

## Musterlösung zur Aufgabe A4.1

a) Mit  $N = 8$  Bit können insgesamt  $2^8$  Quantisierungsintervalle dargestellt werden  $\Rightarrow M = \underline{256}$ .

b) Nummeriert man die Quantisierungsintervalle von 0 bis 255, so steht die Bitfolge 1 für

$$\mu_1 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 255 - 2^6 - 2^3 = 183,$$

und die Bitfolge 2 für

$$\mu_2 = 2^6 + 2^5 + 2^3 = 104.$$

Mit dem Wertebereich  $\pm 1$  hat jedes Quantisierungsintervall die Breite  $\Delta = 1/128$ .  $\mu = 183$  steht somit für das Intervall von  $183/128 - 1 = 0.4297$  bis  $184/128 - 1 = 0.4375$ , während  $\mu = 104$  das Intervall von  $-0.1875$  bis  $-0.1797$  kennzeichnet. Der Abtastwert  $-0.182$  wird somit durch die Bitfolge 2 dargestellt.

c) Die Bitdauer  $T_B$  ist der Kehrwert der Bitrate  $R_B$ :

$$T_B = \frac{1}{R_B} = \frac{1}{2.048 \cdot 10^6 \text{ 1/s}} = \underline{0.488 \mu\text{s}}.$$

d) Während der Zeitdauer  $T_A$  werden  $Z \cdot N$  Binärsymbole übertragen:

$$T_A = Z \cdot N \cdot T_B = 32 \cdot 8 \cdot 0.488 \mu\text{s} = \underline{125 \mu\text{s}}.$$

e) Den Kehrwert von  $T_A$  bezeichnet man als die Abtastrate:

$$f_A = \frac{1}{T_A} = \underline{8 \text{ kHz}}.$$

f) Das Abtasttheorem wäre bereits erfüllt, wenn  $f_A \geq 2 \cdot f_{N,\text{max}} = 6.8 \text{ kHz}$  gelten würde. Richtig ist somit der letzte Lösungsvorschlag.

## Musterlösung zur Aufgabe A4.2

**a)** Richtig ist nur die erste Aussage. Die Abtastung von  $q_{\text{dis}}(t)$  mit der Abtastfrequenz  $f_A = 8$  kHz führt zu einem irreversiblen Fehler, da  $Q_{\text{dis}}(f)$  einen diskreten Spektralanteil (Diraclinie) bei  $f_4 = 4$  kHz beinhaltet und der Phasenwert  $\varphi_4 \neq 0$  ist. Mit dem hier angegebenen Phasenwert  $\varphi_4 = 90^\circ$  (4 kHz–Sinuskomponente) gilt  $\varepsilon_{\text{dis}}(t) = v_{\text{dis}}(t) - q_{\text{dis}}(t) = -0.4 \text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot f_4 \cdot t)$ . Siehe auch Musterlösung zur **Aufgabe ZA.2**.

Dagegen kann das Signal  $q_{\text{kon}}(t)$  mit dem kontinuierlichen Spektrum  $Q_{\text{kon}}(f)$  auch dann mit einem Rechteck–Tiefpass (mit der Grenzfrequenz  $f_G = 4$  kHz) vollständig rekonstruiert werden, wenn die Abtastfrequenz  $f_A = 8$  kHz verwendet wurde. Für alle Frequenzen ungleich  $f_4$  ist das Abtasttheorem erfüllt. Der Anteil der  $f_4$ –Komponente am gesamten Spektrum  $Q_{\text{kon}}(f)$  ist aber nur verschwindend klein  $\Rightarrow \text{Pr}(f_4) \rightarrow 0$ , solange das Spektrum bei  $f_4$  keine Diraclinie aufweist.

**b)** Mit  $f_A = 10$  kHz wird das Abtasttheorem in beiden Fällen erfüllt und mit  $f_G = f_A/2$  sind beide Fehlersignale  $\varepsilon_{\text{kon}}(t)$  und  $\varepsilon_{\text{dis}}(t)$  gleich 0  $\Rightarrow$  Richtig ist nur der Lösungsvorschlag 1.

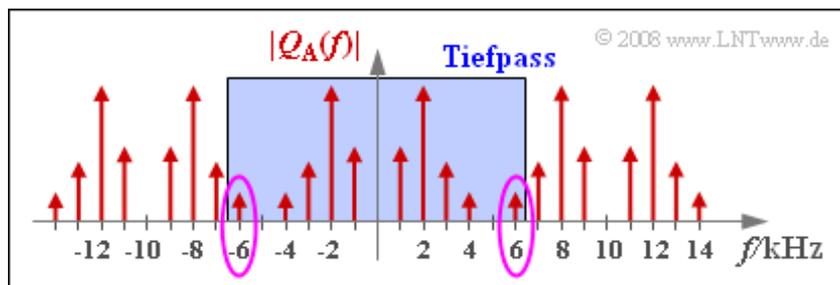
Die Signalrekonstruktion funktioniert darüber hinaus auch dann, solange  $f_G > 4$  kHz und  $f_G < 6$  kHz gilt.

**c)** Mit  $f_G = 3.5$  kHz entfernt der Tiefpass fälschlicherweise den 4 kHz–Anteil, das heißt dann gilt:

$$v_{\text{dis}}(t) = q_{\text{dis}}(t) - 0.4 \text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot f_4 \cdot t) \Rightarrow \varepsilon_{\text{dis}}(t) = -0.4 \text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot f_4 \cdot t).$$

$\Rightarrow$  Richtig ist hier der Lösungsvorschlag 2.

**d)** Durch die Abtastung mit  $f_A = 10$  kHz ergibt sich das folgende periodische Spektrum:



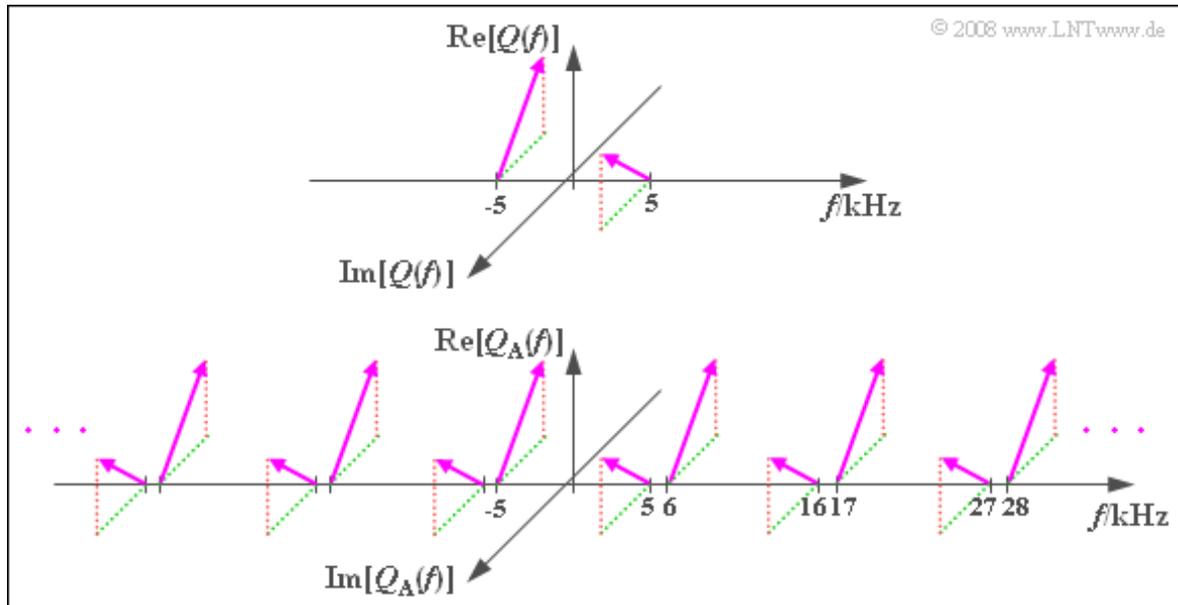
Der Tiefpass entfernt alle diskreten Frequenzanteile mit  $|f| \geq 7$  kHz, nicht aber den 6 kHz–Anteil. Das Fehlersignal  $\varepsilon_{\text{dis}}(t) = v_{\text{dis}}(t) - q_{\text{dis}}(t)$  ist dann eine harmonische Schwingung mit

- der Frequenz  $f_6 = f_A - f_4 = 6$  kHz,
- der Amplitude  $A_4$  des  $f_4$ –Anteils,
- der Phase  $\varphi_{-4} = -\varphi_4$  des  $Q(f)$ –Anteils bei  $f = -f_4$ .

$\Rightarrow$  Richtig ist hier der Lösungsvorschlag 3.

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.2

a) Alle Aussagen sind zutreffend. Das Abtasttheorem wird mit  $f_A = 11 \text{ kHz} > 2 \cdot 5 \text{ kHz}$  erfüllt, so dass eine vollständige Signalrekonstruktion immer möglich ist. Das Spektrum  $Q_A(f)$  ergibt sich aus  $Q(f)$  durch periodische Fortsetzung im jeweiligen Frequenzabstand  $f_A$ , was in der folgenden Grafik am Beispiel der Spektralfunktion  $Q_3(f)$  allgemein verdeutlicht wird.



Die Verschiebung um

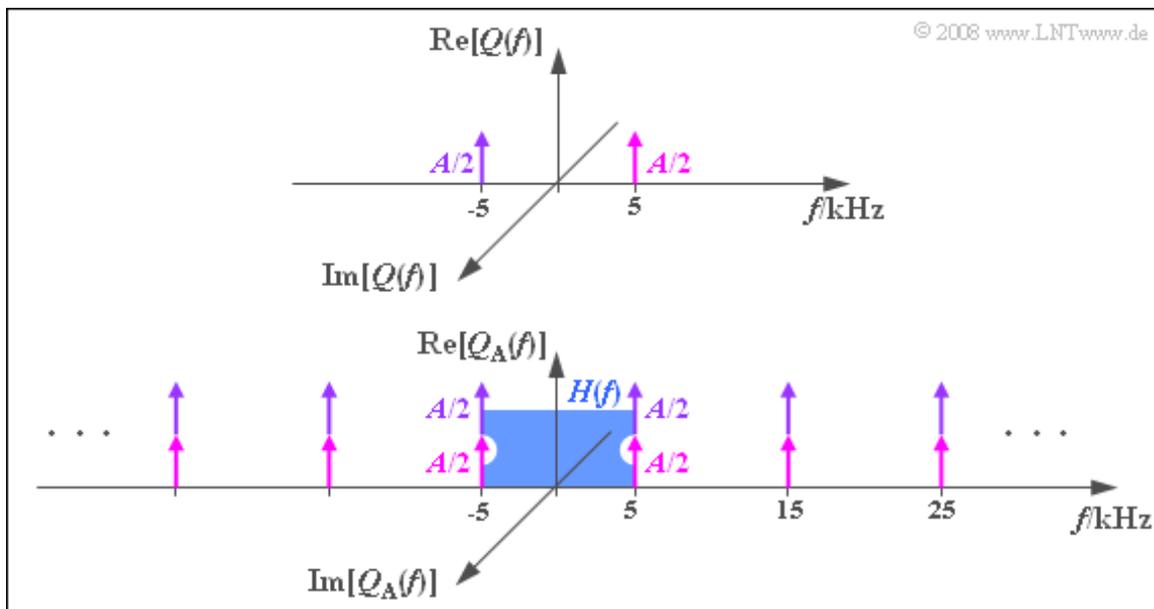
- $f_A = 11 \text{ kHz}$  liefert Spektrallinien bei 6 kHz und 16 kHz,
- $-f_A = -11 \text{ kHz}$  liefert Spektrallinien bei -6 kHz und -16 kHz,
- $2 \cdot f_A = 22 \text{ kHz}$  liefert Spektrallinien bei 17 kHz und 27 kHz,
- $-2 \cdot f_A = -22 \text{ kHz}$  liefert Spektrallinien bei -17 kHz und -27 kHz.

Durch einen rechteckförmigen Tiefpass mit der Grenzfrequenz  $f_G = f_A/2 = 5.5 \text{ kHz}$  erhält man wieder das ursprüngliche Spektrum  $Q(f)$ .

b) Der Abtastabstand ist gleich dem Kehrwert der Abtastfrequenz:

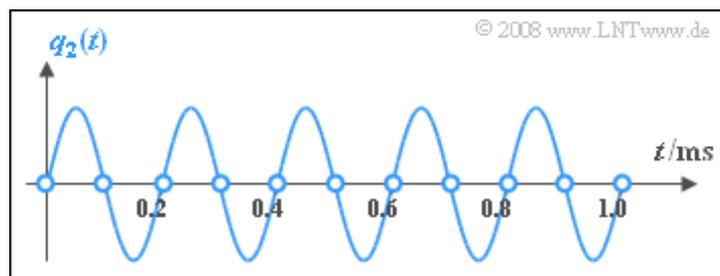
$$T_A = \frac{1}{f_A} \underline{\underline{= 0.1 \text{ ms}}}.$$

c) Beim cosinusförmigen Signal ergibt sich entsprechend der nachfolgenden Grafik mit  $f_A = 10 \text{ kHz}$  das Spektrum  $Q_A(f)$ : Alle Spektrallinien sind reell. Die Periodifizierung von  $Q(f)$  mit  $f_A = 10 \text{ kHz}$  führt zu einem Diracpuls mit Spektrallinien bei  $\pm f_N, \pm f_N \pm f_A, \pm f_N \pm 2f_A$ , usw.. Durch die Überlagerungen haben alle Diracfunktionen das Gewicht  $A$ , während die beiden Spektrallinien von  $Q(f)$  nur jeweils mit  $A/2$  gewichtet sind. Wegen  $H(f = f_N) = H(f = f_G) = 0.5$  ist das Spektrum  $V_1(f)$  nach dem Tiefpass identisch mit  $Q_1(f)$  und dementsprechend gilt auch  $v_1(t) = q_1(t)$ .



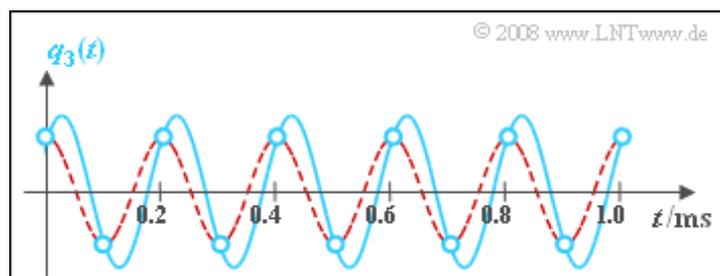
Im Zeitbereich kann man sich die Signalrekonstruktion wie folgt vorstellen: Die Abtastwerte von  $q_1(t)$  liegen genau bei den Signalmaxima und -minima. Der Tiefpass formt daraus das Cosinussignal mit richtiger Amplitude, Frequenz und Phase. Richtig ist demnach der Lösungsvorschlag 2.

**d)** Alle Abtastwerte von  $q_2(t)$  liegen nun genau bei den Nulldurchgängen des Sinussignals, das heißt, dass hier  $q_A(t) = 0$  gilt. Damit ergibt sich aber natürlich auch  $v_2(t) = 0$ .  $\Rightarrow$  Lösungsvorschlag 3 ist richtig.



Im Spektralbereich kann man das Ergebnis mit Hilfe der Grafik zur Teilaufgabe a) herleiten.  $Q(f)$  ist rein imaginär und die Imaginärteile bei  $\pm f_N$  haben unterschiedliche Vorzeichen. Somit heben sich bei der Periodifizierung jeweils ein positiver und ein negativer Anteil auf  $\Rightarrow Q_A(f) = 0 \Rightarrow V_2(f) = 0$ .

**e)** Von den vorgegebenen Lösungsvorschlägen ist keiner richtig. Ersetzt man in der Grafik zur Aufgabe a) die Abtastfrequenz  $f_A = 11$  kHz durch  $f_A = 10$  kHz, so addieren sich zwar die Realteile, aber die Imaginärteile löschen sich aus. Das heißt, dass nun  $Q_A(f)$  und  $V_3(f)$  reelle Spektren sind. Das heißt weiter: Die Phaseninformation geht verloren ( $\varphi = 0$ ) und das Ausgangssignal  $v_3(t)$  ist ein Cosinussignal. Die Signale  $q_3(t)$  und  $v_3(t)$  unterscheiden sich somit sowohl in der Amplitude als auch in der Phase.



Die Grafik zeigt türkisfarben das Signal  $q_3(t)$ , dessen Abtastwerte (Kreise) sowie rot gestrichelt das Ausgangssignal  $v_3(t)$  des Tiefpasses. Man erkennt, dass der Tiefpass genau das Ergebnis liefert, für das wahrscheinlich auch Sie sich entscheiden würden, wenn Sie durch die Abtastwerte einen Kurvenzug

einzeichnen sollten. Keines der vorgegebenen Lösungsvorschläge trifft zu.

## Musterlösung zur Aufgabe A4.3

a) Das Spektrum des Rechteckimpulses  $g_R(t)$  mit Amplitude 1 und Dauer  $T_R$  lautet:

$$G_R(f) = T_R \cdot \text{si}(\pi f T_R) \quad \text{mit} \quad \text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{G_R(f)}{T_A} = \frac{T_R}{T_A} \cdot \text{si}(\pi f T_R) \quad \Rightarrow \quad \frac{G_R(f=0)}{T_A} = \frac{T_R}{T_A} \equiv 0.5.$$

b) Richtig ist der zweite Lösungsvorschlag. Aus der angegebenen Gleichung im Zeitbereich ergibt sich mit dem Faltungssatz:

$$q_A(t) = \left[ \frac{1}{T_A} \cdot p_\delta(t) \star g_R(t) \right] \cdot q(t)$$

$$\Rightarrow Q_A(f) = \left[ \frac{1}{T_A} \cdot P_\delta(f) \cdot G_R(f) \right] \star Q(f) = \left[ P_\delta(f) \cdot \frac{G_R(f)}{T_A} \right] \star Q(f).$$

Der erste Lösungsvorschlag gilt nur bei idealer Abtastung und der letzte bei diskreter Abtastung.

c) Die Antwort ist JA. Ausgehend von dem Ergebnis aus b) erhält man mit der Spektralfunktion des Diracpulses

$$Q_A(f) = \left[ P_\delta(f) \cdot \frac{G_R(f)}{T_A} \right] \star Q(f) = \left[ \frac{G_R(f)}{T_A} \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \mu \cdot f_A) \right] \star Q(f).$$

Ist das Abtasttheorem erfüllt und der Tiefpass richtig dimensioniert, so liegen von den unendlich vielen Faltungsprodukten nur das Faltungsprodukt mit  $\mu = 0$  im Durchlassbereich. Unter Berücksichtigung des Verstärkungsfaktors  $T_A/T_R$  erhält man somit für das Spektrum am Filterausgang:

$$V(f) = \frac{T_A}{T_R} \cdot \left[ \frac{G_R(f=0)}{T_A} \cdot \delta(f) \right] \star Q(f) = Q(f).$$

d) Richtig ist der letzte Lösungsvorschlag. Verlagert man den Faktor  $1/T_A$  zum Rechteckimpuls, so erhält man bei diskreter Abtastung mit dem Faltungssatz:

$$q_A(t) = [p_\delta(t) \cdot q(t)] \star \frac{g_R(t)}{T_A} \quad \Rightarrow \quad Q_A(f) = [P_\delta(f) \star Q(f)] \cdot \frac{G_R(f)}{T_A}.$$

e) Die Antwort ist NEIN. Die Gewichtungsfunktion  $G_R(f)$  betrifft nun auch den inneren Kern ( $\mu = 0$ ) des Faltungsproduktes. Alle anderen Terme ( $\mu \neq 0$ ) werden durch den Tiefpass eliminiert. Man erhält hier im relevanten Bereich  $|f| < f_A/2$ :

$$V(f) = \frac{T_A}{T_R} \cdot \frac{G_R(f)}{T_A} \cdot Q(f) = 2 \cdot 0.5 \cdot \text{si}(\pi f T_R) \cdot Q(f)$$

$$\Rightarrow V(f) = Q(f) \cdot \text{si}(\pi f T_R).$$

Sieht man hier keine zusätzliche Entzerrung vor, so werden die höheren Frequenzen entsprechend der si-Funktion gedämpft. Die höchste Signalfrequenz ( $f = f_A/2$ ) wird hierbei am stärksten abgesenkt:

$$\begin{aligned}V(f = \frac{f_A}{2}) &= Q(\frac{f_A}{2}) \cdot \text{si}(\pi \cdot \frac{T_R}{2 \cdot T_A}) = \\ &= Q(\frac{f_A}{2}) \cdot \text{si}(\pi \cdot \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4}) \approx 0.9 \cdot Q(\frac{f_A}{2}).\end{aligned}$$

## Musterlösung zur Aufgabe A4.4

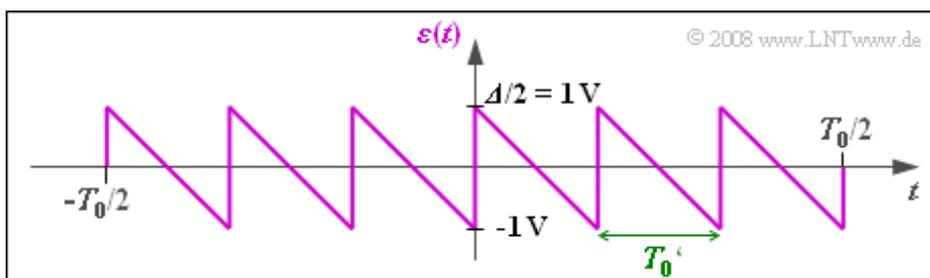
a) Die Signalleistung  $P_S$  ist gleich dem quadratischen Mittelwert von  $q(t)$ , wenn der Bezugswiderstand  $1\Omega$  verwendet und dementsprechend für die Leistung die Einheit „V<sup>2</sup>“ in Kauf genommen wird. Aufgrund der Periodizität und der Symmetrie genügt die Mittelung über  $T_0/2$ :

$$P_S = \frac{1}{T_0/2} \cdot \int_0^{T_0/2} q^2(t) dt = \frac{2 \cdot q_{\max}^2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0/2} (2 \cdot t/T_0)^2 dt =$$

$$= \frac{2 \cdot q_{\max}^2}{T_0} \cdot \frac{T_0}{2} \cdot \int_0^1 x^2 dx = \frac{q_{\max}^2}{3}.$$

Hierbei wurde die Substitution  $x = 2 \cdot t/T_0$  verwendet. Mit  $q_{\max} = 6 \text{ V}$  erhält man  $P_S = 12 \text{ V}^2$ .

b) Wir gehen hier von  $Q_{\max} = q_{\max} = 6 \text{ V}$  aus. Damit ergibt sich das sägezahnförmige Fehlersignal  $\varepsilon(t)$  zwischen  $\pm 1\text{V}$  und der Periodendauer  $T_0' = T_0/6$ .



Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1, 3 und 4.

c) Das Fehlersignal  $\varepsilon(t)$  verläuft ebenso wie  $q(t)$  sägezahnförmig. Somit eignet sich zur Berechnung des quadratischen Mittelwertes dieselbe Gleichung wie in Teilaufgabe a). Zu beachten ist die um den Faktor  $M$  kleinere Amplitude, während die unterschiedliche Periodendauer für die Mittelung keine Rolle spielt:

$$P_Q = \frac{P_S}{M^2} = \frac{12 \text{ V}^2}{36} = 0.333 \text{ V}^2.$$

d) Die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und c) führen zum Quantisierungs-SNR:

$$\rho_Q = \frac{P_S}{P_Q} = M^2 = 36 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_Q = 15.56 \text{ dB}.$$

e) Mit  $M = 2^N$  erhält man allgemein:

$$\rho_Q = M^2 = 2^{2N} \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_Q = 20 \cdot \lg(2) \cdot N \approx 6.02 \text{ dB} \cdot N.$$

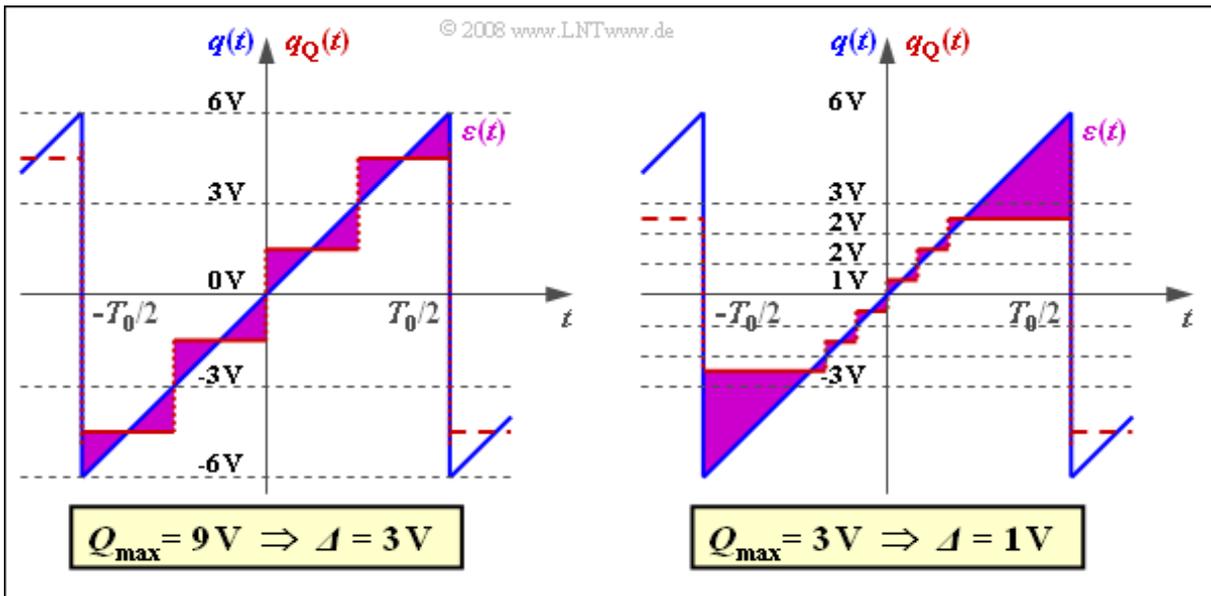
Daraus ergeben sich die gesuchten Sonderfälle:

$$N = 8 : 10 \cdot \lg \rho_Q = 48.16 \text{ dB},$$

$$N = 16 : 10 \cdot \lg \rho_Q = 96.32 \text{ dB}.$$

f) Alle diese Voraussetzungen müssen erfüllt sein. Bei nichtlinearer Quantisierung gilt  $\rho_Q = M^2$  nicht. Bei einer anderen Amplitudenverteilung als der Gleichverteilung ist  $\rho_Q = M^2$  ebenfalls nur eine Näherung, die

jedoch meist in Kauf genommen wird. Ist  $Q_{\max} < q_{\max}$  so kommt es zu einem unzulässigen Abschneiden der Spitzen, während mit  $Q_{\max} > q_{\max}$  die Quantisierungsintervalle größer sind als erforderlich.



Die Grafik zeigt die Fehlersignale  $\varepsilon(t)$  für  $Q_{\max} > q_{\max}$  (links) und  $Q_{\max} < q_{\max}$  (rechts). In beiden Fällen ergibt sich eine deutlich größere Quantisierungsrauschleistung als unter Punkt c) berechnet.

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.4

a) Der horizontale Abschnitt der PCM-Kurve wird allein durch das Quantisierungsrauschen bestimmt. Hier gilt mit der Quantisierungsstufenzahl  $M = 2^N$ :

$$\rho_v(\xi \rightarrow \infty) = \rho_Q = M^2 = 2^{2N} \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_v \approx 6 \text{ dB} \cdot N.$$

Aus dem ablesbaren Störabstand  $10 \cdot \lg \rho_v \approx 48 \text{ dB}$  folgt daraus  $N = 8 \text{ Bit}$  pro Abtastwert und für die Quantisierungsstufenzahl  $M = 256$ .

b) Aus der obigen Näherung erhält man für  $N = 11 \Rightarrow M = 2048$  den Störabstand 66 dB. Mit  $N = 10 \Rightarrow M = 1024$  erreicht man nur ca. 60 dB. Bei der Compact Disc (CD) werden die PCM-Parameter  $N = 16 \Rightarrow M = 65536 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_v > 96 \text{ dB}$  verwendet.

c) Bei Zweiseitenband-Amplitudenmodulation wären hierfür  $10 \cdot \lg \xi = 40 \text{ dB}$  erforderlich. Wie aus der Grafik auf der Angabenseite hervorgeht, ist dieser Abszissenwert für die vorgegebene PCM um 30 dB geringer  $\Rightarrow 10 \cdot \lg \xi_{40 \text{ dB}} = 10 \text{ dB}$ .

d) Der logarithmische Wert 30 dB entspricht einer um den Faktor  $10^3 = 1000$  reduzierten Leistung.

e) Aus der Grafik auf der Angabenseite erkennt man, dass der Abszissenwert  $10 \cdot \lg \xi = 6 \text{ dB}$  den Störabstand 20 dB zur Folge hat. Aus  $10 \cdot \lg \rho_v = 20 \text{ dB}$  folgt  $\rho_v = 100$  und damit weiter (mit  $N = 8$ ):

$$\rho_v = \frac{1}{2^{-2N} + 4 \cdot p_B} \approx \frac{1}{1.5 \cdot 10^{-5} + 4 \cdot p_B} = 100$$
$$\Rightarrow p_B = \frac{0.01 - 1.5 \cdot 10^{-5}}{4} \approx 0.025.$$

f) Bei gleichem  $\xi$  kann wieder mit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B = 0.025$  gerechnet werden. Damit erhält man mit  $N = 3$  (Bit pro Abtastwert)

$$\rho_v = \frac{1}{2^{-6} + 4 \cdot p_B} = \frac{1}{0.015625 + 0.01} \approx 39 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_v \approx 15.9 \text{ dB}.$$

Bei 3 Bit pro Abtastwert ist die Quantisierungsrauschleistung ( $P_Q = 0.015625$ ) schon größer als die Fehlerrauschleistung ( $P_F = 0.01$ ). Durch Erhöhung der Sendeleistung könnte wegen der Quantisierung der Sinkenstörabstand maximal 18 dB betragen, wenn keine Bitfehler vorkommen ( $P_F = 0$ ).

## Musterlösung zur Aufgabe A4.5

a) Der Abtastwert  $q_A = 0.4$  gehört zum Segment  $k = 5$ , das den Bereich  $1/4 < q_A \leq 1/2$  abdeckt. Aus der angegebenen Gleichung folgt daraus mit  $k = 5$ :

$$q_K(q_A) = 2^{4-k} \cdot q_A + \frac{k}{8} = \frac{1}{2} \cdot 0.4 + \frac{5}{8} = \underline{0.825}.$$

b) Der Eingangswert des linearen Quantisierers ist nun  $q_K = 0.825$ , so dass folgende Rechnung zutrifft:

$$\frac{105}{128} < q_K = 0.825 \leq \frac{106}{128} \Rightarrow m = 105 \Rightarrow \mu = 128 + 105 = \underline{233}.$$

c) Entsprechend der Angabenseite wird das Quantisierungsintervall  $\mu = 128 + m$  durch den Wert  $q_Q = 1/256 + m/128$  repräsentiert. Mit  $m = 105$  folgt daraus:

$$q_Q = \frac{1}{256} + \frac{105}{128} \approx \underline{0.824}.$$

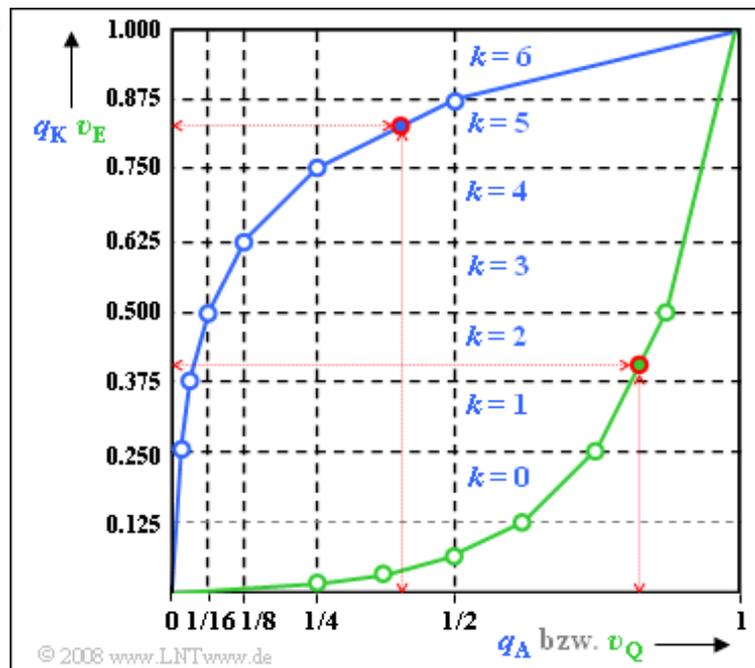
d) Entsprechend der obigen Musterlösung gilt mit dem Eingangswert  $q_A = 0.04$ :

$$\frac{1}{32} < q_A \leq \frac{1}{16} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow q_K = 2^2 \cdot 0.04 + \frac{2}{8} = 0.41$$

$$\Rightarrow \frac{52}{128} < q_K = 0.41 \leq \frac{53}{128} \Rightarrow m = 52 \Rightarrow \mu = 128 + 52 = 180$$

$$\Rightarrow q_Q = \frac{1}{256} + \frac{52}{128} = \underline{0.41}.$$

e) Beim Kompressor hat  $q_A = 0.4$  zum Ausgangswert  $q_K = 0.825$  geführt und nach der Quantisierung zum Wert 0.824 (siehe Teilaufgaben a und c). Die Grafik zeigt, dass sich damit empfängerseitig aus  $v_Q = 0.824$  näherungsweise wieder der Wert  $v_E \approx 0.4$  ergibt.

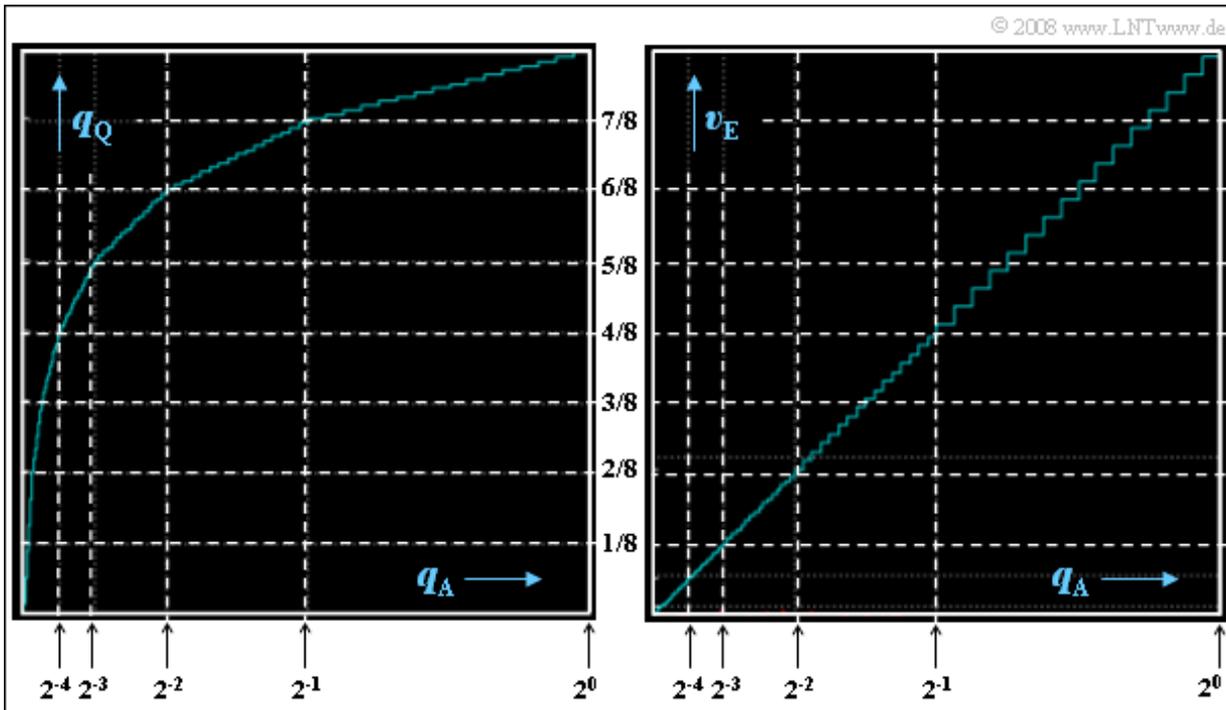


Aufgrund der Quantisierung ist dies jedoch nur eine Näherung. Exakt gilt:

$$v_E = 0.25 + \frac{0.824 - 0.750}{0.875 - 0.750} \cdot 0.25 = \underline{0.398}.$$

Dieser Rechengang ist anhand der Grafik nachvollziehbar. Obwohl die Expanderkennlinie  $v_E(v_Q)$  gleich der Umkehrfunktion der Kompressorkennlinie  $q_K(q_A)$  ist, ergibt sich ein Fehler, da die Eingangsgröße  $v_Q$  des Expanders wertdiskret ist (Einfluss der Quantisierung).

f) Richtig sind die Aussagen 1 und 4, wie anhand der linken Grafik nachgeprüft werden kann. Die Breite der einzelnen Stufen ist in jedem Segment unterschiedlich. Im äußersten Segment ( $k = 6$ ) beträgt diese  $0.5/16 = 1/32$ , im nächsten Segment ( $k = 5$ ) nur mehr  $0.25/16 = 1/64$ . Die Stufenbreiten in den weiteren Segmenten sind  $1/128$  ( $k = 4$ ),  $1/256$  ( $k = 3$ ),  $1/512$  ( $k = 2$ ) und  $1/1024$  ( $k = 1$ ). Der innerste Bereich von  $-1/64$  bis  $+1/64$  wird in 64 Stufen unterteilt, woraus sich die Stufenbreite  $1/2048$  ergibt.



Die Stufenhöhe ist dagegen in den Segmenten  $k \neq 0$  konstant gleich  $1/8$  geteilt durch  $16 = 1/128$  und im mittleren Segment gleich  $1/256$ .

g) Richtig ist hier nur die zweite Aussage. Durch den Expander verläuft die Quantisierung nun entlang der Winkelhalbierenden. In jedem Segment sind Stufenbreite und Stufenhöhe konstant. Wie die rechte Grafik zeigt, sind aber im nächstinneren Segment die Breite und die Höhe nur mehr halb so groß.

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.5

- a) Richtig sind die Aussagen 2 und 3. Eine Signalverfälschung von leisen Tönen oder in Sprachpausen wird subjektiv als störender empfunden als z.B. ein zusätzliches Geräusch bei Heavy Metal. Bezüglich des Quantisierungsrauschens bzw. des SNR gibt es durch eine nichtlineare Quantisierung allerdings keine Verbesserung, wenn von einer Gleichverteilung der Amplitudenwerte ausgegangen wird. Berücksichtigt man aber, dass bei Sprach- und Musiksignalen kleinere Amplituden sehr viel häufiger auftreten als große (Laplaceverteilung), so ergibt sich durch die nichtlineare Quantisierung auch ein besseres SNR.
- b) Richtig sind die Aussagen 1 und 2. Durch die Linearisierung in den einzelnen Segmenten ist in diesen bei der 13-Segment-Kennlinie die Intervallbreite der verschiedenen Quantisierungsstufen konstant, was sich bei der Realisierung günstig auswirkt. Dagegen gibt es bei der nichtlinearen Quantisierung gemäß der A-Kennlinie keine Quantisierungsintervalle gleicher Breite. Das bedeutet: Die Aussage 3 ist falsch.
- c) Für  $q_A = 1$  erhält man unabhängig von  $A$  den Wert  $q_K = 1$ . Allein mit dieser Vorgabe kann  $A$  also nicht ermittelt werden. Richtig ist also NEIN.
- d) Auch damit kann  $A$  nicht bestimmt werden. Für  $q_A = 1/A$  liefern beide Bereichsgleichungen den gleichen Wert  $q_K = 1/(1 + \ln(A))$ . Richtig ist also wiederum NEIN.
- e) Mit dieser Forderung ist  $A$  berechenbar:

$$0.875 = \frac{1 + \ln(A/2)}{1 + \ln(A)} = \frac{1 - \ln(2) + \ln(A)}{1 + \ln(A)} \approx \frac{1 - 0.693 + \ln(A)}{1 + \ln(A)}$$
$$\Rightarrow \ln(A) = \frac{0.875 - 0.307}{1 - 0.875} = 4.544 \Rightarrow A \approx 94.$$

- f) Die Kurve für  $A_1 = 200$  liegt oberhalb der Kurve mit  $A = 100$ , die Kurve mit  $A_2 = 50$  unterhalb. Dies zeigt die folgende Rechnung für  $q_A = 0.5$ :

$$A = 100 : q_K = \frac{1 + \ln(100) - \ln(2)}{1 + \ln(100)} = \frac{1 + 4.605 - 0.693}{1 + 4.605} \approx 0.876,$$
$$A = 200 : q_K = \frac{1 + 5.298 - 0.693}{1 + 5.298} \approx 0.890,$$
$$A = 50 : q_K = \frac{1 + 3.912 - 0.693}{1 + 3.912} \approx 0.859.$$

Richtig ist somit die Aussage 2.

## Musterlösung zur Aufgabe A4.6

a) Der Gleichanteil des unipolaren redundanzfreien Quellensignals beträgt  $m_q = s_0/2$ . Das Diracgewicht ist somit  $B = m_q^2 = s_0^2/4 = 1 \text{ V}^2$ . Ohne diesen Gleichanteil ergibt sich das stochastische Rechtecksignal  $q(t) - m_q \in \{+s_0/2, -s_0/2\}$ . Dieses gleichsignalfreie Signal besitzt den kontinuierlichen LDS-Anteil  $(s_0/2)^2 \cdot T \cdot \text{si}^2(\pi f T)$ , woraus der gesuchte Wert bei der Frequenz  $f = 0$  ermittelt werden kann:

$$A = \frac{s_0^2 \cdot T}{4} = \frac{(2 \text{ V})^2 \cdot 10^{-6} \text{ s}}{4} = \underline{10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}}.$$

b) Das Spektrum  $Z(f)$  eines Cosinussignals  $z(t)$  besteht aus zwei Diracfunktionen bei  $\pm f_T$ , jeweils mit dem Gewicht  $1/2$ . Das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_z(f)$  besteht ebenfalls aus den beiden Diracfunktionen, nun aber mit jeweiligem Gewicht  $1/4$ . Die Faltung  $\Phi_q(f) * \Phi_z(f)$  ergibt das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_s(f)$  des Sendesignals. Daraus folgt:

$$C = \frac{A}{4} = \underline{0.25 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}}, \quad D = \frac{B}{4} = \underline{0.25 \text{ V}^2}.$$

**Anmerkung:** Die Leistung pro Bit ergibt sich als das Integral über  $\Phi_s(f)$ :

$$\begin{aligned} P_s &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_s(f) \, df = 2 \cdot \int_0^{\infty} [C \cdot \text{si}^2(\pi f T) + D \cdot \delta(f - f_T)] \, df = \\ &= 2 \cdot \left[ \frac{C}{T} + D \right] = 2 \cdot \left[ \frac{0.25 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}}{10^{-6} \text{ s}} + 0.25 \text{ V}^2 \right] = \underline{1 \text{ V}^2}. \end{aligned}$$

c) Bei BPSK ist das Quellensignal  $q(t)$  bipolar anzusetzen. Im Leistungsdichtespektrum fehlt deshalb die Diraclinie  $\Rightarrow B=0$  und der kontinuierliche LDS-Anteil ist viermal so groß als bei der ASK:

$$A = s_0^2 \cdot T = \underline{4 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}}.$$

d) Für die LDS-Parameter des BPSK-Sendesignals gilt analog zur ASK:

$$C = \frac{A}{4} = \underline{10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}}, \quad D = \frac{B}{4} = \underline{0}.$$

e) Richtig ist nur die erste Aussage. Bei BPSK (bipolares Quellensignal) beinhaltet  $\Phi_q(f)$  auch dann keine einzige Diraclinie, wenn  $g_q(t)$  von der Rechteckform abweicht. Dagegen beinhaltet das unipolare ASK-Quellensignal unendlich viele Diraclinien bei allen Vielfachen von  $1/T$ . Weitere Informationen hierzu finden Sie bei **AKF und LDS bei unipolaren Binärsignalen** im Buch „Digitalsignalübertragung“.

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.6

a) Das ASK-Signal ergibt sich aus der Multiplikation des hier sinusförmigen Trägersignals  $z(t)$  mit dem unipolaren Quellensignal  $q(t)$ . Es ist offensichtlich, dass  $s_3(t)$  ein solches ASK-Signal beschreibt  $\Rightarrow$  Lösungsvorschlag 3. Die unipolaren Amplitudenkoeffizienten des Quellensignals lauten 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1.

b) Gegenüber der bipolaren Basisbandübertragung sind bei der ASK folgende Änderungen zu erkennen:

- Die Energie wird wegen der Multiplikation mit dem Sinussignal halbiert.
- Da  $q(t)$  als redundanzfrei vorausgesetzt wird, gilt in der Hälfte der Zeit  $s_3(t) = 0$ , wodurch die Energie nochmals halbiert wird.

Damit ergibt sich:

$$E_B = \frac{s_0^2 \cdot T_B}{4 \cdot R} = \frac{(2 \text{ V})^2 \cdot 10^{-6} \text{ s}}{4 \cdot 50 \text{ V/A}} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Ws} = \underline{0.02 \mu\text{Ws}}.$$

c) Typisch für die BPSK sind Phasensprünge. Da stets das gleiche Quellensignal vorausgesetzt wurde, treten diese Phasensprünge genau dann auf, wenn im ASK-Signal  $s_3(t)$  ein Symbolwechsel zu erkennen ist. Richtig ist somit der erste Lösungsvorschlag  $s_1(t)$ .

d) Von der unter b) genannten Veränderung gegenüber der Basisbandübertragung ist bei BPSK nur die erste zutreffend. Damit gilt:

$$E_B = \frac{s_0^2 \cdot T_B}{2 \cdot R} = \underline{0.04 \mu\text{Ws}}.$$

e) Wie bereits zu vermuten ist, lautet die richtige Antwort  $s_2(t) \Rightarrow$  Lösungsvorschlag 2.

Der **DPSK-Modulator** arbeitet wie folgt, wobei  $m_0 = -1$  vorausgesetzt wird:

$$\begin{aligned} m_0 = -1, a_1 = +1 &\Rightarrow m_1 = -1, \\ m_1 = -1, a_2 = +1 &\Rightarrow m_2 = -1, \\ m_2 = -1, a_3 = -1 &\Rightarrow m_3 = +1, \\ m_3 = +1, a_4 = +1 &\Rightarrow m_4 = +1, \\ m_4 = +1, a_5 = -1 &\Rightarrow m_5 = -1, \\ m_5 = -1, a_6 = +1 &\Rightarrow m_6 = -1, \text{ usw.} \end{aligned}$$

f) Ein Vergleich der beiden Signale  $s_1(t)$  und  $s_2(t)$  zeigt, dass sich hinsichtlich der Signalenergie nichts ändert:  $E_B = \underline{0.04 \mu\text{Ws}} \Rightarrow$  Die DPSK weist die genau gleiche Signalenergie auf wie die BPSK.

## Musterlösung zur Aufgabe A4.7

a) Aus  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 10$  dB folgt  $E_B/N_0 = 10$  und damit

$$p_B = Q(\sqrt{10}) \approx Q_S(\sqrt{10}) = \frac{1}{\sqrt{20\pi}} \cdot e^{-5} \approx \underline{8.5 \cdot 10^{-4}}.$$

Der tatsächliche Wert gemäß dem Angabenblatt lautet  $7.83 \cdot 10^{-4}$ . Die angegebene Gleichung  $Q_S(x)$  ist also tatsächlich eine obere Schranke für  $Q(x)$ . Der relative Fehler bei Verwendung von  $Q_S(x)$  anstelle von  $Q(x)$  ist in diesem Fall kleiner als 10%.

b) Bei BPSK lautet die entsprechende Gleichung:

$$p_B = Q(\sqrt{20}) \approx Q_S(\sqrt{20}) = \frac{1}{\sqrt{40\pi}} \cdot e^{-10} \approx \underline{4.05 \cdot 10^{-6}}.$$

Nun beträgt der relative Fehler durch Verwendung von  $Q_S(x)$  nur noch 5%. Allgemein gilt: Je kleiner die Fehlerwahrscheinlichkeit ist, um so besser ist die Näherung  $Q(x) \approx Q_S(x)$ .

c) Bei BPSK ist hierfür laut Angabe ein (logarithmierter) Wert von 9.6 dB erforderlich. Bei der ASK muss der logarithmierte Wert um etwa 3 dB erhöht werden  $\Rightarrow 10 \cdot \lg E_B/N_0 \approx \underline{12.6 \text{ dB}}$ .

d) Entsprechend der angegebenen DPSK-Gleichung gilt mit  $E_B/N_0 = 10$ :

$$p_B = 1/2 \cdot e^{-10} \approx \underline{2.27 \cdot 10^{-5}}.$$

Wie bereits aus der Grafik auf der Angabenseite ersichtlich, liegt die DPSK mit differentiell-kohärenter Demodulation zwischen der binären Phasenmodulation (BPSK) und der binären Amplitudenmodulation (ASK), wenn für beide eine kohärente Demodulation vorgesehen ist.

e) Aus der Umkehrfunktion der angegebenen Gleichung erhält man:

$$\frac{E_B}{N_0} = \ln \frac{1}{2p_B} = \ln(50000) \approx 10.82 \Rightarrow 10 \cdot \lg \frac{E_B}{N_0} \approx \underline{10.4 \text{ dB}}.$$

f) Die inkohärente ASK ist entsprechend den angegebenen Gleichungen wieder um 3 dB schlechter als die differentiell-kohärente DPSK. Daraus folgt für den gesuchten dB-Wert:  $10 \cdot \lg E_B/N_0 \approx \underline{13.4 \text{ dB}}$ .

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.7

a) Der Rauscheffektivwert ergibt sich hier zu

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{N_0}{2 \cdot T_B}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2/\text{Hz}}{2 \cdot 1 \text{ ns}}} = 1 \text{ V}$$

$$\Rightarrow p_{\text{BB}} = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) = Q(4) = \underline{0.317 \cdot 10^{-4}}.$$

b) Beim Basisbandsystem gilt:

$$E_B = s_0^2 \cdot T_B = (4 \text{ V})^2 \cdot 10^{-9} \text{ s} = \underline{1.6 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2\text{s}}.$$

Natürlich ergibt sich mit der zweiten angegebenen Gleichung die genau gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit

$$p_{\text{BB}} = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 16 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2\text{s}}{2 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2/\text{Hz}}}\right) = Q(4) = 0.317 \cdot 10^{-4}.$$

c) Bei halber Sendeamplitude  $s_0 = 2 \text{ V}$  sinkt die Energie pro Bit auf ein Viertel und es gelten folgende Gleichungen:

$$p_{\text{BB}} = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) = Q\left(\frac{2 \text{ V}}{1 \text{ V}}\right) = Q(2) = 0.227 \cdot 10^{-1},$$

$$p_{\text{BB}} = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2\text{s}}{2 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2/\text{Hz}}}\right) = Q(2) = \underline{0.227 \cdot 10^{-1}}.$$

d) Unter Berücksichtigung der Energie  $E_B = s_0^2 \cdot T_B/2$  erhält man mit

$$p_{\text{BPSK}} = Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T_B}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_B}{N_0}}\right)$$

das gleiche Ergebnis wie beim optimalen Basisbandübertragungssystem. Richtig ist somit Antwort 2.

e) Es ergeben sich die genau gleichen Ergebnisse wie bei der Basisbandübertragung:

$$\frac{E_B}{N_0} = 8 : p_{\text{BPSK}} = Q(\sqrt{16}) = Q(4) = \underline{0.317 \cdot 10^{-4}},$$

$$\frac{E_B}{N_0} = 2 : p_{\text{BPSK}} = Q(\sqrt{4}) = Q(2) = \underline{0.227 \cdot 10^{-1}}.$$

## Musterlösung zur Aufgabe A4.8

a) Mit dem Additionstheorem der Trigonometrie erhält man:

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \pm s_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t + \phi) \cdot \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t + \theta) = \\ &= \pm \frac{s_0}{2} \cdot [\cos(\phi - \theta) + \cos(4\pi \cdot f_T \cdot t + \phi + \theta)]. \end{aligned}$$

Nach dem Tiefpass verbleibt nur der Gleichanteil  $y_1(t) = \pm s_0/2 \cdot \cos(\phi - \theta)$ . Richtig ist somit der zweite Lösungsvorschlag.

b) Analog zu Teilaufgabe a) ergibt sich

$$\begin{aligned} m_2(t) &= \pm s_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t + \phi) \cdot [-\sin(2\pi \cdot f_T \cdot t + \theta)] = \\ &= \pm \frac{s_0}{2} \cdot [\sin(\phi - \theta) + \sin(4\pi \cdot f_T \cdot t + \phi + \theta)] \\ y_2(t) &= \pm \frac{s_0}{2} \cdot \sin(\phi - \theta). \end{aligned}$$

Richtig ist demnach hier der letzte Lösungsvorschlag.

c) Richtig sind die Lösungsvorschläge 2 und 3:

$$\begin{aligned} x(t) &= y_1(t) \cdot y_2(t) = \frac{s_0^2}{4} \cdot \cos(\phi - \theta) \cdot \sin(\phi - \theta) = \\ &= \frac{s_0^2}{8} \cdot \sin(2 \cdot \phi - 2 \cdot \theta). \end{aligned}$$

Mit der Kleinwinkelnäherung  $\sin(\alpha) \approx \alpha$  folgt daraus:

$$x(t) \approx \frac{s_0^2}{4} \cdot (\phi - \theta).$$

Das Regelsignal  $x(t)$  ist also proportional zum Phasenfehler  $\phi - \theta$ , der mit der Costas-Regelschleife zu 0 geregelt wird. Im eingeschwungenen Zustand folgt somit das Oszillatorsignal  $z(t)$  unmittelbar dem Empfangssignal  $r(t)$ .

Um die erforderliche Startbedingung  $\theta \approx \phi$  zu erreichen, wird meist zunächst eine Trainingssequenz übertragen und die Phase entsprechend initialisiert. Dies auch, weil die Phase nur modulo  $\pi$  ausgeregelt wird, so dass beispielsweise  $\phi - \theta = \pi$  fälschlicherweise zum Regelsignal  $x(t) = 0$  führt.

## Musterlösung zur Aufgabe A4.9

a) Aus dem (roten) Inphasesignal folgt (links entsprechend Definition, rechts gemäß Skizze):

$$s_{\cos}(t) = a_I \cdot g_0 \cdot \cos(2\pi f_T t) = g_0 \cdot \cos(2\pi f_T t) \Rightarrow a_I = \underline{+1}.$$

Entsprechend erkennt man aus dem Quadratsignal:

$$s_{-\sin}(t) = -a_Q \cdot g_0 \cdot \sin(2\pi f_T t) = -g_0 \cdot \sin(2\pi f_T t) \Rightarrow a_Q = \underline{+1}.$$

b) Die beiden Teilsignale haben jeweils die (maximale) Hüllkurve  $g_0$ , während  $s_0$  das Sendesignal  $s(t)$  charakterisiert. Wie aus der Signalraumzuordnung (siehe Aufgabe Z4.9) hervorgeht, gilt

$$s_0/g_0 = \sqrt{2} = \underline{1.414}.$$

c) Die Amplitudenkoeffizienten  $a_I$  und  $a_Q$  haben die gleichen Vorzeichen wie bei der Teilaufgabe a), aber mit kleinerem Betrag:  $a_I = a_Q = \underline{+1/3}$ .

d) Im dritten (grünen) Intervall erkennt man ein Minus-Cosinus-Signal mit der Amplitude  $g_0$  und ein Minus-Sinus-Signal mit Amplitude  $g_0/3 \Rightarrow a_I = \underline{-1}$ ,  $a_Q = \underline{+1/3}$ . Wie in Aufgabe Z4.9, Teilaufgabe d) noch berechnet werden soll, ist der Betrag gleich 1.054 und der Phasenwinkel etwa  $161^\circ$ .

e) Das violette Signal unterscheidet sich vom grünen Intervall nicht in der Inphasekomponente, sondern nur im Vorzeichen der Quadraturkomponente  $\Rightarrow a_I = \underline{-1}$ ,  $a_Q = \underline{-1/3}$ .

f) Die maximale Signalenergie tritt auf, wenn einer der vier äußeren Eckpunkte belegt ist. Dann gilt:

$$E_{S, \max} = \frac{1}{2} \cdot s_0^2 \cdot T = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot g_0)^2 \cdot T = g_0^2 \cdot T = (1 \text{ V})^2 \cdot (1 \mu\text{s}) = \underline{10^{-6} \text{ V}^2\text{s}}.$$

Die mittlere Signalenergie ist gleich dem Maximalwert, wenn nur die Eckpunkte der Signalraumzuordnung belegt sind und „innere Symbole“ von der Codierung ausgeschlossen werden.

g) Pro Symbol werden vier Bit übertragen. Daraus folgt:

$$E_{B, \max} = \frac{E_{S, \max}}{4} = \underline{0.25 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2\text{s}}.$$

h) Die minimale Signalenergie ergibt sich bei einem der inneren Signalraumpunkte und ist gegenüber der letzten Teilaufgabe um den Faktor 9 kleiner:

$$E_{B, \min} = \frac{E_{B, \max}}{9} = \frac{g_0^2 \cdot T}{36} \approx \underline{0.28 \cdot 10^{-7} \text{ V}^2\text{s}}.$$

Im Theorieteil wird gezeigt, dass bei der 16-QAM die mittlere Signalenergie  $E_B$  pro Bit unter der Voraussetzung, dass alle Symbole gleichwahrscheinlich sind, etwa  $0.139 \cdot g_0^2 T$  ist.

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.9

a) Durch ein Symbol werden jeweils  $\log_2 16 = 4$  Bit des Quellensignals dargestellt, zwei durch den vierstufigen Koeffizienten  $a_1$  und zwei weitere durch  $a_Q$ . Die Bitdauer beträgt somit  $T_B = T/4 = 0.25 \mu\text{s}$ . Damit ist die Bitrate  $R_B = 1/T_B \equiv 4 \text{ Mbit/s}$ .

b) Aus der Geometrie folgt für  $a = 1 + j$ :

$$|a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \equiv 1.414, \quad \arg a = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) \equiv 45^\circ.$$

c) Der Winkel ergibt sich wie bei der Aufgabe b), der Betrag ist um den Faktor 3 kleiner:  $|a| \equiv 0.471$ .

d) Für den komplexen Amplitudenkoeffizienten  $a = -1 + j/3$  erhält man aus der Geometrie:

$$|a| = \sqrt{1^2 + (1/3)^2} \equiv 1.054,$$
$$\arg a = 180^\circ - \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 180^\circ - 18.43^\circ \equiv 161.57^\circ.$$

e) Das violette Symbol hat den gleichen Betrag 1.054 wie das grüne Symbol nach Teilaufgabe c), während der Phasenwinkel das Vorzeichen ändert:  $\arg a \equiv -161.57^\circ$ .

f) Für den Betrag sind  $N_{|a|} \equiv 3$  verschiedene Ergebnisse möglich: 1.414, 1.054 und 0.471. Dagegen gibt es  $N_{\arg} \equiv 12$  mögliche Phasenlagen:

$$\pm \arctan(1/3) = \pm 18.43^\circ, \quad \pm \arctan(1) = \pm 45^\circ, \quad \pm \arctan(3) = \pm 71.57^\circ,$$
$$\pm(180^\circ - 71.57^\circ) = \pm 108.43^\circ, \quad \pm(180^\circ - 45^\circ) = \pm 135^\circ, \quad \pm 161.57^\circ.$$

## Musterlösung zur Aufgabe A4.10

**a)** Die Leistung des BPSK-Sendesignals ist gleich dem Integral über das Leistungsdichtespektrum. Integriert man über das äquivalente Tiefpass-LDS, so ist noch der Faktor 1/2 zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{BPSK}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(f) \, df = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{s,\text{TP}}(f) \, df = \frac{A}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2(\pi f T_B) \, df = \\
 &= \frac{A}{2T_B} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2(\pi x) \, dx = \frac{A}{2T_B} \\
 A &= 4 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}, \quad T_B = 10^{-6} \text{ s} \quad \Rightarrow \quad P_{\text{BPSK}} = 2 \text{ V}^2(= s_0^2/2).
 \end{aligned}$$

Die Energie pro Bit ist dementsprechend

$$E_B = P_{\text{BPSK}} \cdot T_B = \underline{2 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}}.$$

Hierbei ist wieder der Bezugswiderstand  $1 \Omega$  zugrunde gelegt.

**b)** Aufgrund der doppelten Symboldauer der 4-QAM ( $T = 2 \cdot T_B$ ) ist die Spektralfunktion gegenüber der BPSK nur halb so breit, aber doppelt so hoch, und anstelle von  $s_0$  ist nun der kleinere Wert  $g_0$  zu berücksichtigen. Der LDS-Wert bei der Frequenz  $f = 0$  lautet damit:

$$\Phi_{s,\text{cos,TP}}(f = 0) = \left( s_0/\sqrt{2} \right)^2 \cdot 2 \cdot T_B = s_0^2 \cdot T_B = A.$$

Es ergibt sich somit genau der gleiche Wert

$$A = \Phi_{s,\text{cos,TP}}(f = 0) = \underline{4 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}}$$

wie bei der BPSK.

**c)** Das zweite Teilsignal  $s_{\text{sin}}(t)$  liefert den genau gleichen Beitrag  $A$  wie das gerade betrachtete Signal  $s_{\text{cos}}(t)$ . Aufgrund der Orthogonalität zwischen der Cosinus- und der Minus-Sinusfunktion können die Leistungen addiert werden und man erhält:

$$B = \Phi_{s,\text{TP}}(f = 0) = 2 \cdot A = \underline{8 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}}.$$

**d)** Analog zur Teilaufgabe a) erhält man für die Energie pro Bit:

$$\begin{aligned}
 E_B &= \frac{1}{2} \cdot T_B \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{s,\text{TP}}(f) \, df = \frac{B \cdot T_B}{2T} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \text{si}^2(\pi f T_B) \, df = \\
 &= \frac{B \cdot T_B}{2T} = \frac{8 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz} \cdot 1 \mu\text{s}}{2 \cdot 2 \mu\text{s}} = \underline{2 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}}.
 \end{aligned}$$

Man erkennt, dass bei den hier getroffenen Voraussetzungen die „Energie pro Bit“ bei der BPSK und der 4-QAM übereinstimmen.

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.10

a) Mit den vorgegebenen Werten erhält man für die BPSK:

$$E_B = \frac{1}{2} \cdot s_0^2 \cdot T_B = \frac{1}{2} \cdot (2 \text{ V})^2 \cdot 1 \mu\text{s} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2\text{s}$$
$$\Rightarrow \frac{E_B}{N_0} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2\text{s}}{0.25 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}} = 8$$
$$\Rightarrow p_B = Q(\sqrt{16}) = Q(4) = 1/2 \cdot \text{erfc}(\sqrt{8}).$$

Aufgrund der gegebenen  $x$ -Werte in der Tabelle ist bei dieser Teilaufgabe zweckmäßigerweise die erste Gleichung anzuwenden:

$$p_B = Q(4) \approx \underline{0.317 \cdot 10^{-4}}.$$

b) Bei doppelter Bitdauer ist auch die Energie doppelt so groß:  $E_B = 4 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2\text{s} \Rightarrow E_B/N_0 = 16$ .  
Daraus folgt:

$$p_B = Q(\sqrt{32}) = 1/2 \cdot \text{erfc}(\sqrt{16}) = 1/2 \cdot \text{erfc}(4) \approx \underline{0.771 \cdot 10^{-8}}.$$

Aus pragmatischen Gründen wurde hier die letzte Spalte der Tabelle benutzt.

c) Setzt man die für die 4-QAM gegebenen Gleichungen ineinander ein, so kommt man zum gleichen Ergebnis wie bei der BPSK:

$$p_{B, 4\text{-QAM}} = Q(\sqrt{2 \cdot E_B/N_0}) = \frac{1}{2} \cdot \text{erfc}(\sqrt{E_B/N_0}).$$

Da sich auch die Energie pro Bit gegenüber der Teilaufgabe b) nicht geändert hat, wird sich auch die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit einstellen:

$$p_B = Q(\sqrt{32}) = 1/2 \cdot \text{erfc}(4) \approx \underline{0.771 \cdot 10^{-8}}.$$

d) Richtig ist nur der erste Lösungsvorschlag. Die Fehlerwahrscheinlichkeit ist natürlich in den beiden Zweigen gleich groß. Warum auch nicht? Das würde allerdings bei einem Phasenversatz zwischen Sender und Empfänger nicht mehr gelten.

Der Abstand der Nutzabtastwerte von der Schwelle ist hier allerdings  $g_0$  und damit um den Faktor „Wurzel aus 2“ kleiner als die Hüllkurve  $s_0$  der gesamten 4-QAM. Betrachtet man den I-Zweig als eine eigenständige BPSK, so ist aber auch die Rauschleistung wegen der geringeren Symbolrate nur halb so groß wie bei der BPSK.

## Musterlösung zur Aufgabe A4.11

a) Setzt man in die gegebene Gleichung  $r = 0$  ein, so verschwinden im Zähler und Nenner die jeweils ersten Terme und man erhält:

$$g_s(t) = g_0 \cdot \frac{\sin(\pi \cdot t/T)}{\pi \cdot t/T} = g_0 \cdot \text{si}(\pi \cdot t/T).$$

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist der si-Impuls gleich  $\underline{1}$  (mal  $g_0$ ):

$$g_s(t) \equiv \underline{1.0} \cdot g_0.$$

b) Für  $r = 1$  lässt sich die angegebene Gleichung wie folgt vereinfachen:

$$g_s(t) = \frac{4 \cdot g_0}{\pi} \cdot \frac{\cos(2\pi \cdot t/T)}{[1 - (4t/T)^2]} \Rightarrow g_s(t=0) = \frac{4 \cdot g_0}{\pi} \equiv \underline{1.273} \cdot g_0.$$

c) Nulldurchgänge sind für  $r = 1$  nur dann möglich, wenn die Cosinusfunktion im Zähler den Wert 0 liefert, also für alle ganzzahligen Werte von  $k$ :

$$2\pi \cdot t/T = \pi/2 + k \cdot \pi \Rightarrow t = \pm 0.25T, \pm 0.75T, \pm 1.25T, \dots$$

Richtig ist aber nur der letzte Lösungsvorschlag, da die Nullstellen bei  $\pm T/4$  durch die Nullstelle im Nenner aufgehoben wird. Die Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert  $g_s(t = \pm T/4) = g_0$ .

d) Mit  $r = 0.5$  und der Abkürzung  $x = t/T$  erhält man:

$$g_s(x) = \frac{g_0}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot x \cdot \cos(1.5\pi \cdot x) + \sin(0.5\pi \cdot x)}{(1 - 4 \cdot x^2) \cdot x}.$$

Für die Berechnung zum Zeitpunkt  $t = 0$  muss die Regel von **de l'Hospital** angewandt werden. Die Ableitungen von Zähler und Nenner ergeben:

$$\begin{aligned} Z'(x) &= 2 \cdot \cos(1.5\pi \cdot x) - 3\pi \cdot x \cdot \sin(1.5\pi \cdot x) + 0.5\pi \cdot \cos(0.5\pi \cdot x), \\ N'(x) &= (1 - 4 \cdot x^2) - 8 \cdot x^2. \end{aligned}$$

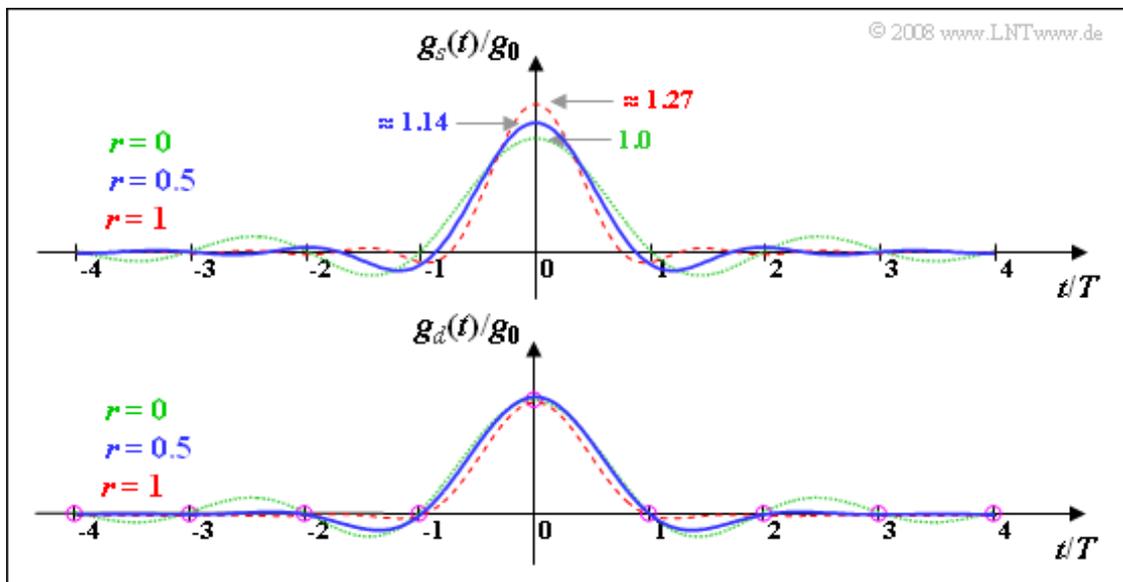
Die beiden Grenzübergänge für  $x \rightarrow 0$  liefern:

$$\lim_{x \rightarrow 0} Z'(x) = 2 + \pi/2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} N'(x) = 1.$$

Damit gilt für die Signalamplitude zum Zeitpunkt  $t = 0$ :

$$g_s(t=0) = \frac{g_0}{\pi} \cdot (2 + \pi/2) = g_0 \cdot (0.5 + 2/\pi) \equiv \underline{1.137} \cdot g_0.$$

Die Grafik verdeutlicht nochmals die hier berechneten Ergebnisse. Der Impuls  $g_d(t)$  ist ein Nyquistimpuls, das heißt, dass  $g_d(t)$  zumindest bei allen Vielfachen der Symboldauer  $T$  Nulldurchgänge besitzt (je nach Roloff-Faktor noch andere Nullstellen). Der Sendegrundimpuls  $g_s(t)$  erfüllt die Nyquistbedingung nicht. Außerdem erkennt man aus dieser Darstellung nochmals, dass für  $r \neq 0$  die Impulsamplitude  $g_s(t=0)$  stets größer als  $g_0$  ist.



e) Richtig ist nur der letzte Lösungsvorschlag. Der erste Lösungsvorschlag scheidet bereits nach den Ergebnissen der Teilaufgaben b) und d) aus. Die Gültigkeit der Schranken  $g_0$  und  $4g_0/\pi$  lässt sich wie folgt nachweisen:

- Die Impulsamplitude  $g_s(t=0)$  ist gleich der Fläche unter  $G_s(f)$ .
- Die kleinste Fläche ergibt sich für  $r = 0$ . Hier ist  $G_s(f) = g_0 \cdot T$  im Bereich  $|f| < \pm 1/(2T)$ . Die Fläche ist somit gleich  $g_0$ .
- Die größtmögliche Fläche ergibt sich für  $r = 1$ . Hier ist  $G_s(f)$  auf den Bereich  $\pm 1/T$  ausgedehnt und hat einen cosinusförmigen Verlauf. Das Ergebnis  $g_s(t=0) = 4g_0/\pi$  wurde bereits in Teilaufgabe c) berechnet. Es gilt aber auch:

$$\begin{aligned}
 g_s(t=0) &= 2 \cdot g_0 \cdot \int_0^{1/T} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot f \cdot T\right) df = \frac{4g_0}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = \\
 &= 4g_0/\pi \cdot [\sin(\pi/2) - \sin(0)] = 4g_0/\pi.
 \end{aligned}$$

f) Die Energie des Sendegrundimpulses  $g_s(t)$  kann nach dem Satz von Parseval sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich ermittelt werden:

$$E_{g_s} = \int_{-\infty}^{+\infty} [g_s(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G_s(f)|^2 df.$$

Aus den Gleichungen und der Grafik auf der Angabenseite erkennt man, dass  $|G_s(f)|^2$  formgleich mit  $G_d(f)$  ist, mit dem Unterschied, dass die Höhe  $(g_0 \cdot T)^2$  anstelle von  $g_0 \cdot T$  ist:

$$E_{g_s} = \int_{-\infty}^{+\infty} |G_s(f)|^2 df = \frac{g_0^2 \cdot T^2}{g_0 \cdot T} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G_d(f) df.$$

Aufgrund der Nyquistform von  $G_d(f)$  gilt aber unabhängig von  $r$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_d(f) df = g_0.$$

Damit ist die Impulsenergie unabhängig von  $r$ , also auch gültig für  $r = 0$  und  $r = 1$ :  $E_{g_s} \equiv \underline{1.0} \cdot g_0^2 \cdot T$ .

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.11

a) Aus der Angabe  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 9$  dB folgt:

$$E_B/N_0 = 10^{0.9} \approx 7.95.$$

Mit der angegebenen Näherung gilt weiter:

$$\begin{aligned} p_B &= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{E_B/N_0} \right) \approx \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot E_B/N_0}} \cdot e^{-E_B/N_0} = \\ &= 1/2 \cdot \sqrt{7.95 \cdot \pi} \cdot e^{-7.95} \approx \underline{0.35 \cdot 10^{-4}}. \end{aligned}$$

Der exakte Wert  $p_B = 0.33 \cdot 10^{-4}$  ist nur geringfügig kleiner.

b) Richtig ist der Lösungsvorschlag 1. Aufgrund eines Phasenversatzes um  $\Delta\phi_T = 30^\circ$  wurde das Phasendiagramm gedreht.

c) Insbesondere an den Kreuzen im Phasendiagramm (C), die den rauschfreien Fall markieren, erkennt man den Einfluss von Impulsinterferenzen. Anstelle des optimalen Empfangsfilters mit rechteckförmiger Impulsantwort wurde hier ein Gaußtieffpass mit der (normierten) Grenzfrequenz  $f_G \cdot T = 0.6$  verwendet, der Impulsinterferenzen bewirkt. Richtig ist hier der Lösungsvorschlag 2.

d) Die Systeme (B) und (C) sind nicht optimal. Daraus ist bereits ersichtlich, dass die Aussage 1 nicht zutrifft, sondern die Aussage 2. Jedes 4-QAM-System, das

- dem Matched-Filter-Prinzip folgt und
- zusätzlich die erste Nyquistbedingung erfüllt,

besitzt die vorne angegebene Fehlerwahrscheinlichkeit

$$p_B = Q \left( \sqrt{2 \cdot E_B/N_0} \right) = 1/2 \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{E_B/N_0} \right).$$

Die so genannte „Wurzel-Nyquist-Konfiguration“, die zum Beispiel in der Aufgabe A4.11 behandelt wurde, hat somit die genau gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit wie das System (A) und auch das gleiche Phasendiagramm zu den Detektionszeitpunkten. Die Übergänge zwischen den einzelnen Punkten sind jedoch unterschiedlich.

Auch die dritte Aussage ist zutreffend. Man erkennt bereits aus dem Phasendiagramm von System (B) Fehlentscheidungen und zwar immer dann, wenn Punkte farblich nicht zu den Quadranten passen. Die Ergebnisse einer Systemsimulation bestätigen diese Aussage:

- System (A):  $p_B \approx 0.33 \cdot 10^{-4}$  (siehe Teilaufgabe a),
- System (B):  $p_B \approx 0.35 \cdot 10^{-1}$ ,
- System (C):  $p_B \approx 0.24 \cdot 10^{-3}$ .

Die Fehlerwahrscheinlichkeiten von System (B) und System (C) werden im **Kapitel 1.5** des Buches „Digitalsignalübertragung“ hergeleitet.

## Musterlösung zur Aufgabe A4.12

a) Im mittleren Bereich ist eine niedrigere Frequenz als in den beiden äußeren Bereichen zu erkennen:

$$a_1 = +1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = +1.$$

b) Aus der Grafik erkennt man im ersten und im letzten Zeitintervall fünf Schwingungen und im zweiten Intervall drei Schwingungen:

$$f_{+1} = 5 \cdot 1/T, \quad f_{-1} = 3 \cdot 1/T.$$

Die Trägerfrequenz ist somit  $f_T = 4/T$  und der Frequenzhub  $\Delta f_A = 1/T$ .

c) In diesem Bereich gilt, wobei der erste Term das Empfangssignal  $r(t)$  beschreibt:

$$\begin{aligned} b_{+1}(t) &= s_0 \cdot \sin(2\pi \cdot 5/T \cdot t) \cdot 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 5/T \cdot t) = \\ &= s_0 \cdot [1 - \cos(2\pi \cdot 10/T \cdot t)]. \end{aligned}$$

Richtig sind demnach die beiden letzten Lösungsvorschläge.

d) Für das untere Signal  $b_{-1}(t)$  gilt im gleichen Zeitintervall:

$$\begin{aligned} b_{-1}(t) &= s_0 \cdot \sin(2\pi \cdot 5/T \cdot t) \cdot 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 3/T \cdot t) = \\ &= s_0 \cdot [\cos(2\pi \cdot 2/T \cdot t) - \cos(2\pi \cdot 8/T \cdot t)]. \end{aligned}$$

Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1 und 4.

e) Für den ersten Entscheidungswert gilt mit  $b(t) = b_{+1}(t) - b_{-1}(t)$ :

$$E_1 = \frac{1}{s_0 \cdot T} \cdot \int_{T/2}^{3T/2} b_{+1}(t) dt - \frac{1}{s_0 \cdot T} \cdot \int_{T/2}^{3T/2} b_{-1}(t) dt.$$

Aus dem Ergebnis der Teilaufgabe d) erkennt man, dass das zweite Integral 0 ergibt (Integration über Vielfache der Periodendauer von Sinusfunktionen). Das erste Integral ist gleich  $s_0 \cdot T$ . Daraus folgt für den Entscheidungswert im ersten Zeitintervall:  $E_1 = +1$ . Ebenso ist  $E_3 = +1$ . Dagegen ist bei der Berechnung von  $E_2$  das erste Integral 0 und das zweite hat den Wert  $s_0 \cdot T$ . Somit erhält man hierfür den Wert  $E_2 = -1$ .

## Musterlösung zur Aufgabe A4.13

a) Richtig sind die Lösungsvorschläge 2 und 3. Beispielsweise gilt im Bereich  $0 \leq t \leq T$ :

$$|s_{\text{TP}}(t)| = \sqrt{a_0^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{2 \cdot T}\right) + a_1^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{2 \cdot T}\right)} = 1.$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass  $a_0^2 = a_1^2 = 1$  ist. Dieses Ergebnis gilt für jedes Wertepaar  $a_0 \in \{+1, -1\}$  und  $a_1 \in \{+1, -1\}$ .

b) Mit der angegebenen Gleichung gilt:

$$\phi(t) = \arctan \frac{s_Q(t)}{s_I(t)} = \arctan \frac{a_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2 \cdot T}\right)}{a_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{2 \cdot T}\right)} = \arctan \left[ \frac{a_1}{a_0} \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot t}{2 \cdot T}\right) \right].$$

Der Quotient  $a_1/a_0$  ist  $\pm 1$ . Damit kann dieser Quotient vorgezogen werden und man erhält:

$$\phi(t) = \frac{a_1}{a_0} \cdot \arctan \left[ \tan\left(\frac{\pi \cdot t}{2 \cdot T}\right) \right] = \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{\pi \cdot t}{2 \cdot T}.$$

Durch die Anfangsphase  $\phi_0 = 0$  können Mehrdeutigkeiten ausgeschlossen werden. Insbesondere gilt mit  $a_0 = a_1 = +1$ :

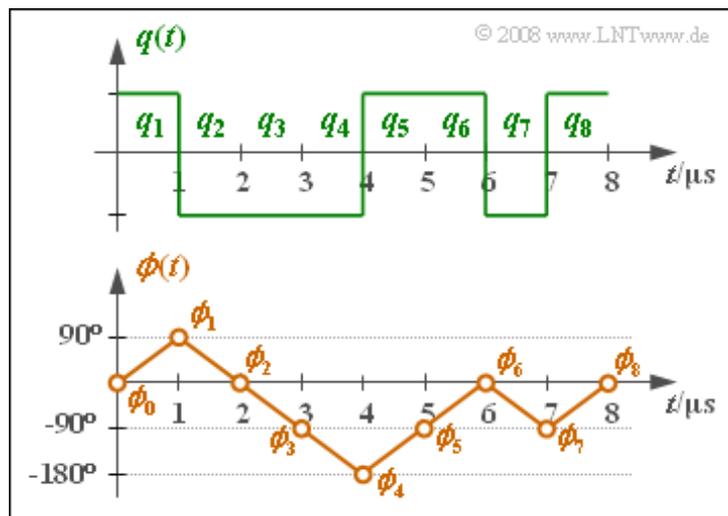
$$\phi(t = T/2 = 0.5 \mu\text{s}) = \pi/4 \equiv 45^\circ, \quad \phi(t = T = 1 \mu\text{s}) = \pi/2 \equiv 90^\circ.$$

c) Am einfachsten löst man diese Aufgabe unter Zuhilfenahme des Einheitskreises:

$$\begin{aligned} \text{Re} = s_I(2T) = +1, \quad \text{Im} = s_Q(2T) = 0 &\Rightarrow \phi(t = 2T = 2 \mu\text{s}) \equiv 0^\circ, \\ \text{Re} = s_I(3T) = 0, \quad \text{Im} = s_Q(3T) = -1 &\Rightarrow \phi(t = 3T = 3 \mu\text{s}) \equiv -90^\circ, \\ \text{Re} = s_I(4T) = -1, \quad \text{Im} = s_Q(4T) = 0 &\Rightarrow \phi(t = 4T = 4 \mu\text{s}) \equiv 180^\circ. \end{aligned}$$

d) Die Grafik zeigt die MSK-Phase  $\phi(t)$  zusammen mit dem Quellsignal  $q(t)$ . Man erkennt:

- Ist das Symbol gleich +1, so steigt die Phase innerhalb der Symboldauer  $T$  linear um  $90^\circ$  ( $\pi/2$ ) an.
- Ist das Quellsymbol gleich -1, so fällt die Phase linear um  $90^\circ$ .



Die weiteren Phasenwerte sind somit:

$$\phi(5T) = \phi(7T) \equiv -90^\circ, \quad \phi(t = 6T) = \phi(t = 8T) \equiv 0^\circ.$$

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.13

a) Aus der oberen Skizze kann man  $T_B = \underline{1 \mu s}$  ablesen.

b) Bei QPSK bzw. Offset-QPSK ist aufgrund der Seriell-Parallel-Wandlung die Symboldauer  $T$  doppelt so groß wie die Bitdauer:

$$T = 2 \cdot T_B = \underline{2 \mu s}.$$

c) Entsprechend der aus der Skizze für die ersten Bit erkennbaren Zuordnung gilt:

$$\begin{aligned} a_{I3} = q_5 &= \underline{+1}, & a_{Q3} = q_6 &= \underline{+1}, \\ a_{I4} = q_7 &= \underline{-1}, & a_{Q4} = q_8 &= \underline{+1}. \end{aligned}$$

d) Bei der MSK ist die Symboldauer  $T$  gleich der Bitdauer:

$$T = T_B = \underline{1 \mu s}.$$

e) Entsprechend der angegebenen Umcodiervorschrift gilt mit  $a_4 = -1$ :

$$\begin{aligned} q_5 = +1 &\Rightarrow a_5 = a_4 \cdot q_5 = \underline{-1}, \\ q_6 = +1 &\Rightarrow a_6 = -a_5 \cdot q_6 = \underline{+1}, \\ q_7 = -1 &\Rightarrow a_7 = a_6 \cdot q_7 = \underline{-1}, \\ q_8 = +1 &\Rightarrow a_8 = -a_7 \cdot q_8 = \underline{+1}. \end{aligned}$$

## Musterlösung zur Aufgabe A4.14

a) Aus der angegebenen Gleichung und der Grafik erkennt man, dass bei BPSK die erste Nullstelle des Leistungsdichtespektrums bei  $f_1 = 1/T_B$  liegt.

b) Aufgrund der niedrigeren Symbolrate  $1/T$  ist bei QPSK (und bei allen verwandten quaternären Modulationsverfahren) das Spektrum nur halb so breit wie bei der BPSK  $\Rightarrow f_1 = 0.5 \cdot 1/T_B$ .

c) Für das Leistungsdichtespektrum (LDS) des Gesamtsignals gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_{s,TP}(f) &= \Phi_{s,I,TP}(f) + \Phi_{s,Q,TP}(f) = \\ &= 2 \cdot \Phi_{s,I,TP}(f) = 1/T \cdot |G(f)|^2.\end{aligned}$$

Hierbei ist berücksichtigt,

- dass die Signale  $s_I(t)$  und  $s_Q(t)$  unkorreliert sind, so dass man die LDS-Anteile addieren kann,
- dass wegen der binären bipolaren Amplitudenkoeffizienten der Erwartungswert  $E[a_v^2]$  gleich 1 ist.

$$\Phi_{s,TP}(f) = \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot g_0^2 \cdot T^2 \cdot \frac{\cos^2(2\pi fT)}{[1 - (4fT)^2]^2}.$$

Mit  $s_0 = g_0$ ,  $T = T_B$  und  $E_B = s_0^2 \cdot T_B/2$  gilt weiter:

$$\begin{aligned}\Phi_{s,TP}(f) &= \frac{32}{\pi^2} \cdot E_B \cdot \frac{\cos^2(2\pi \cdot f \cdot T_B)}{[1 - (4 \cdot f \cdot T_B)^2]^2} \\ \Rightarrow \Phi_{s,TP}(f = 0) &= \frac{32}{\pi^2} \cdot E_B \approx \underline{\underline{3.243 \cdot E_B}}.\end{aligned}$$

d) Bereits aus der Grafik erkennt man, dass die erste Aussage falsch und die zweite richtig ist. Der Lösungsvorschlag 3 stimmt ebenfalls nicht. Das Integral über die Leistungsdichtespektren ergibt die Leistung ( $E_B/T_B$ ). Die Signalverläufe von BPSK, QPSK und MSK machen deutlich, dass die Leistung bei konstanter Hüllkurve ( $s_0$ ) für alle betrachteten Modulationsverfahren gleich ist.

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.14

a) Die Periodendauer des Cosinussignals muss  $T_0 = 4T$  sein. Damit ist die Frequenz  $f_0 = 0.25 \cdot 1/T$ .

b) Die Spektralfunktion eines Rechteckimpulses der Höhe  $g_0$  und der Dauer  $2T$  lautet:

$$R(f) = g_0 \cdot 2T \cdot \text{si}(\pi f \cdot 2T) \quad \text{mit } \text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad R(f=0) = 2 \cdot g_0 \cdot T.$$

c) Aus  $g(t) = c(t) \cdot r(t)$  folgt nach dem Faltungssatz:

$$G(f) = C(f) \star R(f).$$

$C(f)$  besteht aus zwei Diracfunktionen bei  $\pm f_0$ , jeweils mit dem Gewicht  $1/2$ . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} G(f) &= 2 \cdot g_0 \cdot T \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f + f_0) \right] \star \text{si}(2\pi f T) = \\ &= g_0 \cdot T \cdot [\text{si}(2\pi T \cdot (f - f_0)) + \text{si}(2\pi T \cdot (f + f_0))] . \end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis  $f_0 = 1/(4T)$  aus a) gilt weiter:

$$\begin{aligned} G(f) &= g_0 \cdot T \cdot [\text{si}(2\pi f T - \pi/2) + \text{si}(2\pi f T + \pi/2)] \\ \Rightarrow G(f=0) &= g_0 \cdot T \cdot \left[ \text{si}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \text{si}\left(+\frac{\pi}{2}\right) \right] = 2 \cdot g_0 \cdot T \cdot \text{si}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 2 \cdot g_0 \cdot T \cdot \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = 4/\pi \cdot g_0 \cdot T \approx 1.273 \cdot g_0 \cdot T . \end{aligned}$$

d) Schreibt man die si-Funktion aus, so erhält man mit  $\sin(\alpha \pm \pi/2) = \pm \cos(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} G(f) &= g_0 \cdot T \cdot \left[ \frac{\sin(2\pi f T - \pi/2)}{2\pi f T - \pi/2} + \frac{\sin(2\pi f T + \pi/2)}{2\pi f T + \pi/2} \right] = \\ &= g_0 \cdot T \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{-\cos(2\pi f T)}{4fT - 1} + \frac{\cos(2\pi f T)}{4fT + 1} \right] = \\ &= g_0 \cdot T \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(1 + 4fT) \cdot \cos(2\pi f T) + (1 - 4fT) \cdot \cos(2\pi f T)}{1 - (4fT)^2} = \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot g_0 \cdot T \cdot \frac{\cos(2\pi f T)}{1 - (4fT)^2} . \end{aligned}$$

Die Nullstellen von  $G(f)$  werden allein durch die Cosinusfunktion im Zähler bestimmt und würden bei den Frequenzen  $f \cdot T = 0.25, 0.75, 1.25, \dots$  liegen. Allerdings wird die erste Nullstelle bei  $f \cdot T = 0.25$  durch die gleichzeitige Nullstelle des Nenners aufgehoben. Deshalb gilt:

$$f_1 = 0.75 \cdot 1/T.$$

## Musterlösung zur Aufgabe A4.15

a) Ein Vergleich der beiden ersten Gleichungen auf der Angabenseite macht deutlich, dass bei der MSK mit kohärenter Demodulation das AWGN-Verhältnis  $E_B/N_0$  verdoppelt werden muss, damit die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit wie bei BPSK erreicht wird. In anderen Worten: Die kohärente BFSK-Kurve liegt um  $10 \cdot \lg(2) \approx 3$  dB rechts von der BPSK-Kurve. Um  $p_B \leq 10^{-5}$  zu garantieren, muss gelten:

$$10 \cdot \lg E_B/N_0 = 9.6 \text{ dB} + 3 \text{ dB} = \underline{12.6 \text{ dB}}.$$

b) Die angegebene Gleichung gilt nicht nur für die MSK (diese ist eine FSK mit  $\eta = 0.5$ ), sondern für jede Form von orthogonaler FSK. Eine solche liegt vor, wenn der Modulationsindex  $\eta$  ein ganzzahliges Vielfaches von 0.5 ist, zum Beispiel für  $\eta = 1$ . Mit  $\eta = 0.7$  ergibt sich keine orthogonale FSK. Es kann gezeigt werden, dass sich für  $\eta = 0.7$  sogar eine kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit als bei orthogonaler FSK ergibt. Mit  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 12.6$  dB erreicht man hier sogar  $p_B \approx 10^{-6}$ , also eine Verbesserung um eine Zehnerpotenz. Richtig ist demzufolge der Lösungsvorschlag 2.

c) Aus der Umkehrfunktion der angegebenen Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{E_B}{2 \cdot N_0} &= \ln \frac{1}{2p_B} = \ln(50000) \approx 10.82 \\ \Rightarrow E_B/N_0 &= 21.64 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot \lg E_B/N_0 \approx \underline{13.4 \text{ dB}}. \end{aligned}$$

d) Aus  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 12.6$  dB folgt:

$$E_B/N_0 = 10^{1.26} \approx 16.8 \quad \Rightarrow \quad (E_B/N_0)/2 \approx 8.4 \quad \Rightarrow \quad p_B = 1/2 \cdot e^{-8.4} \approx \underline{1.12 \cdot 10^{-4}}.$$

Das heißt: Bei gleichem  $E_B/N_0$  wird die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der inkohärenten Demodulation gegenüber kohärenter Demodulation (siehe Teilaufgabe a) um etwa den Faktor 11 vergrößert.