrow$ Antwort 2. Bewegt man sich auf dem Kreis in mathematisch positive Richtung, so liegt speziell eine OSB-AM vor, andernfalls eine USB-AM.

Die Phasenfunktion $\phi(t)$ als der Winkel eines Punktes $s_{TP}(t)$ auf dem Kreis(bogen) bezogen auf den Koordinatenursprung kann Werte zwischen $\pm\pi/2$ annehmen und zeigt keinen Cosinusverlauf. Aber auch die Hüllkurve $a(t) = |s_{TP}(t)|$ ist nicht cosinusförmig. Würde man beim Empfänger für M_1 einen Hüllkurvendemodulator einsetzen, so käme es zu nichtlinearen Verzerrungen im Gegensatz zur ZSB-AM, deren Ortskurve eine horizontale Gerade ist.

b) Hier handelt es sich um die Phasenmodulation \Rightarrow Antwort 3. Die Einhüllende $a(t) = A_T$ ist konstant, während die Phase $\phi(t)$ entsprechend dem Quellsignal cosinusförmig verläuft.

c) Bei der Phasenmodulation gilt

$$s_{TP}(t) = A_T \cdot e^{j \cdot \phi(t)}.$$

Aus der Grafik kann man die Trägeramplitude $A_T \underline{=} 1 \text{ V}$ als den Kreisradius ablesen.

d) Das Quellsignal $q(t)$ ist zum Zeitpunkt $t = 0$ maximal und damit auch die Phasenfunktion:

$$\eta = \phi_{\max} = \phi(t = 0) \underline{=} \pi.$$

Daraus erhält man für die Modulatorkonstante:

$$K_{PM} = \frac{\eta}{A_N} = \frac{\pi}{2 \text{ V}} \underline{=} 1,571 \text{ V}^{-1}.$$

e) Man bewegt sich auf dem Kreis(bogen) im Uhrzeigersinn. Nach einem Viertel der Periodendauer $T_N = 1/f_N = 200 \text{ } \mu\text{s}$ ist $\phi(t) = 0$ und $s_{TP}(t) = 1 \text{ V}$. Zur Zeit $t_1 = T_N/2 = 100 \text{ } \mu\text{s}$ gilt $\phi(t_1) = -\pi$ und $s_{TP}(t_1) = -1 \text{ V}$. Danach bewegt man sich auf dem Kreisbogen entgegen dem Uhrzeigersinn.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.1

- a)** Man erkennt aus der Skizze, dass der dargestellte Signalausschnitt der Dauer $200 \mu\text{s}$ genau der Periodendauer des sinusförmigen Quellensignals entspricht. Daraus folgt $f_N \equiv 5 \text{ kHz}$. Zu den Zeitpunkten $t = 0$, $t = 100 \mu\text{s}$ und $t = 200 \mu\text{s}$ sind die Signale $z(t)$ und $s(t)$ phasensynchron. In der ersten Halbwelle von $q(t)$ kommen die Nulldurchgänge von $s(t)$ etwas früher als die des Trägersignals $z(t)$, was auf eine positive Phase hinweist. Dagegen ist im Bereich von 100 bis $200 \mu\text{s}$ die Phase $\phi(t) < 0$.
- b)** Es gilt $f_T \equiv 50 \text{ kHz}$, da im dargestellten Signalausschnitt ($200 \mu\text{s}$) von $z(t)$ genau 10 Perioden abgezählt werden können.
- c)** Die maximale relative Phasenabweichung beträgt $\phi_{\max} = \eta_1 / (2\pi) \approx 0.318$.
- d)** Da die Periodendauer des Trägers $T_0 = 20 \mu\text{s}$ ist, erhält man $\Delta t_{\max} = \phi_{\max} \cdot T_0 \approx 6.37 \mu\text{s}$.
- e)** Die maximale Phasenabweichung (Verschiebung der Nulldurchgänge) ist bei $s_2(t)$ genau so groß wie bei $s_1(t)$. Daraus kann auf $\eta_2 = \eta_1 \equiv 2$ geschlossen werden.
- f)** Das Signal $s_2(t)$ ist gegenüber $s_1(t)$ um $25 \mu\text{s}$ nach rechts verschoben. Deshalb muss auch für die Quellensignale gelten:

$$q_2(t) = q_1(t - 25 \mu\text{s}) = \cos(2\pi f_N(t - 25 \mu\text{s})) = \cos(\omega_N \cdot t - 0.75 \cdot \pi).$$

Dies entspricht der Phasenlage $\phi_{N2} \equiv -135^\circ$.

Musterlösung zur Aufgabe A3.2

- a)** Es handelt sich um eine Phasenmodulation: Die Phase $\phi(t)$ ist proportional zum Quellsignal $q(t) \Rightarrow$ Antwort 2.
- b)** Eine Winkelmodulation (PM, FM) führt bei bandbegrenztem Kanal zu nichtlinearen Verzerrungen. Bei AM ist dagegen bereits mit $B_K = 6$ kHz eine verzerrungsfreie Übertragung möglich \Rightarrow Antwort 1.
- c)** Der Modulationsindex (oder Phasenhub) ist bei PM gleich $\eta = K \cdot A_N$. Somit ist $K = 1/A_N = 0.5$ 1/V zu wählen, damit sich $\eta = 1$ ergibt.
- d)** Es liegt ein sogenanntes Besselspektrum vor:

$$S_{TP}(f) = A_T \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot \delta(f - n \cdot f_N).$$

Dieses ist ein diskretes Spektrum mit Anteilen bei $f = n \cdot f_N$, wobei n ganzzahlig ist. Die Gewichte der Diracfunktionen sind durch die Besselfunktionen gegeben. Mit $A_T = 1$ V erhält man:

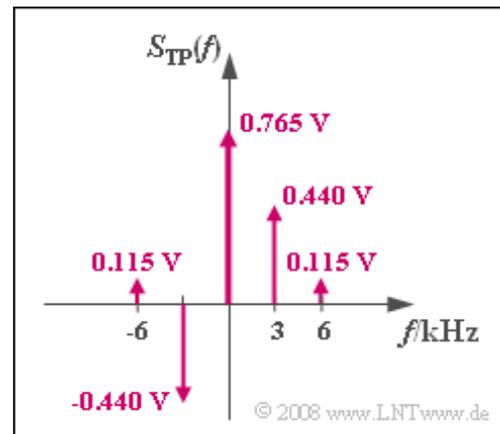
$$\begin{aligned} S_{TP}(f = 0) &= A_T \cdot J_0(\eta = 1) = \underline{0.765 \text{ V}}, \\ S_{TP}(f = f_N) &= A_T \cdot J_1(\eta = 1) = 0.440 \text{ V}, \\ S_{TP}(f = 2 \cdot f_N) &= A_T \cdot J_2(\eta = 1) = 0.115 \text{ V}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaft

$$J_{-n}(\eta) = (-1)^n \cdot J_n(\eta)$$

erhält man für die Spektrallinie bei $f = -3$ kHz:

$$S_{TP}(f = -f_N) = -S_{TP}(f = +f_N) = \underline{-0.440 \text{ V}}.$$



Anmerkung: Eigentlich müsste man für den Spektralwert bei $f = 0$ schreiben:

$$S_{TP}(f = 0) = 0.765 \text{ V} \cdot \delta(f).$$

Dieser ist somit aufgrund der Diracfunktion unendlich groß, lediglich das Gewicht der Diracfunktion ist endlich. Gleiches gilt für alle diskreten Spektrallinien.

e) $S_+(f)$ ergibt sich aus $S_{TP}(f)$ durch Verschiebung um f_T nach rechts. Deshalb ist

$$S_+(f = 97 \text{ kHz}) = S_{TP}(f = -3 \text{ kHz}) = \underline{-0.440 \text{ V}}.$$

Das tatsächliche Spektrum unterscheidet sich von $S_+(f)$ bei positiven Frequenzen um den Faktor 1/2:

$$S(f = 97 \text{ kHz}) = 1/2 \cdot S_+(f = 97 \text{ kHz}) = \underline{-0.220 \text{ V}}.$$

Allgemein kann geschrieben werden:

$$S(f) = \frac{A_T}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot \delta(f \pm (f_T + n \cdot f_N)).$$

f) Unter der vorgeschlagenen Vernachlässigung können alle Bessellinien $J_{|n|>3}$ außer Acht gelassen werden. Damit erhält man $B_K = 2 \cdot 3 \cdot f_N = \underline{18 \text{ kHz}}$.

g) Die Zahlenwerte in der Tabelle auf der Angabenseite zeigen, dass nun $B_K = 24 \text{ kHz}$ (für $\eta = 2$) bzw. $B_K = 36 \text{ kHz}$ (für $\eta = 3$) erforderlich wären.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.2

a) $x(t)$ ist ein komplexes Signal, das nur in Ausnahmefällen reell wird, zum Beispiel zur Zeit $t = 0$. Ein rein imaginärer Wert (zu gewissen Zeiten) kann sich nur dann ergeben, wenn $\eta \geq \pi/2$ ist.

Mit $T_0 = 2\pi/\omega_0$ gilt beispielsweise:

$$\begin{aligned}x(t + k \cdot T_0) &= e^{j \cdot \eta \cdot \sin(\omega_0 \cdot (t + k \cdot T_0))} = \\ &= e^{j \cdot \eta \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + k \cdot 2\pi)} = e^{j \cdot \eta \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)} = x(t).\end{aligned}$$

Dieses Signal ist somit periodisch. Zur Berechnung der Spektralfunktion muss deshalb die Fourierreihe und nicht das Fourierintegral herangezogen werden. Richtig ist also nur der zweite Lösungsvorschlag.

b) Die Fourierkoeffizienten lauten:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} e^{j \cdot \eta \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)} \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt.$$

Durch Zusammenfassen der beiden Terme und nach der Substitution $\alpha = \omega_0 \cdot t$ erhält man:

$$D_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} e^{j \cdot (\eta \cdot \sin(\alpha) - n \cdot \alpha)} d\alpha = J_n(\eta).$$

Richtig ist also der zweite Lösungsvorschlag.

c) Mit dem Satz von Euler können die Fourierkoeffizienten wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned}D_n &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\eta \cdot \sin(\alpha) - n \cdot \alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{j}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(\eta \cdot \sin(\alpha) - n \cdot \alpha) d\alpha.\end{aligned}$$

Der Integrand des ersten Integrals ist eine gerade Funktion von α :

$$\begin{aligned}I_1(-\alpha) &= \cos(\eta \cdot \sin(-\alpha) + n \cdot \alpha) = \cos(-\eta \cdot \sin(\alpha) + n \cdot \alpha) = \\ &= \cos(\eta \cdot \sin(\alpha) - n \cdot \alpha) = I_1(\alpha).\end{aligned}$$

Dagegen ist der zweite Integrand eine ungerade Funktion:

$$\begin{aligned}I_2(-\alpha) &= \sin(\eta \cdot \sin(-\alpha) + n \cdot \alpha) = \sin(-\eta \cdot \sin(\alpha) + n \cdot \alpha) = \\ &= -\sin(\eta \cdot \sin(\alpha) - n \cdot \alpha) = -I_2(\alpha).\end{aligned}$$

Somit verschwindet das zweite Integral und man erhält unter Berücksichtigung der Symmetrie:

$$D_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \cos(\eta \cdot \sin(\alpha) - n \cdot \alpha) d\alpha.$$

Richtig ist somit der Lösungsvorschlag 1.

d) Entsprechend der iterativen Berechnungsformel gilt für $\eta = 2$:

$$\begin{aligned}D_2 &= D_1 - D_0 = 0.577 - 0.224 = \underline{0.353}, \\ D_3 &= 2 \cdot D_2 - D_1 = 2 \cdot 0.353 - 0.577 = \underline{0.129}.\end{aligned}$$

e) Aufgrund der angegebenen Symmetriebeziehung ist $D_{-2} = D_2 \underline{=} 0.353$ und $D_{-3} = -D_3 \underline{=} -0.129$.

Musterlösung zur Aufgabe A3.3

a) Bei Winkelmodulation bewegt sich der komplexe Zeiger $s_{\text{TP}}(t)$ stets auf einem Kreisbogen, dessen Öffnungswinkel $2 \cdot K_{\text{PM}} \cdot q_{\text{max}} = 2,9$ ($\approx \pi = 180^\circ$) beträgt. Richtig ist somit die dritte Alternative.

b) Es gilt $S_{\text{TP}}(f) = B_1(f) * B_2(f)$. Da $B_1(f)$ auf Frequenzen $|f| \leq 2$ kHz und $B_2(f)$ auf den Bereich ± 3 kHz begrenzt sind, ist das Faltungsprodukt auf $|f| \leq 5$ kHz beschränkt: $f_{\text{min}} = -5$ kHz, $f_{\text{max}} = 5$ kHz.

c) Das Faltungsprodukt für $f = 0$ ergibt sich durch Multiplikation von $B_1(f)$ mit $B_2(f)$ und anschließender Summation. Nur für $f = 0$ sind sowohl $B_1(f)$ als auch $B_2(f)$ von Null verschieden. Damit erhält man:

$$S_{\text{TP}}(f = 0) = B_1(f = 0) \cdot B_2(f = 0) = 0,8 \cdot 0,9 = \underline{0,72} \text{ (rein reell)}.$$

d) Nun muss vor der Multiplikation und Summation noch eine Frequenzverschiebung von $B_2(f)$ nach rechts – oder von $B_1(f)$ nach links – um 1 kHz erfolgen. Somit erhält man:

$$\begin{aligned} S_{\text{TP}}(f = 1 \text{ kHz}) &= B_1(f = -2 \text{ kHz}) \cdot B_2(f = 3 \text{ kHz}) + \\ &+ B_1(f = 1 \text{ kHz}) \cdot B_2(f = 0) = \\ &= 0,1 \cdot j \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,9 = 0,36 + j \cdot 0,03 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Re}[S_{\text{TP}}(f = 1 \text{ kHz})] = \underline{0,36}, \quad \text{Im}[S_{\text{TP}}(f = 1 \text{ kHz})] = \underline{0,03}.$$

e) Die Diraclinie $S_+(f = 98 \text{ kHz})$ entspricht der $S_{\text{TP}}(f)$ -Linie bei $f = -2$ kHz. Diese ist

$$\begin{aligned} S_{\text{TP}}(f = -2 \text{ kHz}) &= B_1(f = -2 \text{ kHz}) \cdot B_2(f = 0) + \\ &+ B_1(f = 1 \text{ kHz}) \cdot B_2(f = -3 \text{ kHz}) = \\ &= 0,1 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot j \cdot 0,3 = 0,09 + j \cdot 0,12 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Re}[S_+(f = 98 \text{ kHz})] = \underline{0,09}, \quad \text{Im}[S_+(f = 98 \text{ kHz})] = \underline{0,12}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.3

a) Bezüglich $|S_+(f)|$ gibt es eine Symmetrie zur Trägerfrequenz $f_T = 40 \text{ kHz}$. Der Abstand zwischen den Spektrallinien beträgt $f_N = 3 \text{ kHz}$.

b) Unter Berücksichtigung von $S_{\text{TP}}(f = 3 \text{ kHz}) = S_+(f = 43 \text{ kHz})$ gilt:

$$|S_{\text{TP}}(f = 3 \text{ kHz})| = \sqrt{0.279^2 + 0.483^2} = \underline{0.558},$$

$$\text{arc } S_{\text{TP}}(f = 3 \text{ kHz}) = \arctan \frac{0.483}{0.279} = \arctan 1.732 = \underline{60^\circ}.$$

c) In analoger Weise zur Teilaufgabe b) erhält man für 6 kHz:

$$|S_{\text{TP}}(f = 6 \text{ kHz})| = \sqrt{(-0.116)^2 + 0.201^2} = \underline{0.232},$$

$$\text{arc } S_{\text{TP}}(f = 6 \text{ kHz}) = \arctan \frac{-0.116}{0.201} = 180^\circ - \arctan 1.732 = \underline{120^\circ}.$$

d) Die Phase lautet für $n = 1$ (siehe Teilaufgabe b):

$$\phi_N + 90^\circ = 60^\circ \Rightarrow \phi_N = -30^\circ.$$

Die Überprüfung dieses Ergebnisses mit $n = 2$ liefert den gleichen Wert:

$$2 \cdot (\phi_N + 90^\circ) = 120^\circ \Rightarrow \phi_N = \underline{-30^\circ}.$$

e) Die angegebene Gleichung kann wie folgt umgeformt werden:

$$\eta = \frac{2 \cdot J_1(\eta)}{J_0(\eta) + J_2(\eta)}.$$

Mit $J_0(\eta) = 0.512$, $J_1(\eta) = 0.558$ und $J_2(\eta) = 0.232$ erhält man somit:

$$\eta = \frac{2 \cdot 0.558}{0.512 + 0.232} = \underline{1.5}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A3.4

a) Das äquivalente Tiefpass-Signal lautet:

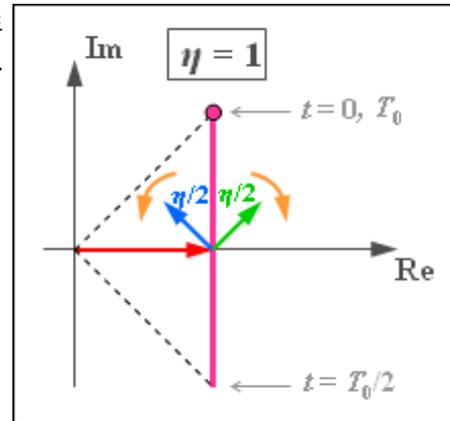
$$\begin{aligned} s_{\text{TP}}(t) &= A_T \cdot \left(1 + j \cdot \frac{\eta}{2} \cdot (e^{j \cdot \omega_N \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_N \cdot t}) \right) \\ &= A_T \cdot (1 + j \cdot \eta \cdot \cos(\omega_N \cdot t)) . \end{aligned}$$

Die Grafik verdeutlicht, dass die Ortskurve $s_{\text{TP}}(t)$ nun eine vertikale Gerade ist im Gegensatz zur idealen PM (Kreisbogen) und zur ZSB-AM (horizontale Gerade). Im Folgenden wird $A_T = 1$ gesetzt.

b) Die Hüllkurve ergibt sich aus der zeitabhängigen Zeigerlänge zu

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{1 + \eta^2 \cdot \cos^2(\omega_N \cdot t)} \\ \Rightarrow a_{\min} &\equiv 1, \quad a_{\max} = \sqrt{1 + \eta^2} . \end{aligned}$$

Für $\eta = 1$ hat a_{\max} den Wert $2^{0.5} \approx 1.414$.



c) Für die Phasenfunktion gilt:

$$\phi(t) = \arctan \frac{\text{Im}[s_{\text{TP}}(t)]}{\text{Re}[s_{\text{TP}}(t)]} = \arctan(\eta \cdot \cos(\omega_N \cdot t)) .$$

Der Maximalwert tritt beispielsweise zur Zeit $t = 0$ auf und beträgt $\phi_{\max} = \arctan(\eta)$. Für $\eta = 1$ erhält man $\phi_{\max} \equiv 45^\circ$ (bei idealer PM 57.3°) und für $\eta = 0.5$ ergibt sich $\phi_{\max} \equiv 26.6^\circ$ (ideale PM: 28.7°).

d) Es gilt nicht $\arctan(\eta \cdot \cos(\gamma)) = \eta \cdot \cos(\gamma)$. Das heißt, dass das Sinkensignal im Gegensatz zum Quellensignal nicht cosinusförmig verläuft. Dies weist auf nichtlineare Verzerrungen hin \Rightarrow Vorschlag 3.

e) Mit $\gamma = \eta \cdot \cos(\omega_N \cdot t)$ und $\arctan(\gamma) \approx \gamma - \gamma^3/3$ erhält man

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \eta \cdot \cos(\omega_N \cdot t) - \frac{\eta^3}{3} \cdot \cos^3(\omega_N \cdot t) = \\ &= \eta \cdot \cos(\omega_N \cdot t) - \frac{\eta^3}{3} \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot \cos(\omega_N \cdot t) + \frac{1}{4} \cdot \cos(3\omega_N \cdot t) \right] = \\ &= \left(\eta - \frac{\eta^3}{4} \right) \cdot \cos(\omega_N \cdot t) - \frac{\eta^3}{12} \cdot \cos(3\omega_N \cdot t) . \end{aligned}$$

Das bedeutet: Bei Verwendung der angegebenen Reihenentwicklung (Terme 5. und höherer Ordnung werden vernachlässigt) ist nur der Klirrfaktor dritter Ordnung von 0 verschieden. Man erhält:

$$K = K_3 = \frac{\eta^3/12}{\eta - \eta^3/4} = \frac{1}{12/\eta^2 - 3} .$$

Für $\eta = 1$ ergibt sich der Zahlenwert $K = 1/9 \approx 11.1\%$. Für $\eta = 0.5$ ist der Klirrfaktor $K = 1/45 \approx 2.2\%$.

Eine Simulation zeigt, dass man durch den Abbruch der Reihe nach dem Term dritter Ordnung einen Fehler macht, der den Klirrfaktor als zu hoch erscheinen lässt. Die per Simulation gewonnenen Werte sind $K \approx 6\%$ (für $\eta = 1$) und $K \approx 2\%$ (für $\eta = 0.5$). Der Fehler nimmt also mit wachsendem η mehr als proportional zu.

Musterlösung zur Aufgabe A3.5

a) Bei einem rechteckförmigen (digitalen) Quellensignal erkennt man die Phasenmodulation (PM) an den typischen Phasensprüngen – siehe Signalverlauf $s_2(t)$. Die Frequenzmodulation (FM) weist dagegen zu den verschiedenen Zeiten unterschiedliche Augenblicksfrequenzen wie bei $s_1(t)$ auf \Rightarrow Antwort 2.

b) Mit $q(t) = 0$ erhält man entsprechend den gegebenen Gleichungen sowohl für PM als auch für FM:

$$s(t) = A_T \cdot \cos(\omega_T \cdot t) \Rightarrow \phi_T \equiv 0.$$

c) Die Trägerfrequenz f_T kann direkt nur aus dem PM-Signal $s_2(t)$ ermittelt werden. Bei der FM eines bipolaren Quellensignals tritt f_T nicht auf. Durch Abzählen der Schwingungen von $s_2(t)$ im Zeitintervall T erkennt man, dass $f_T \cdot T \equiv 6$ verwendet wurde.

d) Der Amplitudenwert $A = 2 \text{ V}$ führt zur Phase 90° bzw. $\pi/2$ (Minus-Sinusverlauf). Daraus folgt:

$$K_{\text{PM}} = \frac{\pi/2}{2 \text{ V}} \equiv 0.785 \text{ V}^{-1}.$$

e) Die Grafik $s_1(t)$ zeigt, dass innerhalb eines Zeitintervalls T entweder 4 oder 8 Schwingungen auftreten:

$$4 \leq f_A(t) \cdot T \leq 8.$$

Unter Berücksichtigung der Trägerfrequenz $f_T \cdot T = 6$ ergibt sich für den (normierten) Frequenzhub:

$$\Delta f_A \cdot T \equiv 2.$$

f) Der Frequenzhub kann auch wie folgt dargestellt werden:

$$\Delta f_A = \frac{K_{\text{FM}}}{2\pi} \cdot A.$$

Mit $\Delta f_A \cdot T = 2$ erhält man somit

$$K_{\text{FM}} = \frac{2 \cdot 2\pi}{A \cdot T} = \frac{4\pi}{2 \text{ V} \cdot 1 \text{ ms}} \equiv 6283 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.5

a) Die Phasenfunktion berechnet sich zu $\phi(t) = K_{\text{PM}} \cdot q_1(t)$. Der Phasenhub ϕ_{max} ist gleich der sich ergebenden Phase für den Maximalwert des Quellensignals:

$$\phi_{\text{max}} = K_{\text{PM}} \cdot 2 \text{ V} = 3 \text{ rad} \Rightarrow K_{\text{PM}} = \underline{1.5 \text{ V}^{-1}}.$$

b) Im Bereich von 0 bis T kann die Winkelfunktion wie folgt dargestellt werden:

$$\psi(t) = \omega_{\text{T}} \cdot t + K_{\text{PM}} \cdot 2 \text{ V} \cdot t/T.$$

Für die Augenblickskreisfrequenz $\omega_{\text{A}}(t)$ bzw. die Augenblicksfrequenz $f_{\text{A}}(t)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{A}}(t) &= \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_{\text{T}} + K_{\text{PM}} \cdot \frac{2 \text{ V}}{10 \mu\text{s}} \\ \Rightarrow f_{\text{A}}(t) &= f_{\text{T}} + \frac{1.5 \text{ V}^{-1}}{2\pi} \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ V/s} = 100 \text{ kHz} + 47.7 \text{ kHz} = 147.7 \text{ kHz}. \end{aligned}$$

Die Augenblicksfrequenz ist konstant, so dass $f_{\text{A}, \text{min}} = f_{\text{A}, \text{max}} = \underline{147.7 \text{ kHz}}$ gilt.

c) Aufgrund des konstanten Quellensignals ist im gesamten hier betrachteten Zeitbereich ($T \dots 3T$) die Ableitung gleich 0, so dass die Augenblicksfrequenz gleich der Trägerfrequenz ist:

$$f_{\text{A}, \text{min}} = f_{\text{A}, \text{max}} = f_{\text{T}} = \underline{100 \text{ kHz}}.$$

d) Der lineare Abfall von $q_1(t)$ in diesem Zeitintervall ($3T \dots 5T$) mit betragsmäßig gleicher Steigung, wie unter Punkt b) berechnet, führt zum Ergebnis:

$$f_{\text{A}, \text{min}} = f_{\text{A}, \text{max}} = f_{\text{T}} - 47.7 \text{ kHz} = \underline{52.3 \text{ kHz}}.$$

e) Durch Differentiation kommt man zur Augenblickskreisfrequenz:

$$\omega_{\text{A}}(t) = \omega_{\text{T}} + K_{\text{FM}} \cdot q_2(t) \Rightarrow f_{\text{A}}(t) = f_{\text{T}} + \frac{K_{\text{FM}}}{2\pi} \cdot q_2(t).$$

Mit dem Ergebnis aus b) ergibt sich somit:

$$\frac{K_{\text{FM}}}{2\pi} \cdot 2 \text{ V} = \frac{3 \cdot 10^5}{2\pi} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow K_{\text{FM}} = \underline{1.5 \cdot 10^5 \text{ V}^{-1} \text{s}^{-1}}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A3.6

a) Da die Ortskurve einen Kreisbogen beschreibt, handelt es sich um einen Winkelmodulator (PM oder FM) mit dem Modulationsindex η . Da aber hier η offensichtlich von der Nachrichtenfrequenz f_N abhängt, kann eine Phasenmodulation ausgeschlossen werden \Rightarrow FM-Modulator \Rightarrow Antwort 3.

b) Der Modulationsindex kann aus der Grafik abgelesen werden. Es gilt $\eta_1 = 75^\circ/180^\circ \cdot \pi \approx 1.3$.

c) Bei Frequenzmodulation gilt:

$$K_{WM} = K_{FM} = \frac{2\pi \cdot f_N \cdot \eta}{A_N} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ Hz} \cdot 1.3}{2 \text{ V}} \approx 2.04 \cdot 10^4 \text{ V}^{-1}\text{s}^{-1}.$$

d) Der Frequenzmodulator kann als Phasenmodulator realisiert werden, wenn vorher das Quellsignal integriert wird. Dieses lautet:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \int q(t) dt = A_N \cdot \int \cos(\omega_N \cdot t + \phi_N) dt = \\ &= \frac{A_N}{\omega_N} \cdot \sin(\omega_N \cdot t + \phi_N) = \frac{A_N}{\omega_N} \cdot \cos(\omega_N \cdot t + \phi_N - 90^\circ). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für das äquivalente TP-Signal mit $\phi_N = 30^\circ$:

$$s_{TP}(t) = e^{j \cdot \eta \cdot \cos(\omega_N \cdot t - 60^\circ)} \Rightarrow s_{TP}(t = 0) = e^{j \cdot \eta \cdot \cos(60^\circ)} = e^{j \cdot \eta/2}.$$

Der Nullphasenwinkel ist somit gleich $\eta/2$ entsprechend 37.5° .

e) Aus der Definition des Modulationsindex bei FM folgt:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{K_{WM} \cdot A_N}{2\pi \cdot f_1}, \quad \eta_2 = \frac{K_{WM} \cdot A_N}{2\pi \cdot f_2} \\ \Rightarrow \frac{\eta_1}{\eta_2} &= \frac{f_2}{f_1} \Rightarrow f_2 = \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot f_1 = \frac{75^\circ}{125^\circ} \cdot 5 \text{ kHz} \equiv \underline{\underline{3 \text{ kHz}}}. \end{aligned}$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.6

a) Aus der Gleichung für $r(t)$ kann lediglich abgelesen werden, dass es sich um eine Winkelmodulation handelt, nicht jedoch, ob eine PM oder eine FM vorliegt. Aufgrund der Gleichung steht fest, dass die Nachrichtenfrequenz $f_N = 10$ kHz beträgt. Die Phase $\phi_N = 0$ des Quellsignals würde dagegen nur zutreffen, wenn eine Phasenmodulation vorliegt. Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1, 2 und 4.

b) Mit der Modulator konstanten $K_{PM} = 2 \text{ V}^{-1}$ erhält man hierfür:

$$v_{PM}(t) = \frac{1}{K_{PM}} \cdot \phi_r(t) = \frac{3}{2 \text{ V}^{-1}} \cdot \cos(2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot t).$$

Für den Zeitpunkt $t = 0$ gilt deshalb:

$$v_{PM}(t = 0) = A_N \equiv \underline{1.5 \text{ V}}.$$

c) Für das Ausgangssignal $v_{FM}(t)$ des FM-Demodulators – bestehend aus PM-Demodulator und Differenzierer – kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} v_{FM}(t) &= \frac{dv_{PM}(t)}{dt} \cdot K = \frac{K \cdot A_N}{2\pi \cdot f_N} \cdot (-\sin(2\pi \cdot f_N \cdot t)) = \\ &= \frac{K \cdot A_N}{2\pi \cdot f_N} \cdot \cos(2\pi \cdot f_N \cdot t + 90^\circ). \end{aligned}$$

Die Nachrichtenphase ist somit $\phi_N \equiv \underline{90^\circ}$.

d) In diesem Fall muss gelten:

$$K = 2\pi \cdot f_N \equiv \underline{6.28 \cdot 10^4 \text{ 1/s}}.$$

e) Alle Lösungsvorschläge sind richtig bis auf den vorletzten: Der Phasenhub ist identisch mit dem Modulationsindex, der aus der angegebenen Gleichung abgelesen werden kann:

$$\phi_{\max} = \eta = 3 = \frac{\Delta f_A}{f_N}.$$

Damit erhält man den Frequenzhub $\Delta f_A = 3 \cdot f_N = 30$ kHz. Mit der Trägerfrequenz $f_T = 1$ MHz kann somit die Augenblicksfrequenz $f_A(t)$ nur Werte zwischen 1 ± 0.03 MHz annehmen.

Bei halber Nachrichtenfrequenz verdoppelt sich der Phasenhub η , während der Frequenzhub Δf_A davon nicht beeinflusst wird:

$$\eta = \frac{K_{PM} \cdot A_N}{f_N} = 6 \Rightarrow \Delta f_A = \eta \cdot f_N = 6 \cdot 5 \text{ kHz} = 30 \text{ kHz}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A3.7

a) Es handelt sich um eine Frequenzmodulation \Rightarrow Antwort 2. Bei Phasenmodulation würden sich die Gewichte der Diraclinien bei der Frequenzverdopplung nicht ändern.

b) Die angegebene Spektralfunktion lässt aufgrund von Symmetrieeigenschaften auf die Trägerfrequenz $f_T = 100$ kHz schließen. Da bei $f_N = 2$ kHz die Spektrallinie bei $f_T = 100$ kHz verschwindet, ist $\eta_2 \approx \underline{2.4}$ zu vermuten. Eine Kontrolle der weiteren Impulsgewichte bestätigt das Ergebnis:

$$\frac{|S_+(f = 102 \text{ kHz})|}{|S_+(f = 104 \text{ kHz})|} = 1.206, \quad \frac{J_1(2.4)}{J_2(2.4)} = 1.206.$$

c) Die Gewichte der Diraclinien bei $f_T + n \cdot f_N$ lauten allgemein:

$$D_n = A_T \cdot J_n(\eta) \quad \Rightarrow \quad D_1 = A_T \cdot J_1(\eta).$$

Daraus folgt $A_T = D_1/J_1(\eta) = 1.560 \text{ V}/0.520 = \underline{3 \text{ V}}$.

d) Mit der Forderung $K < 1\%$ gilt folgende Faustformel (Carson-Regel):

$$B_2 = 2 \cdot f_N \cdot (\eta + 2) = \underline{17.6 \text{ kHz}}.$$

Somit stehen dem Empfänger die Fourierkoeffizienten D_{-4}, \dots, D_4 zur Verfügung.

e) Bei Frequenzmodulation gilt allgemein:

$$\eta = \frac{K_{\text{FM}} \cdot A_N}{\omega_N}.$$

Durch Verdopplung der Nachrichtenfrequenz wird also der Modulationsindex halbiert: $\eta_4 = \eta_2/2 = \underline{1.2}$.

f) Die für $K < 1\%$ erforderliche Kanalbandbreite ergibt sich nach gleicher Rechnung wie unter Punkt d) zu $B_4 = 3.2 \cdot 8 \text{ kHz} = \underline{25.6 \text{ kHz}}$. Aufgrund des um den Faktor 2 kleineren Modulationsindex genügt es für die Begrenzung des Klirrfaktors auf 1%, die Fourierkoeffizienten D_{-3}, \dots, D_3 zu übertragen.

Musterlösung zur Aufgabe A3.8

a) Bei Frequenzmodulation eines Cosinussignals gilt für den Modulationsindex:

$$\eta = \frac{K_{\text{FM}} \cdot A_N}{\omega_N} \Rightarrow K_{\text{FM}} = \frac{2\pi \cdot f_N \cdot \eta}{A_N} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ Hz} \cdot 2.4}{1 \text{ V}} \approx 7.54 \cdot 10^4 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}.$$

b) Die angegebene Gleichung für das äquivalente TP-Signal lautet in ausgeschriebener Form mit der Abkürzung $\gamma = \omega_N \cdot t$ unter Berücksichtigung von $J_{-1} = -J_1$ und $J_{-2} = J_2$:

$$r_{\text{TP}}(t) = J_0 + [e^{j \cdot \gamma} - e^{-j \cdot \gamma}] \cdot J_1 + [e^{j \cdot 2\gamma} + e^{-j \cdot 2\gamma}] \cdot J_2 = J_0 + 2 \cdot j \cdot J_1 \cdot \sin(\gamma) + 2 \cdot J_2 \cdot \cos(2\gamma).$$

Somit ergibt sich für den Realteil allgemein bzw. für $\eta = 2.4$, das heißt $J_0 = 0$, $J_2 = 0.43$:

$$x(t) = J_0 + 2 \cdot J_2 \cdot \cos(2\omega_N t) = 2 \cdot J_2 \cdot \cos(2\omega_N t) \Rightarrow x_{\text{max}} = 2 \cdot J_2 \approx 0.86, \quad x_{\text{min}} = -x_{\text{max}} \approx -0.86.$$

c) Entsprechend dem Ergebnis aus b) erhält man für den Imaginärteil ($J_1 = 0.52$):

$$y(t) = 2 \cdot J_1 \cdot \sin(\omega_N t) \Rightarrow y_{\text{max}} = 2 \cdot J_1 \approx 1.04, \quad y_{\text{min}} = -y_{\text{max}} \approx -1.04.$$

d) Der Imaginärteil ist zu diesen Zeitpunkten jeweils 0 und damit auch die Phasenfunktion. Diesen Sachverhalt erkennt man auch aus der Skizze auf der Angabenseite.

e) Aus der Skizze ist bereits zu erkennen, dass der Phasenwinkel beispielsweise für $t = T_N/4$ seinen Maximalwert erreicht. Dieser kann mit $y_{\text{max}} = 1.04$ und $x_{\text{min}} = -0.86$ wie folgt berechnet werden:

$$\phi_{\text{max}} = \arctan \frac{y_{\text{max}}}{x_{\text{min}}} = \arctan(-1.21) = 180^\circ - 50.4^\circ \approx 129.6^\circ.$$

Ohne Bandbegrenzung würde sich hier der Phasenwinkel $\phi(t = T_N/4) = \eta = 2.4 = 137.5^\circ$ ergeben. Die maximale Abweichung des Sinkensignals vom Quellensignal tritt somit z.B. zur Zeit $t = T_N/4$ auf.

f) Mit $\gamma = \omega_N \cdot t$ und $\cos(2\gamma) = 1 - 2 \cdot \cos^2(\gamma)$ kann für Real- und Imaginärteil geschrieben werden:

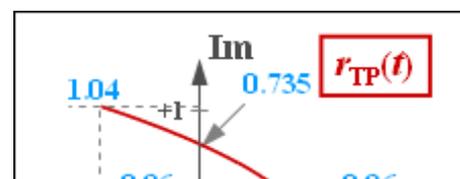
$$x = J_0 + 4 \cdot J_2 \cdot \cos^2(\gamma) - 2 \cdot J_2, \quad y = 2 \cdot J_1 \cdot \sin(\gamma).$$

Diese Gleichungen können wie folgt umgeformt werden:

$$\cos^2(\gamma) = \frac{x - J_0 + 2 \cdot J_2}{4 \cdot J_2}, \quad \sin^2(\gamma) = \frac{y^2}{4 \cdot J_1^2} \Rightarrow \frac{y^2}{4 \cdot J_1^2} + \frac{x - J_0 + 2 \cdot J_2}{4 \cdot J_2} = 1 \Rightarrow y^2 + \frac{J_1^2}{J_2} \cdot x + J_1^2 \cdot \left(2 - \frac{J_0}{J_2}\right) = 0.$$

Damit lauten die Parabelparameter für $J_0 = 0$:

$$a = \frac{J_1^2}{J_2} \approx 0.629, \quad b = 2 \cdot J_1^2 \approx 0.541.$$

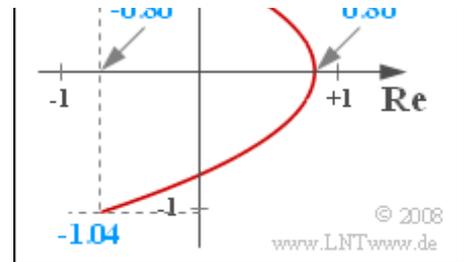


Zur Kontrolle verwenden wir $y = 0$:

$$x_{\max} = \frac{b}{a} = 2 \cdot J_2 = 0.86.$$

Die Werte bei $x = 0$ sind somit:

$$y_0 = \pm\sqrt{2} \cdot J_1 \approx 0.735.$$



Musterlösung zur Aufgabe A3.9

a) Das Signal-zu-Rausch-Leistungsverhältnis (Signal-SNR) ρ_v ist der Quotient aus der Nutzleistung P_S und der Rauschleistung P_R . Speziell bei der Phasenmodulation gilt:

$$\rho_v = \frac{P_S}{P_R} = \frac{P_S}{\Phi_0 \cdot 2f_N} = \frac{\eta^2}{2} \cdot \frac{P_S}{N_0 \cdot f_N}.$$

Die Messung mit $f_N = f_5 = 5$ kHz hat das SNR $\rho_v = 10^5$ (entsprechend 50 dB) ergeben. Die doppelte Nachrichtenfrequenz führt zum halben SNR, da nun die doppelte Rauschleistung wirksam ist:

$$\rho_v = 0.5 \cdot 10^5 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_v \approx \underline{46.99 \text{ dB}}.$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch über die Beziehung $\rho_v = \eta^2/2 \cdot \xi$ herleiten. Bei PM ist η unabhängig von der Nachrichtenfrequenz. Der SNR-Verlust geht darauf zurück, dass nun $\xi = P_S/(N_0 \cdot f_N)$ halbiert wird.

b) Bei Frequenzmodulation und der Nachrichtenfrequenz $f_N = 5$ kHz erhält man für die Rauschleistung:

$$P_R = \int_{-f_N}^{+f_N} \Phi_{v, \text{FM}}(f) df = \frac{2 \cdot N_0}{\Delta f_A^2} \cdot \int_0^{f_N} f^2 df = \frac{2 \cdot N_0 \cdot f_N^3}{3 \cdot \Delta f_A^2}.$$

Unter Berücksichtigung von $\Delta f_A = \eta \cdot f_N$ (Frequenzhub) ergibt sich somit:

$$P_R = \frac{2 \cdot N_0 \cdot f_N}{3 \cdot \eta^2} \Rightarrow \rho_v = \frac{3 \cdot \eta^2 \cdot P_S}{2 \cdot N_0 \cdot f_N} = 3 \cdot \rho_{v, \text{PM}}.$$

Das heißt: Die Frequenzmodulation ist um den Faktor 3 (oder 4.77 dB) besser als die PM:

$$10 \cdot \lg \rho_v = 50 \text{ dB} + 10 \cdot \lg 3 \approx \underline{54.77 \text{ dB}}.$$

c) Entsprechend dem Ergebnis aus b) erhält man mit $f_{10} = 10$ kHz:

$$P_R = \frac{2 \cdot N_0 \cdot f_{10}}{3 \cdot \eta_{10}^2} = \frac{f_{10} \cdot \eta_5^2}{3 \cdot f_5 \cdot \eta_{10}^2} \cdot \frac{2 \cdot N_0 \cdot f_5}{\eta_5^2}.$$

Der zweite Term gibt die Rauschleistung des Vergleichssystems (Phasenmodulation, $f_N = f_5$) an, die zum Ergebnis $10 \cdot \lg \rho_v = 50$ dB geführt hat.

Bei FM ist nun jedoch der Modulationsindex umgekehrt proportional zur Nachrichtenfrequenz, so dass der Quotient $\eta_5^2/\eta_{10}^2 = 4$ ist. Somit ergibt sich für den Vorfaktor $8/3$. Aufgrund der größeren Rauschleistung ist das SNR kleiner:

$$10 \cdot \lg \rho_v = 50 \text{ dB} - 10 \cdot \lg (8/3) \approx \underline{45.74 \text{ dB}}.$$

Bei gleicher Nachrichtenfrequenz $f_N = 10$ kHz ist nun die FM um 1.25 dB schlechter als die PM, da sich nun die Halbierung von η – nach Quadrierung der Faktor 4 – stärker auswirkt als der systembedingte Faktor 3, um den die FM gegenüber der PM überlegen ist.

Der Vergleich der Teilaufgaben b) und c) zeigt einen Unterschied um den Faktor 8 bzw. 9.03 dB. Der ungünstigere Wert für die größere Nachrichtenfrequenz $f_N = 10$ kHz ergibt sich durch den nur halb so großen Modulationsindex – nach Quadrierung Faktor 4 – und die doppelte Rauschbandbreite.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.9

a) Aus $20 \cdot \lg \alpha_K = -120 \text{ dB}$ erhält man $\alpha_K = 10^{-6}$. Damit ergibt sich mit $B_{\text{NF}} = f_N$:

$$\xi = \frac{\alpha_K^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot B_{\text{NF}}} = \frac{10^{-12} \cdot 10^5 \text{ W}}{10^{-16} \text{ W/Hz} \cdot 10^4 \text{ Hz}} = 10^5 \Rightarrow 10 \cdot \lg \xi = \underline{50 \text{ dB}}.$$

b) Aus der Grafik ist zu entnehmen, dass beim AM-System $\rho_v = \xi$ gilt. Damit ist auch

$$10 \cdot \lg \rho_v = \underline{50 \text{ dB}}.$$

c) Es handelt sich um eine ZSB-AM oder ESB-AM ohne Träger, das heißt, richtig sind die ersten drei Lösungsvorschläge. Dagegen scheiden die ZSB-AM und die ESB-AM mit Träger aus. In diesen Fällen würde ρ_v stets kleiner als ξ sein.

d) Bei der ZSB-AM muss $B_K \geq 2 \cdot f_N = \underline{20 \text{ kHz}}$ gelten.

e) Aus der Grafik erkennt man, dass ab etwa 20 dB gilt:

$$10 \cdot \lg \rho_v = 10 \cdot \lg \xi + 10 \text{ dB}. \text{ Mit } 10 \cdot \lg \xi = 50 \text{ dB} \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_v = \underline{60 \text{ dB}}.$$

f) Bei Phasenmodulation gilt:

$$\rho_v = \frac{\eta^2}{2} \cdot \xi \Rightarrow \eta^2 = \frac{2 \cdot \rho_v}{\xi} = 20 \Rightarrow \eta \approx 4.47.$$

Damit muss für die Kanalbandbreite unter der Voraussetzung $K < 1\%$ gelten:

$$B_K \geq 2 \cdot f_N \cdot (\eta + 2) = 20 \text{ kHz} \cdot 6.47 \approx \underline{130 \text{ kHz}}.$$

g) Hier genügt ein kleinerer Modulationsindex und damit auch eine kleinere Bandbreite:

$$3/2 \cdot \eta^2 = 10 \Rightarrow \eta \approx 2.58 \Rightarrow B_K = 20 \text{ kHz} \cdot 4.58 \approx \underline{91.6 \text{ kHz}}.$$

h) In der Grafik erkennt man den so genannten FM-Knick. Für $10 \cdot \lg \xi = 15 \text{ dB}$ erhält man für das WM-System genau das gleiche Sinken-SNR wie für das AM-System. Die Sendeleistung kann also um 35 dB kleiner sein als 100 kW:

$$10 \cdot \lg \frac{P_{S,\text{min}}}{100 \text{ kW}} = -35 \text{ dB} \Rightarrow \frac{P_{S,\text{min}}}{100 \text{ kW}} \approx 0.0003 \Rightarrow P_{S,\text{min}} \approx \underline{0.03 \text{ kW}}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A3.10

a) Der Betragsfrequenzgang des Deemphase-Netzwerks ist wie folgt festgelegt:

$$|H_{DE}(f)| = \frac{1}{|H_{PE}(f)|} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_G)^2}}.$$

Der Frequenzgang eines einfachen RC-Tiefpasses – auch bekannt als Tiefpass erster Ordnung – lautet:

$$H_{DE}(f) = \frac{1}{1 + j \cdot f/f_G} \Rightarrow |H_{DE}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_G)^2}}.$$

Richtig sind also der erste und der letzte Lösungsvorschlag.

b) Die FM ist auf die maximale Signalfrequenz 9 kHz ausgelegt, mit der der Frequenzhub $\Delta f_A = 45$ kHz betragen soll. Daraus folgt für den Modulationsindex:

$$\eta = \frac{\Delta f_A}{f_N} = 5 \Rightarrow G_{FM}(f_N = 9 \text{ kHz}) = 10 \cdot \lg(1.5 \cdot 5^2) \approx \underline{15.74 \text{ dB}}.$$

Mit der Nachrichtenfrequenz $f_N = 3$ kHz ergibt sich ein um den Faktor 3 größerer Modulationsindex und damit ein um den Faktor $10 \cdot \lg 9 = 9.54$ dB größerer Störabstand:

$$G_{FM}(f_N = 3 \text{ kHz}) = 10 \cdot \lg(1.5 \cdot 15^2) \approx \underline{25.28 \text{ dB}}.$$

Ein weiterer Zugewinn ergibt sich durch den Übergang von 3 kHz auf 1 kHz:

$$G_{FM}(f_N = 1 \text{ kHz}) = 25.28 \text{ dB} + 9.54 \text{ dB} \approx \underline{34.82 \text{ dB}}.$$

c) Der maximale Frequenzhub ergibt sich für $f_N = B_{NF}$. Daraus folgt mit $f_G = 3$ kHz und $B_{NF} = 9$ kHz:

$$\begin{aligned} \Delta f_A(B_{NF}) &= \Delta f_{A, \min} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{B_{NF}}{f_G}\right)^2} = \sqrt{10} \cdot \Delta f_{A, \min} = \Delta f_{A, \max} = 45 \text{ kHz} \\ \Rightarrow \Delta f_{A, \min} &= \frac{45 \text{ kHz}}{\sqrt{10}} \approx \underline{14.23 \text{ kHz}}. \end{aligned}$$

d) Mit der angegebenen Formel erhält man folgende Gewinne:

$$\begin{aligned} G_{DE}(f_N = 9 \text{ kHz}) &= 10 \cdot \lg \frac{(f_N/f_G)^3}{3 \cdot (f_N/f_G - \arctan(f_N/f_G))} = \\ &= 10 \cdot \lg \frac{3^3}{3 \cdot (3 - 1.249)} \approx \underline{7.1 \text{ dB}}, \end{aligned}$$

$$G_{DE}(f_N = 3 \text{ kHz}) = 10 \cdot \lg \frac{1^3}{3 \cdot (1 - \pi/4)} \approx \underline{1.9 \text{ dB}},$$

$$G_{DE}(f_N = 1 \text{ kHz}) = 10 \cdot \lg \frac{(1/3)^3}{3 \cdot (1/3 - 0.322)} \approx \underline{0.28 \text{ dB}}.$$