

Überblick zu Kapitel 3 des Buches „Modulationsverfahren“

Das dritte Kapitel beschreibt die *Winkelmodulation* – dieser Name steht als Oberbegriff für Phasen- und Frequenzmodulation – sowie die zugehörigen Demodulatoren. Im Einzelnen werden behandelt:

- die *Gemeinsamkeiten* und *Unterschiede* zwischen Phasen- und Frequenzmodulation,
- die *Signalverläufe* (PM und FM) bei rechteck- sowie cosinusförmigem Quellensignal,
- die *Spektralfunktion* eines winkelmodulierten Signals und Einfluss einer Bandbegrenzung,
- mögliche *Realisierungsformen* für den FM-Modulator und -Demodulator,
- das gegenüber der AM günstigere *Signal-zu-Rausch-Leistungsverhältnis* der FM.

Literatur: [Joh92] – [Kam04] – [KöZ08] – [Lin05] – [Mäu85] – [Mäu88] – [Mül79] – [Pro01] – [Söd05]

Die theoretischen Grundlagen werden auf 26 Bildschirmseiten mit Gleichungen, Beispielen und 40 Grafiken verdeutlicht. Außerdem beinhaltet das Kapitel zehn Aufgaben und sechs Zusatzaufgaben mit insgesamt 86 Teilaufgaben, sowie fünf Interaktionsmodule (IM) und sieben Lernvideos (LV).

Verfügbare **Interaktionsmodule** zu Kapitel 3 des Buches „Modulationsverfahren“:

- **Besselfunktionen erster Art und n -ter Ordnung** (IM, Kap. 3.1)
- **Einfluss einer Bandbegrenzung bei Sprache und Musik** (IM, Grundlagen)
- **Lineare Verzerrungen bei periodischen Signalen** (IM, Grundlagen)
- **Ortskurve – Darstellung des äquivalenten TP-Signals** (IM, Grundlagen)
- **Zeigerdiagramm – Darstellung des analytischen Signals** (IM, Grundlagen)

Verfügbare **Lernvideos** zu Kapitel 3 des Buches „Modulationsverfahren“:

- **Winkelmodulation – FM und PM** (LV, Kap. 3.1, 3.2, 2-teilig, Dauer 6:04 – 8:56)
- **Rauscheinfluss bei AM und WM** (LV, Kap. 3.3, 2-teilig, Dauer 8:32 – 7:05)
- **Eigenschaften des Übertragungskanal** (LV, Grundlagen, Dauer 5:50)
- **Eigenschaften von TP- und BP-Signalen** (LV, Grundlagen, Dauer 5:16)
- **Gesetze der Fouriertransformation** (LV, Grundlagen, 2-teilig, Dauer 5:57 – 5:55)
- **Harmonische Schwingungen** (LV, Grundlagen, 2-teilig, Dauer 4:33 – 6:15)
- **Lineare und nichtlineare Verzerrungen** (LV, Grundlagen, 3teilig, Gesamtdauer 16:25)

Weitere Informationen zum Thema, Aufgaben sowie ein Simulationsprogramm finden Sie im Versuch „Analoge Modulationsverfahren“ des Praktikums *Simulation digitaler Übertragungssysteme* von Prof. Günter Söder (Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der TU München).

Herunterladen des Windows-Programms „AMV“ (Zip-Version)

Herunterladen der dazugehörigen Texte (PDF-Datei)

Gemeinsamkeiten zwischen Phasen- und Frequenzmodulation (1)

Schon im **Kapitel 1.3** wurde darauf hingewiesen, dass es zwischen der Phasenmodulation (PM) und der Frequenzmodulation (FM) – siehe **Kapitel 3.2** – substantielle Gemeinsamkeiten gibt. Man fasst deshalb diese beiden verwandten Modulationsverfahren unter dem Oberbegriff „Winkelmodulation“ zusammen.

Definition: Eine **Winkelmodulation** – abgekürzt WM – liegt dann vor, wenn sich das modulierte Signal wie folgt darstellen lässt:

$$s(t) = A_T \cdot \cos(\psi(t)) = A_T \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \phi(t)).$$

Hierbei bezeichnet A_T wie bei der Amplitudenmodulation die Amplitude des Trägersignals $z(t)$. Die gesamte Information über das Quellensignal $q(t)$ steckt nun aber in der **Winkelfunktion** $\psi(t)$.

Anhand der Ortskurve – der Darstellung des äquivalenten TP-Signals $s_{TP}(t)$ in der komplexen Ebene – sind folgende Charakteristika der Winkelmodulation zu erkennen (siehe Grafik am Seitenende):

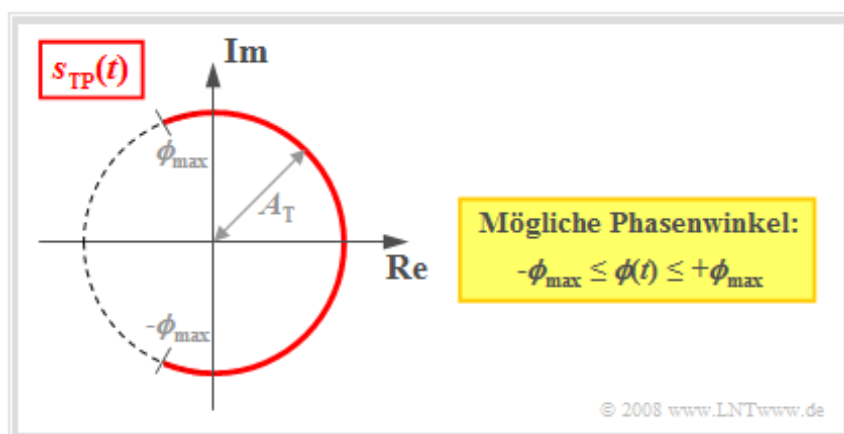
- Die Ortskurve ist ein **Kreisbogen** mit dem Radius A_T . Daraus folgt, dass die Hüllkurve eines winkelmodulierten Signals stets konstant ist:

$$a(t) = |s_{TP}(t)| = A_T = \text{const.}$$

- Das äquivalente TP-Signal ist bei Winkelmodulation immer komplex und durch eine zeitabhängige **Phasenfunktion** $\phi(t)$ (in Radian) festgelegt, welche die Nulldurchgänge von $s(t)$ bestimmt:

$$s_{TP}(t) = A_T \cdot e^{j \cdot \phi(t)}.$$

- Bei symmetrischem Quellensignal $q(t)$ kann $\phi(t)$ alle Werte zwischen $\pm\phi_{\max}$ annehmen, wobei ϕ_{\max} den **Phasenhub** angibt. Je größer der Phasenhub ist, desto intensiver ist die Modulation.
- Bei einer harmonischen Schwingung ist der Phasenhub ϕ_{\max} gleich dem **Modulationsindex** η . Die Verwendung von η zeigt im Folgenden also an, dass $q(t)$ nur eine einzige Frequenz beinhaltet.
- Der Zusammenhang zwischen Quellensignal $q(t)$ und Winkelfunktion $\psi(t) = \cos(\omega_T \cdot t + \phi(t))$ bzw. der daraus ableitbaren Phasenfunktion $\phi(t)$ unterscheidet sich bei der Phasen- und der Frequenzmodulation grundsätzlich, worauf im Kapitel 3.2 noch ausführlich eingegangen wird.

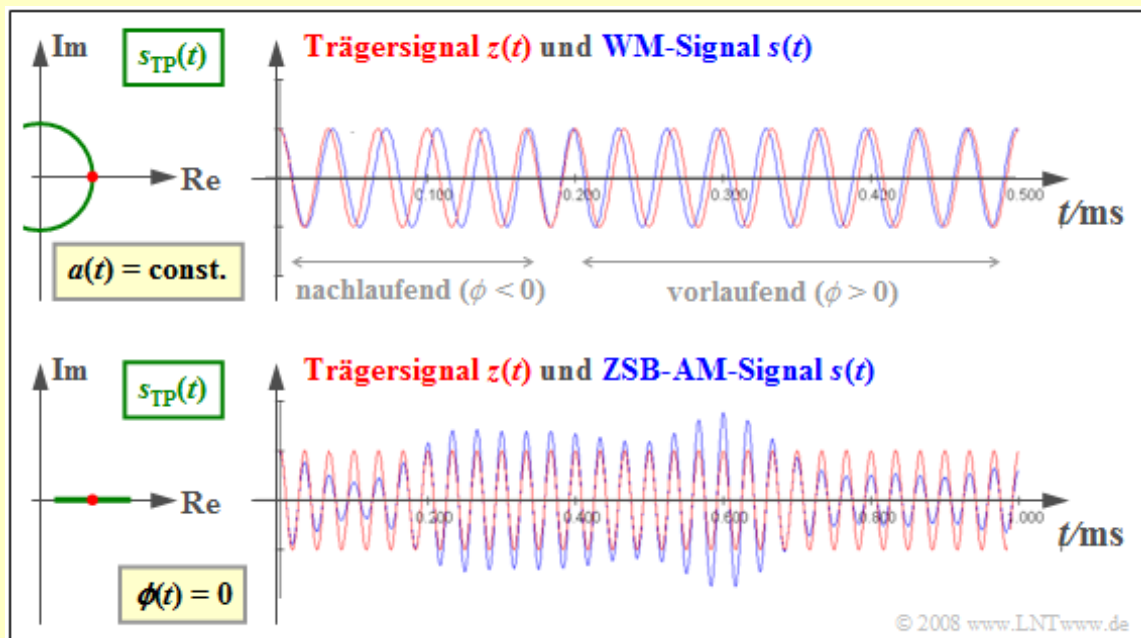


Gemeinsamkeiten zwischen Phasen- und Frequenzmodulation (2)

Beispiel: Die folgende Grafik zeigt jeweils rechts das Sendesignal $s(t) \Rightarrow$ **blaue Signalverläufe** im Vergleich zum Trägersignal $z(t) \Rightarrow$ **rote Schwingungen** sowie links das äquivalente Tiefpass-Signal $s_{TP}(t)$ in der komplexen Ebene. Diese Darstellung in der komplexen Ebene bezeichnen wir auch als die „Ortskurve“ \Rightarrow **grüne Kurvenverläufe**.

Die obere Skizze gilt für die Winkelmodulation. In diesem Fall beschreibt das äquivalente TP-Signal $s_{TP}(t) = A_T \cdot e^{j\phi(t)}$ einen Kreisbogen, und es ergibt sich eine konstante Einhüllende $a(t) = A_T$.

- Die Information über das Quellsignal $q(t)$ steckt bei der Winkelmodulation ausschließlich in der Lage der Nulldurchgänge von $s(t)$.
- Gilt momentan $\phi(t) < 0$, so treten die Nulldurchgänge von $s(t)$ später auf als diejenigen von $z(t)$. Andernfalls – bei $\phi(t) > 0$ – sind die Nulldurchgänge von $s(t)$ gegenüber $z(t)$ vorlaufend.



Die untere Skizze gilt für die im zweiten Kapitel ausführlich behandelte ZSB-Amplitudenmodulation, gekennzeichnet durch

- die zeitabhängige Hüllkurve $a(t)$ entsprechend dem Quellsignal $q(t)$,
- äquidistante Nulldurchgänge von $s(t)$ gemäß dem Trägersignal $z(t)$, und
- eine horizontale Gerade als Ortskurve $s_{TP}(t)$.

Das Kapitel 3 wurde nach folgenden Gesichtspunkten gegliedert:

- Ein jedes FM-System kann durch einfache Modifikationen in ein entsprechendes PM-System übergeführt werden und umgekehrt.
- Größere Bedeutung bei Analogsystemen hat die FM aufgrund des günstigeren Rauschverhaltens. Deshalb werden Realisierungsaspekte für Modulator/Demodulator erst im **Kapitel 3.2** behandelt.
- Die Phasenmodulation ist gegenüber der FM leichter zu verstehen. Deshalb werden zunächst die grundlegenden Eigenschaften eines Winkelmodulationssystems am Beispiel der PM dargelegt.

Signalverläufe bei Phasenmodulation (1)

Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit wird im Folgenden stets vorausgesetzt:

- ein cosinusförmiges Trägersignal $z(t) = A_T \cdot \cos(\omega_T \cdot t)$, das heißt die Trägerphase $\phi_T = 0$,
- ein spitzenwertbegrenzttes Quellensignal in den Grenzen $-q_{\max} \leq q(t) \leq +q_{\max}$.

Definition: Ist die Phasenfunktion $\phi(t)$ proportional dem anliegenden Quellensignal $q(t)$, so spricht man von einer **Phasenmodulation**, und es gilt:

$$\phi(t) = K_{\text{PM}} \cdot q(t) \Rightarrow \psi(t) = \omega_T \cdot t + \phi(t) \Rightarrow s(t) = A_T \cdot \cos(\psi(t)).$$

Hierbei bezeichnet K_{PM} die dimensionsbehaftete Modulatorkonstante. Beschreibt das Quellensignal $q(t)$ einen Spannungsverlauf, so besitzt diese Konstante die Einheit $1/V$.

Die Phasenmodulation ist um so intensiver,

- je größer die Modulatorkonstante K_{PM} ist, und
- je größer der Maximalwert q_{\max} des Quellensignals ist.

Quantitativ erfasst wird dieser Sachverhalt durch den **Phasenhub**

$$\phi_{\max} = K_{\text{PM}} \cdot q_{\max}.$$

Bei einer harmonischen Schwingung wird der Phasenhub auch als **Modulationsindex** bezeichnet und es gilt mit der Amplitude A_N des Quellensignals:

$$\eta = \eta_{\text{PM}} = K_{\text{PM}} \cdot A_N.$$

Zu dieser Gleichung ist Folgendes anzumerken:

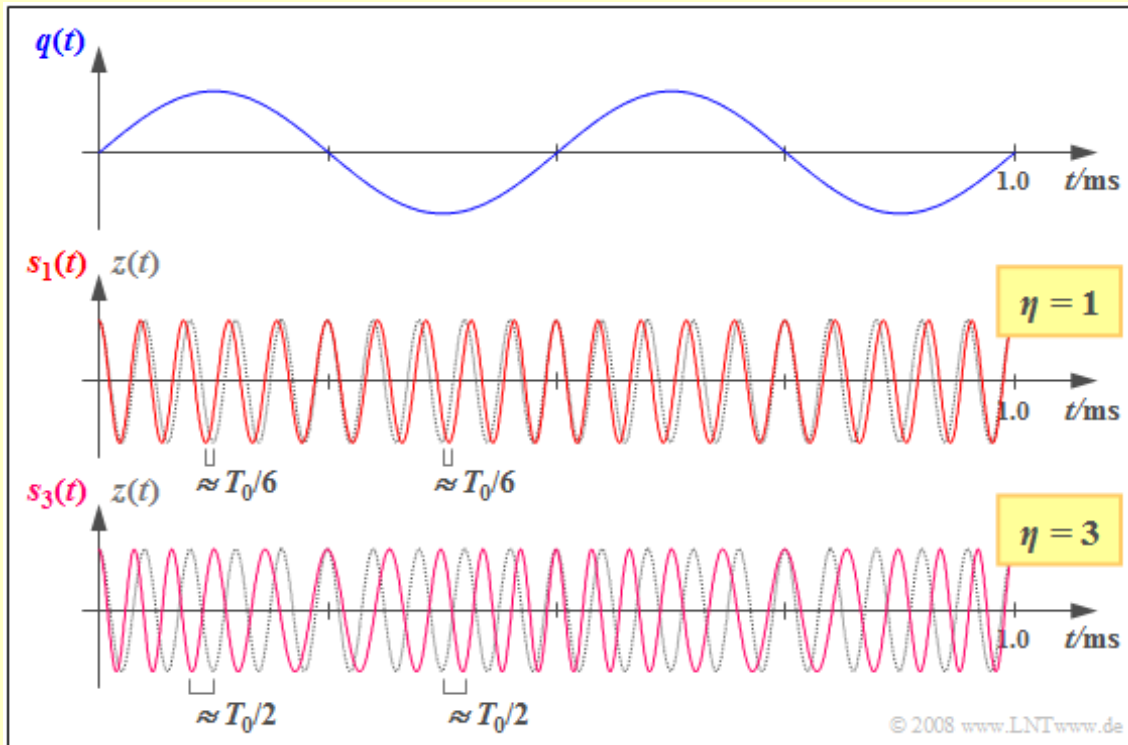
- Der Modulationsindex η ist vergleichbar mit dem **Modulationsgrad** m bei ZSB-AM.
- In der **Ortskurve** beschreiben ϕ_{\max} bzw. η den halben Winkel des Kreisbogens in „Radian“.
- Bei anderem Quellensignal mit gleichem η – zum Beispiel bei anderer Nachrichtenphase ϕ_N – ändert sich die Ortskurve nicht, lediglich die zeitliche Bewegung auf der Ortskurve.
- Der Modulationsindex wird auch zur Beschreibung der Frequenzmodulation herangezogen, doch ist er dann etwas unterschiedlich zu berechnen. Wir unterscheiden deshalb η_{PM} und η_{FM} .

Signalverläufe bei Phasenmodulation (2)

Beispiel: Die Grafik zeigt oben das sinusförmige Quellensignal $q(t)$ mit der Frequenz $f_N = 2$ kHz und der Amplitude A_N sowie zwei phasenmodulierte Signale (mit dem Parameter $\eta = 1$ bzw. $\eta = 3$):

$$s_\eta(t) = A_T \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \eta \cdot \sin(\omega_N \cdot t)) .$$

Grau gepunktet ist jeweils das cosinusförmige Trägersignal $z(t)$ eingezeichnet ($f_T = 20$ kHz).



Der Modulationsindex $\eta = 1$ und damit das Signal $s_1(t)$ ergibt sich z. B. mit $A_N = 1$ V und $K_{PM} = 1/V$, aber auch mit den Parameterwerten $A_N = 2$ V und $K_{PM} = 0.5/V$.

- Man erkennt, dass die Nulldurchgänge des Sendesignals $s_1(t)$ und des Trägersignals $z(t)$ genau dann übereinstimmen, wenn $q(t) \approx 0$ ist.
- Bei $q(t) = +A_N$ kommen die Nulldurchgänge von $s_1(t)$ um $1/(2\pi) \approx 0.159$ einer Trägerperiode T_0 früher („vorlaufend“), bei $q(t) = -A_N$ um den gleichen Bruchteil später („nachlaufend“).
- Erhöht man den Modulationsindex – entweder durch Verdreifachung von A_N oder von K_{PM} – auf $\eta = 3$, so ergibt sich qualitativ das gleiche Resultat, aber eine intensivere Phasenmodulation.
- Die Nulldurchgänge des Signals $s_3(t)$ sind gegenüber denen des Taktsignals nun um maximal $\pm 3/(2\pi) \approx \pm 0.5$ einer Trägerperiode verschoben, also bis zu $\pm T_0/2$.

Äquivalentes TP-Signal bei Phasenmodulation (1)

Als Vorbereitung zur Herleitung des Spektrums $S(f)$ eines phasenmodulierten Signals $s(t)$ wird zunächst das äquivalente TP-Signal $s_{TP}(t)$ analysiert. Dabei gehen wir von folgenden Voraussetzungen aus:

- ein sinusförmiges Quellensignal mit Amplitude A_N und Frequenz f_N ,
- ein cosinusförmiges Trägersignal mit Amplitude A_T und Frequenz f_T ,
- eine Phasenmodulation mit dem Modulationsindex $\eta = K_{PM} \cdot A_N$.

Damit lauten das phasenmodulierte Signal sowie das dazugehörige äquivalente Tiefpass-Signal:

$$s(t) = A_T \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \eta \cdot \sin(\omega_N \cdot t)) ,$$

$$s_{TP}(t) = A_T \cdot e^{j \cdot \eta \cdot \sin(\omega_N \cdot t)} .$$

Dieses Signal ist periodisch und kann somit durch eine **komplexe Fourierreihe** dargestellt werden. Damit erhält man allgemein:

$$s_{TP}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_N \cdot t} .$$

In dem hier betrachteten Sonderfall (sinusförmiges Quellensignal, cosinusförmiger Träger) sind die im Allgemeinen komplexen Fourierkoeffizienten D_n alle reell und wie folgt gegeben:

$$D_n = A_T \cdot J_n(\eta) . \quad \Rightarrow \quad \text{Herleitung dieser Gleichung (siehe nächste Seite)}$$

Hierbei bezeichnet $J_n(\eta)$ die **Besselfunktion erster Art und n -ter Ordnung**. Diese bereits 1844 von **Friedrich Wilhelm Bessel** 1844 eingeführten mathematischen Funktionen sind wie folgt definiert (erste Gleichung) und können gemäß der zweiten Gleichung durch eine Reihe angenähert werden:

$$J_n(\eta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} e^{j \cdot (\eta \cdot \sin(\alpha) - n \cdot \alpha)} d\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (\eta/2)^{n+2 \cdot k}}{k! \cdot (n+k)!} .$$

Die nebenstehende Grafik zeigt die jeweils ersten drei Summanden ($k = 0, 1, 2$) der Reihen $J_0(\eta)$, ... , $J_3(\eta)$. Der rot umrandete Term – gültig für $n = 3$ und $k = 2$ – lautet beispielsweise in ausgeschriebenener Form:

$$\frac{(-1)^2 \cdot (\eta/2)^{3+2 \cdot 2}}{2! \cdot (3+2)!} = \frac{1}{240} \cdot \left(\frac{\eta}{2}\right)^7 .$$

$J_0(\eta) =$	1	$-(\eta/2)^2$	$+\frac{1}{4}(\eta/2)^4$	- ...
$J_1(\eta) =$	$(\eta/2)$	$-\frac{1}{2}(\eta/2)^3$	$+\frac{1}{24}(\eta/2)^5$	- ...
$J_2(\eta) =$	$\frac{1}{2}(\eta/2)^2$	$-\frac{1}{6}(\eta/2)^4$	$+\frac{1}{48}(\eta/2)^6$	- ...
$J_3(\eta) =$	$\frac{1}{6}(\eta/2)^3$	$-\frac{1}{24}(\eta/2)^5$	$+\frac{1}{240}(\eta/2)^7$	- ...
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	

Die Besselfunktionen $J_n(\eta)$ findet man aber auch in Formelsammlungen. Oder hier: **Werte der Besselfunktion erster Art und n -ter Ordnung**

Sind die Funktionswerte für $n = 0$ und $n = 1$ bekannt, so können daraus die Besselfunktionen für $n \geq 2$ iterativ ermittelt werden:

$$J_n(\eta) = 2 \cdot (n-1)/\eta \cdot J_{n-1}(\eta) - J_{n-2}(\eta) .$$

Äquivalentes TP-Signal bei Phasenmodulation (2)

Nun soll mathematisch nachgewiesen werden, dass das äquivalente TP-Signal bei Phasenmodulation tatsächlich in die folgende Funktionsreihe umgewandelt werden kann:

$$s_{\text{TP}}(t) = A_T \cdot e^{j \cdot \eta \cdot \sin(\omega_N \cdot t)} \Rightarrow s_{\text{TP}}(t) = A_T \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_N \cdot t}.$$

Beweis: Wir setzen vereinfachend $A_T = 1$. Damit lautet das gegebene äquivalente TP-Signal:

$$s_{\text{TP}}(t) = e^{j \cdot \eta \cdot \sin(\omega_N \cdot t)}.$$

1. Mit $x = j \cdot \eta \cdot \sin(\gamma)$ und $\gamma = \omega_N \cdot t$ lautet die Potenzreihenentwicklung dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} s_{\text{TP}}(t) &= e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \dots = \\ &= 1 + j \cdot \eta \cdot \sin(\gamma) + \frac{1}{2!} \cdot j^2 \cdot \eta^2 \cdot \sin^2(\gamma) + \frac{1}{3!} \cdot j^3 \cdot \eta^3 \cdot \sin^3(\gamma) + \dots \end{aligned}$$

2. Die einzelnen trigonometrischen Ausdrücke können wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \cdot j^2 \cdot \eta^2 \cdot \sin^2(\gamma) &= \frac{-\eta^2}{2 \cdot 2!} \cdot [1 - \cos(2\gamma)], \\ \frac{1}{3!} \cdot j^3 \cdot \eta^3 \cdot \sin^3(\gamma) &= \frac{-j \cdot \eta^3}{4 \cdot 3!} \cdot [3 \cdot \sin(\gamma) - \sin(3\gamma)], \\ \frac{1}{4!} \cdot j^4 \cdot \eta^4 \cdot \sin^4(\gamma) &= \frac{\eta^4}{8 \cdot 4!} \cdot [3 + 4 \cdot \cos(2\gamma) + \cos(4\gamma)], \\ &\dots \end{aligned}$$

3. Durch Umordnen erhält man mit $J_n(\eta)$, den **Besselfunktionen** erster Art und n -ter Ordnung:

$$\begin{aligned} s_{\text{TP}}(t) &= 1 \cdot J_0(\eta) + 2 \cdot j \cdot J_1(\eta) \cdot \sin(\gamma) + 2 \cdot J_2(\eta) \cdot \cos(2\gamma) + \\ &\quad + 2 \cdot j \cdot J_3(\eta) \cdot \sin(3\gamma) + 2 \cdot J_4(\eta) \cdot \cos(4\gamma) + \dots \end{aligned}$$

4. Mit dem Satz von Euler kann hierfür auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} s_{\text{TP}}(t) &= J_0(\eta) + [e^{j \cdot \gamma} - e^{-j \cdot \gamma}] \cdot J_1(\eta) + [e^{j \cdot 2\gamma} + e^{-j \cdot 2\gamma}] \cdot J_2(\eta) + \\ &\quad + [e^{j \cdot 3\gamma} - e^{-j \cdot 3\gamma}] \cdot J_3(\eta) + [e^{j \cdot 4\gamma} + e^{-j \cdot 4\gamma}] \cdot J_4(\eta) + \dots \end{aligned}$$

5. Die Besselfunktionen zeigen folgende Symmetrieeigenschaften:

$$\begin{aligned} J_{-n}(\eta) &= (-1)^n \cdot J_n(\eta) \\ \Rightarrow J_{-1}(\eta) &= -J_1(\eta), \quad J_{-2}(\eta) = J_2(\eta), \quad J_{-3}(\eta) = -J_3(\eta), \quad J_{-4}(\eta) = J_4(\eta). \end{aligned}$$

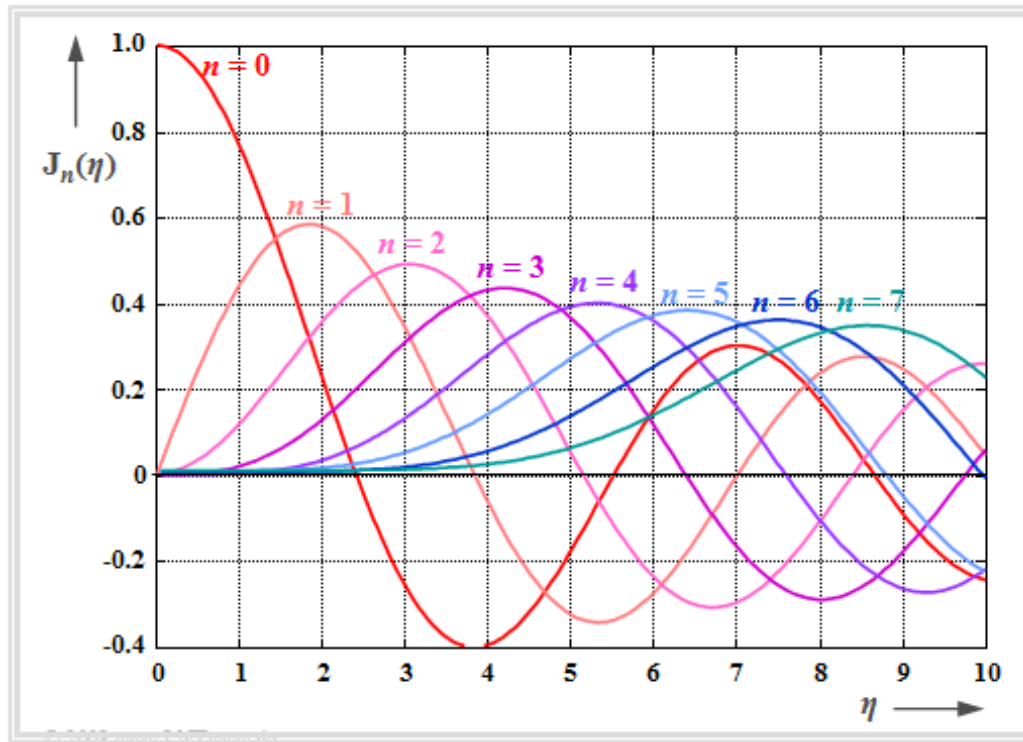
6. Berücksichtigt man diesen Sachverhalt und den bisher weggelassenen Faktor A_T , so erhält man

$$s_{\text{TP}}(t) = A_T \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_N \cdot t}.$$

q.e.d.

Interpretation des Besselspektrums (1)

Die Grafik zeigt die Besselfunktionen $J_0(\eta), \dots, J_7(\eta)$ abhängig vom Modulationsindex η ($0 \leq \eta \leq 10$). Man findet diese auch in Formelsammlungen wie [BS01] in tabellarischer Form. Die erste Art wird durch das „J“ ausgedrückt, die Ordnung durch den Index.



Anhand dieser Grafik können für das äquivalente Tiefpass-Signal

$$s_{\text{TP}}(t) = A_T \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_N \cdot t}$$

folgende Eigenschaften abgeleitet werden:

- Das äquivalente TP-Signal setzt sich aus einem ruhenden Zeiger ($n = 0$) sowie unendlich vielen im Uhrzeigersinn ($n < 0$) bzw. entgegen dem Uhrzeigersinn ($n > 0$) drehenden Zeigern zusammen.
- Die Zeigerlängen hängen über die Besselfunktionen $J_n(\eta)$ vom Modulationsindex η ab. Je kleiner η ist, um so mehr Zeiger können allerdings für die Konstruktion von $s_{\text{TP}}(t)$ vernachlässigt werden.
- Für den Modulationsindex $\eta = 1$ gilt beispielsweise folgende Näherung:

$$s_{\text{TP}}(t) = J_0(1) + J_1(1) \cdot e^{j\omega_N t} + J_2(1) \cdot e^{j2\omega_N t} + J_3(1) \cdot e^{j3\omega_N t} - J_{-1}(1) \cdot e^{-j\omega_N t} + J_{-2}(1) \cdot e^{-j2\omega_N t} - J_{-3}(1) \cdot e^{-j3\omega_N t}.$$

Hierbei ist die Symmetriebeziehung $J_{-n}(\eta) = (-1)^n \cdot J_n(\eta)$ berücksichtigt. Es gilt also:

$$J_{-1}(\eta) = -J_1(\eta), \quad J_{-2}(\eta) = J_2(\eta), \quad J_{-3}(\eta) = -J_3(\eta).$$

- Weiter erkennt man aus obiger Gleichung, dass sich $s_{\text{TP}}(t)$ mit $\eta = 3$ aus deutlich mehr Zeigern – nämlich mit den Indizes $-6 \leq n \leq +6$ – zusammensetzen würde.

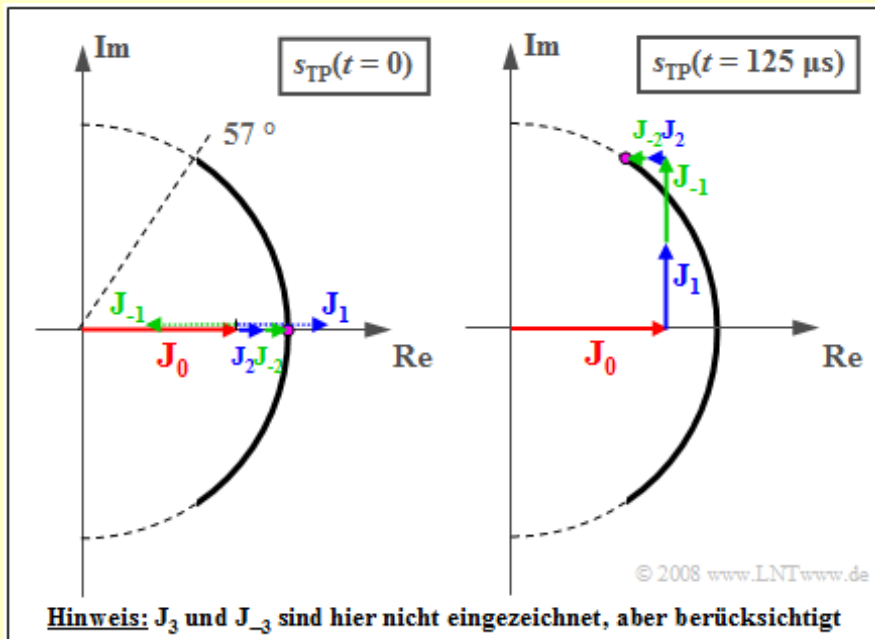
Auf der nächsten Seite werden diese Zusammenhänge an einem Beispiel verdeutlicht.

Interpretation des Besselspektrums (2)

Beispiel: Die Besselfunktionen liefern für den Modulationsindex $\eta = 1$ folgende Zahlenwerte:

$$J_0 = 0.765, \quad J_1 = -J_{-1} = 0.440, \quad J_2 = J_{-2} = 0.115, \quad J_3 = -J_{-3} = 0.020.$$

Die Grafik zeigt die Zusammensetzung der Ortskurve aus den sieben Zeigern (J_3 und J_{-3} fehlen in der Skizze, aber nicht im Gesamtsignal). Die Frequenz des sinusförmigen Quellensignals ist $f_N = 2$ kHz, woraus sich die Periodendauer $T_N = 1/f_N = 500 \mu\text{s}$ ergibt. Vereinfachend wird $A_T = 1$ gesetzt.



Das linke Bild zeigt die Momentaufnahme zur Zeit $t = 0$. Wegen $J_1 = -J_{-1}$ und $J_3 = -J_{-3}$ gilt hierfür:

$$s_{TP}(t = 0) = J_0 + J_2 + J_{-2} = 0.765 + 2 \cdot 0.115 = 0.995.$$

Aus dem reellen Ergebnis folgt die Phase $\phi(t = 0) = 0$ und der Betrag $a(t = 0) = 1$. Der geringfügig abweichende Wert 0.995 zeigt, dass $J_4 = J_{-4}$ zwar sehr klein (≈ 0.002) ist, aber nicht identisch 0.

Das rechte Bild gibt die Verhältnisse zum Zeitpunkt $t = T_N/4 = 125 \mu\text{s}$ wieder. Die Zeiger mit den Längen J_{-1} und J_1 haben sich im bzw. entgegen dem Uhrzeigersinn um 90° gedreht und zeigen nun beide in Richtung der imaginären Achse. Die Zeiger J_2 und J_{-2} drehen doppelt so schnell wie J_1 bzw. J_{-1} und zeigen nun beide in Richtung der negativen reellen Achse. J_3 und J_{-3} drehen im Vergleich zu J_1 und J_{-1} mit dreifacher Geschwindigkeit und zeigen nun beide nach unten. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} s_{TP}(t = 125 \mu\text{s}) &= J_0 - 2 \cdot J_2 + j \cdot (2 \cdot J_1 - 2 \cdot J_3) = 0.535 + j \cdot 0.840 \\ \Rightarrow a(t = 125 \mu\text{s}) &= \sqrt{0.535^2 + 0.840^2} = 0.996, \\ \Rightarrow \phi(t = 125 \mu\text{s}) &= \arctan \frac{0.840}{0.535} = 57.5^\circ \approx 1 \text{ rad}. \end{aligned}$$

Auch zu allen anderen Zeitpunkten ergibt die vektorielle Summe der sieben Zeiger jeweils einen Punkt auf dem Kreisbogen mit Winkel $\phi(t)$, wobei $|\phi(t)| \leq \eta = 1$ rad gilt.

Spektralfunktion eines phasenmodulierten Sinussignals

Ausgehend vom eben berechneten äquivalenten Tiefpass-Signal erhält man für das analytische Signal:

$$s_+(t) = s_{\text{TP}}(t) \cdot e^{j \cdot \omega_T \cdot t} = A_T \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot e^{j \cdot (\omega_T + n \cdot \omega_N) \cdot t}$$

Transformiert man diese Gleichung in den Spektralbereich, so ergibt sich

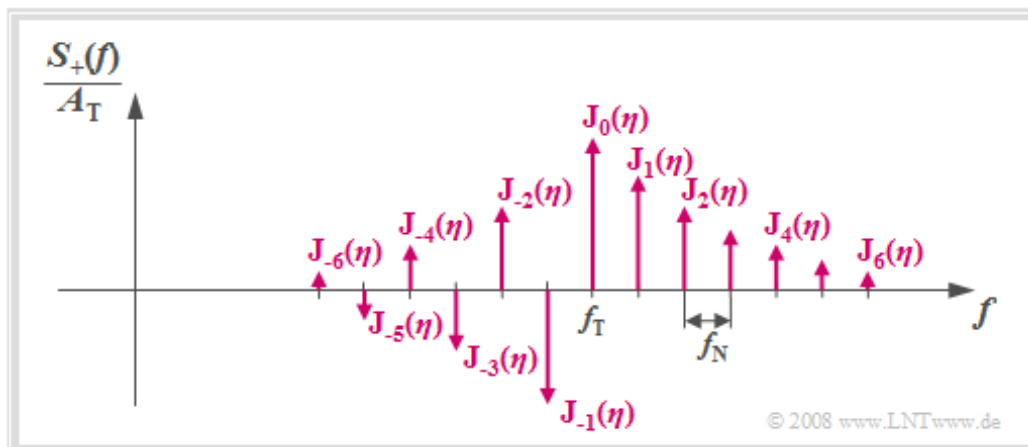
$$S_+(f) = A_T \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot \delta[f - (f_T + n \cdot f_N)].$$

Das Spektrum des physikalischen Signals erhält man durch Ausweitung auf negative Frequenzen unter Berücksichtigung des Faktors 1/2:

$$S(f) = \frac{A_T}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta) \cdot \delta[f \pm (f_T + n \cdot f_N)].$$

Anhand der Grafik am Ende der Seite sind folgende Aussagen möglich:

- Das Spektrum $S_+(f)$ eines phasenmodulierten Sinussignals besteht aus unendlich vielen diskreten Linien im Abstand der Nachrichtenfrequenz f_N . Es ist somit prinzipiell unendlich weit ausgedehnt.
- Die Höhen (Gewichte) der Spektrallinien bei $f_T + n \cdot f_N$ (wobei n ganzzahlig ist) sind durch den Modulationsindex η über die Besselfunktionen $J_n(\eta)$ festgelegt.
- Die Werte der Besselfunktionen $J_n(\eta)$ zeigen, dass man in der Praxis durch Bandbegrenzung das Spektrum nur wenig verändert. Der daraus resultierende Fehler wächst aber mit steigendem η .
- Die Spektrallinien sind bei sinusförmigem Quellensignal und cosinusförmigem Träger reell und für gerades n symmetrisch um f_T . Bei ungeradem n ist ein Vorzeichenwechsel zu berücksichtigen.
- Die Phasenmodulation einer Schwingung mit anderer Phase von Quellen- oder Trägersignal liefert das gleiche Betragsspektrum und unterscheidet sich nur bezüglich der Phasenfunktion.
- Setzt sich das Nachrichtensignal aus mehreren Schwingungen zusammen, so ist die Berechnung des Spektrums schwierig (Faltung der Einzelspektren, siehe nächste Seite und Aufgabe A3.3).



Phasenmodulation der Summe zweier Sinusschwingungen

Setzt sich das Quellsignal aus der Summe zweier Sinusschwingungen zusammen, so lauten die Signale am Ausgang des Phasenmodulators:

$$s(t) = A_T \cdot \cos [\omega_T \cdot t + \eta_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + \eta_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)] ,$$

$$s_{TP}(t) = A_T \cdot e^{j \cdot [\eta_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + \eta_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)]} ,$$

Zur einfacheren Darstellung setzen wir nun $A_T = 1$ und erhalten:

$$s_{TP}(t) = e^{j \cdot \eta_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t)} \cdot e^{j \cdot \eta_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t)} .$$

Die Spektralfunktionen der beiden Terme lauten:

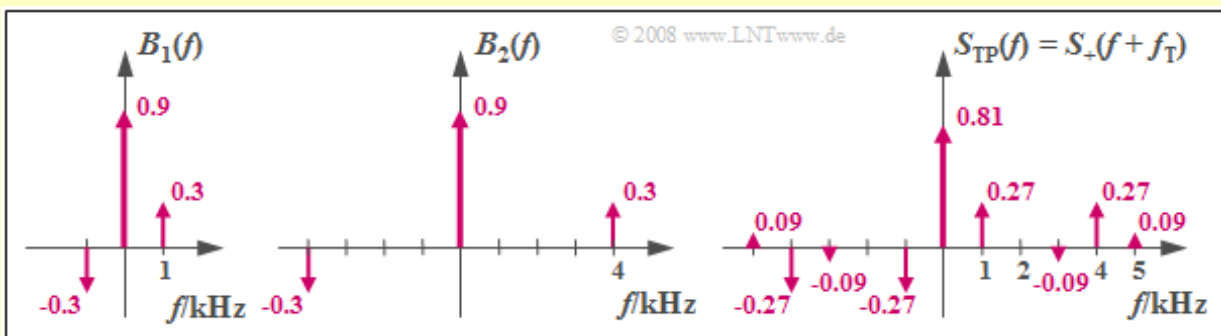
$$e^{j \cdot \eta_1 \cdot \sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t)} \quad \circ \text{---} \bullet \quad B_1(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta_1) \cdot \delta(f - n \cdot f_1) ,$$

$$e^{j \cdot \eta_2 \cdot \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t)} \quad \circ \text{---} \bullet \quad B_2(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\eta_2) \cdot \delta(f - n \cdot f_2) .$$

Die beiden Besselfunktionen $B_1(f)$ und $B_2(f)$ beschreiben Linienspektren im Frequenzabstand f_1 und f_2 , deren Impulsgewichte durch η_1 und η_2 bestimmt sind. Aufgrund der Multiplikation im Zeitbereich ergibt sich für die Spektralfunktion die Faltung:

$$S_{TP}(f) = B_1(f) \star B_2(f) = S_+(f + f_T) .$$

Beispiel: Die linke Grafik zeigt die Besselfunktion $B_1(f)$ für $\eta_1 = 0.64$ und $f_1 = 1$ kHz; auf die Linien bei $f = \pm 2$ kHz mit den Impulsgewichten 0.05 ist der Übersichtlichkeit halber verzichtet. Die Funktion $B_2(f)$ gilt für den gleichen Modulationsindex $\eta_2 = \eta_1$, aber für die Nachrichtenfrequenz $f_2 = 4$ kHz.



- Das Tiefpass-Spektrum $S_{TP}(f) = B_1(f) * B_2(f)$ besteht hier aus neun Diraclinien. Es ist in der rechten Grafik skizziert.
- Durch Frequenzverschiebung um die Trägerfrequenz f_T nach rechts erhält man das Spektrum $S_+(f)$ des dazugehörigen analytischen Signals $s_+(t)$.

Augenblicksfrequenz (1)

Wir gehen wieder von einem winkelmodulierten Signal aus:

$$s(t) = A_T \cdot \cos(\psi(t)).$$

Alle Informationen über das Quellsignal $q(t)$ sind damit ausschließlich in der Winkelfunktion $\psi(t)$ enthalten, während die Hüllkurve $a(t) = A_T$ konstant ist.

Definition: Die **Augenblickskreisfrequenz** ist die Ableitung der Winkelfunktion nach der Zeit:

$$\omega_A(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}.$$

Entsprechend gilt für die **Augenblicksfrequenz**:

$$f_A(t) = \frac{\omega_A(t)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\psi(t)}{dt}.$$

Bei einer Winkelmodulation mit der Trägerfrequenz f_T schwankt die Augenblicksfrequenz zwischen

$$f_T - \Delta f_A \leq f_A(t) \leq f_T + \Delta f_A.$$

Dabei bezeichnet man die maximale Abweichung Δf_A der zeitabhängigen Augenblicksfrequenz $f_A(t)$ von der konstanten Trägerfrequenz f_T als den **Frequenzhub**.

Hervorzuheben ist, dass ein grundsätzlicher Unterschied zwischen der Augenblicksfrequenz und dem mit einem Spektrum-Analyser messbaren Spektrum eines winkelmodulierten Signals besteht, wie das nachfolgende Beispiel verdeutlichen soll.

Augenblicksfrequenz (2)

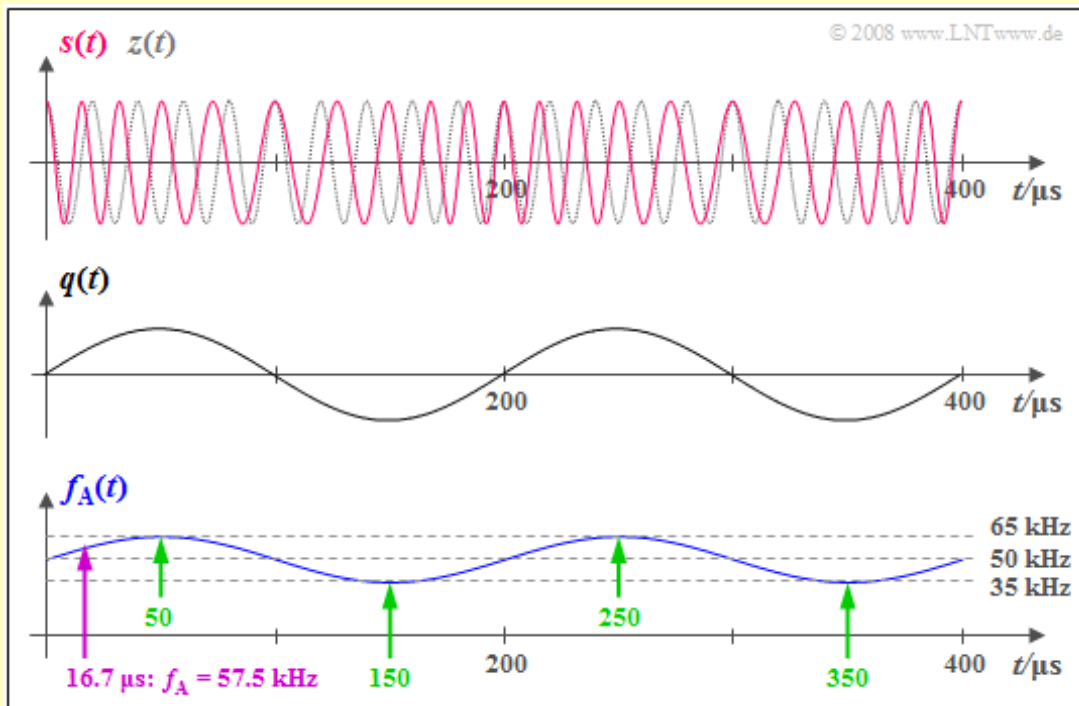
Beispiel: Die Grafik zeigt oben das phasenmodulierte Signal

$$s(t) = A_T \cdot \cos(\psi(t)) = A_T \cdot \cos(2\pi f_T t + \eta \cdot \sin(2\pi f_N t))$$

sowie unten die Augenblicksfrequenz

$$f_A(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\psi(t)}{dt} = f_T + \Delta f_A \cdot \cos(2\pi f_N t).$$

Die zugrundeliegenden Systemparameter sind $f_T = 50$ kHz, $f_N = 5$ kHz und $\eta = 3$. Daraus ergibt sich der Frequenzhub zu $\Delta f_A = \eta \cdot f_N = 15$ kHz.



In der Mitte ist zur Orientierung der qualitative Verlauf des sinusförmigen Quellensignals $q(t)$ skizziert. Man erkennt aus diesen Grafiken:

- Die Augenblicksfrequenz $f_A(t)$ kann alle beliebigen Werte zwischen $f_T + \Delta f_A = 65$ kHz (bei $t = 50, 250$ μ s, usw.) und $f_T - \Delta f_A = 35$ kHz (bei $t = 150, 350$ μ s, usw.) annehmen (siehe grüne Markierungen). Zur Zeit $t \approx 16.7$ μ s gilt beispielsweise $f_A(t) = 57.5$ kHz (violetter Pfeil).
- Dagegen besteht die Spektralfunktion $S(f)$ aus diskreten Bessellinien bei den Frequenzen . . . , 30, 35, 40, 45, **50**, 55, 60, 65, 70, ... (jeweils in kHz). Eine Spektrallinie bei $f = 57.5$ kHz gibt es nicht im Gegensatz zu einer Spektrallinie bei $f = 70$ kHz. Dagegen gilt zu keinem Zeitpunkt $f_A(t) = 70$ kHz.

Ergo: Die Augenblicksfrequenz $f_A(t)$ ist also keine physikalisch messbare Frequenz im herkömmlichen Sinne, sondern nur eine fiktive, mathematische Größe, nämlich die Ableitung der Winkelfunktion $\psi(t)$.

Signalverläufe bei Frequenzmodulation

Wie in Kapitel 3.1 gehen wir weiterhin davon aus, dass das Trägersignal $z(t)$ cosinusförmig verläuft und das Quellsignal $q(t)$ spitzenwertbegrenzt ist.

Definition: Ist bei einem Übertragungssystem die Augenblickskreisfrequenz $\omega_A(t)$ linear abhängig vom Momentanwert des Quellsignals $q(t)$, so spricht man von **Frequenzmodulation (FM)**:

$$\omega_A(t) = 2\pi \cdot f_A(t) = \omega_T + K_{FM} \cdot q(t).$$

Hierbei bezeichnet K_{FM} eine dimensionsbehaftete Konstante. Beschreibt $q(t)$ einen Spannungsverlauf, so hat K_{FM} die Einheit $V^{-1}s^{-1}$.

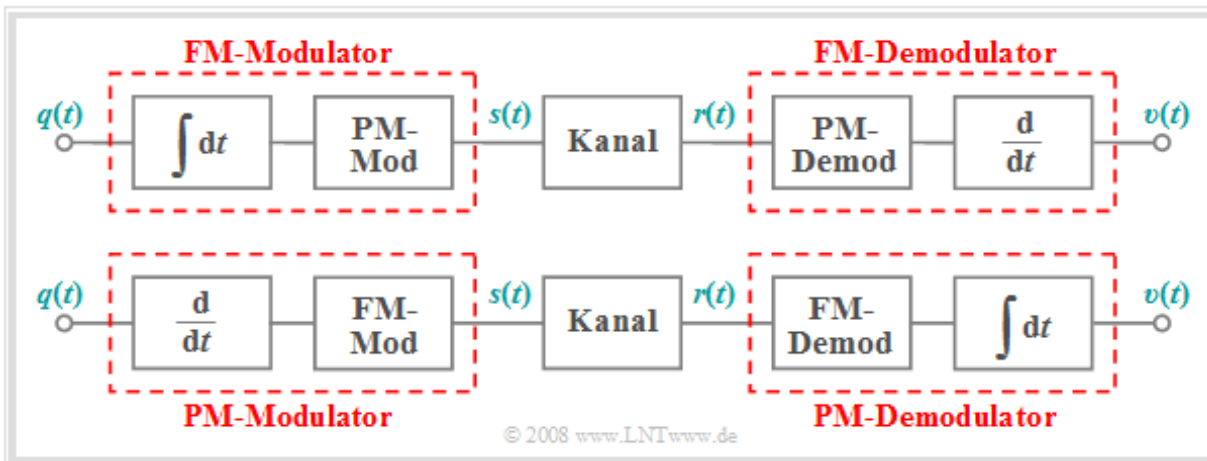
Für die Winkelfunktion und das modulierte Signal erhält man bei FM:

$$\psi(t) = \omega_T \cdot t + K_{FM} \cdot \int q(t) dt \quad \Rightarrow \quad s(t) = A_T \cdot \cos(\psi(t)).$$

Aus dieser Gleichung lässt sich sofort ablesen:

- Auch bei der Frequenzmodulation bewegt sich das äquivalente TP-Signal wegen der konstanten Hüllkurve $\Rightarrow a(t) = A_T$ auf einem Kreisbogen.
- Ein Frequenzmodulator kann mit Hilfe eines Integrators und eines Phasenmodulators realisiert werden. Der FM-Demodulator besteht demzufolge aus PM-Demodulator und Differenzierer.

Die untere Abbildung zeigt den umgekehrten Zusammenhang, nämlich die mögliche Beschreibung von PM-Modulator und -Demodulator durch die entsprechenden FM-Komponenten.



Man erkennt aus obiger Gleichung auch, dass die im **Kapitel 1.3** angegebene Modulatorgleichung im Fall der Frequenzmodulation nur in Sonderfällen gültig sein wird. Die Umwandlung

$$s(t) = a(t) \cdot \cos(\omega(t) \cdot t + \phi(t)) \quad \Rightarrow \quad s(t) = A_T \cdot \cos(\omega(t) \cdot t + \phi_T)$$

ist bei Frequenzmodulation nur manchmal erlaubt, zum Beispiel beim digitalen Modulationsverfahren **Frequency Shift Keying (FSK)** mit rechteckförmigem Grundimpuls.

Frequenzmodulation eines Cosinussignals (1)

Bei sinusförmigem Quellensignal $q(t)$ und Frequenzmodulation gilt für die Augenblickskreisfrequenz:

$$q(t) = A_N \cdot \cos(\omega_N \cdot t) \Rightarrow \omega_A(t) = \omega_T + K_{FM} \cdot A_N \cdot \cos(\omega_N \cdot t).$$

Integriert man diese über die Zeit, so erhält man die Winkelfunktion:

$$\psi(t) = \omega_T \cdot t + \frac{K_{FM} \cdot A_N}{\omega_N} \cdot \sin(\omega_N \cdot t).$$

Ein Vergleich mit den Aussagen von Kapitel 3.1 macht deutlich:

- Die Frequenzmodulation eines Cosinussignals ergibt qualitativ das gleiche Sendesignal $s(t)$ wie die Phasenmodulation eines sinusförmigen Quellensignals $q(t)$.
- Voraussetzung hierfür ist allerdings, dass die Modulatorkonstanten entsprechend dem Verhältnis $K_{FM}/K_{PM} = \omega_N$ aneinander angepasst sind.

- Das Sendesignal $s(t)$ lässt sich somit bei den beiden Konstellationen „PM – Sinussignal“ sowie „FM – Cosinussignal“ einheitlich beschreiben:

$$s(t) = A_T \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \eta \cdot \sin(\omega_N \cdot t)).$$

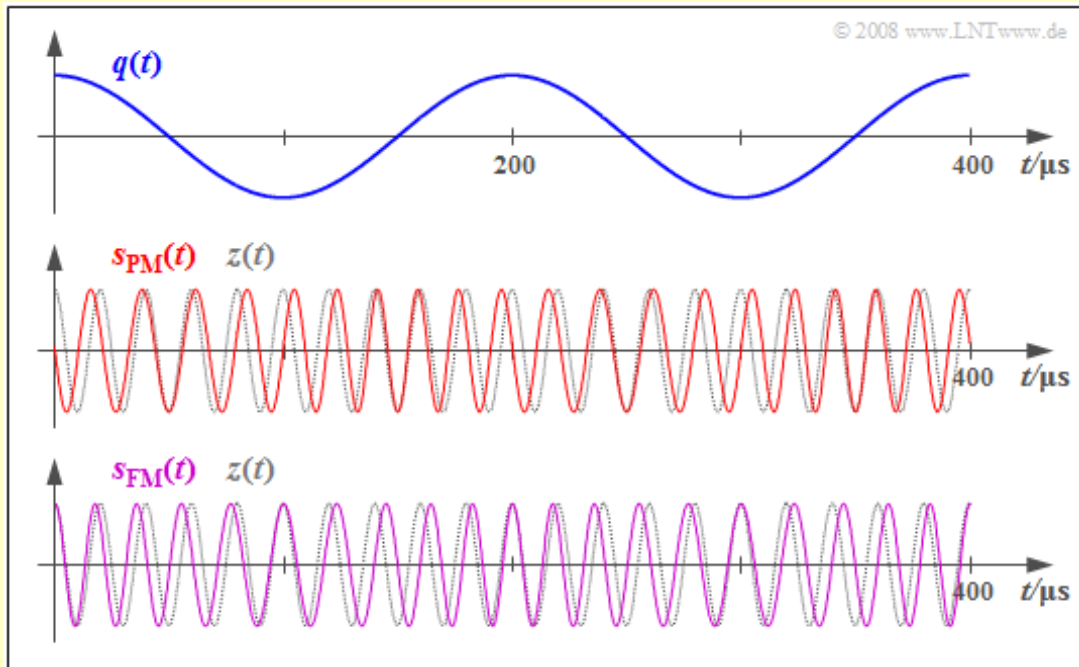
- Allerdings sind bei Anwendung dieser Gleichung für den Modulationsindex η bei Phasen- und Frequenzmodulation unterschiedliche Definitionsgleichungen zu verwenden:

$$\eta_{PM} = K_{PM} \cdot A_N, \quad \eta_{FM} = \frac{K_{FM} \cdot A_N}{\omega_N}.$$

- Ist das Quellensignal keine harmonische Schwingung, sondern setzt sich aus mehreren Frequenzen zusammen, so unterscheiden sich die Zeitsignale bei PM und FM auch qualitativ. Dies erkennt man beispielsweise beim **Vergleich von PSK und FSK** im Kapitel 1.3.

Frequenzmodulation eines Cosinussignals (2)

Beispiel: Wir gehen nun von einem cosinusförmigen Quellensignal $q(t)$ mit der Amplitude $A_N = 3$ V und der Frequenz $f_N = 5$ kHz aus und betrachten die Signalverläufe von PM und FM bei gleichem Modulationsindex $\eta = 1.5$.



Die mittlere Grafik zeigt das phasenmodulierte Signal für die Modulatorparameter $f_T = 50$ kHz und $K_{PM} = 0.5$ V⁻¹

$$s_{PM}(t) = A_T \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \eta \cdot \cos(\omega_N \cdot t)).$$

- Bei PM ergibt sich mit $A_N = 3$ V für den Modulationsindex (oder Phasenhub) $\eta = 1.5 \approx \pi/2$.
- Die maximale Abweichung der Nulldurchgänge von ihren (äquidistanten) Solllagen beträgt somit etwa ein Viertel der Trägerperiode.
- Ist das Quellensignal $q(t) > 0$, so kommen die Nulldurchgänge verfrüht, bei $q(t) < 0$ verspätet.

Die untere Grafik zeigt das frequenzmodulierte Signal mit gleichem Modulationsindex η :

$$s_{FM}(t) = A_T \cdot \cos(\omega_T \cdot t + \eta \cdot \sin(\omega_N \cdot t)).$$

Erreicht wird in diesem Fall $\eta = 1.5$ beispielsweise durch die Modulatorkonstante

$$K_{FM} = \frac{\eta \cdot \omega_N}{A_N} = K_{PM} \cdot \omega_N = 0.5 \text{ V}^{-1} \cdot 2\pi \cdot 5 \text{ kHz} = 15708 \text{ V}^{-1}\text{s}^{-1}.$$

- Der Frequenzhub beträgt hier $\Delta f_A = \eta \cdot f_N = 7.5$ kHz, und es treten Augenblicksfrequenzen zwischen 42.5 und 57.5 kHz auf.
- Die Nulldurchgänge stimmen nun bei den Maxima und den Minima des Quellensignals $q(t)$ mit denen des Trägersignals $z(t)$ überein, während die maximalen Phasenabweichungen bei den Nulldurchgängen von $q(t)$ zu erkennen sind.

WM-Spektrum einer harmonischen Schwingung (1)

Nun setzen wir für das Quellensignal allgemein eine harmonische Schwingung mit der Phase ϕ_N voraus:

$$q(t) = A_N \cdot \cos(2\pi f_N \cdot t + \phi_N).$$

Uns interessiert die Spektralfunktion $S(f)$. Zur einfacheren Darstellung betrachten wir im Folgenden das Betragsspektrum $|S_+(f)|$ des analytischen Signals, aus dem $|S(f)|$ in der bekannten Weise hergeleitet werden kann. Für jede Art von Winkelmodulation in der hier beschriebenen Weise – egal, ob Phasen- oder Frequenzmodulation – und auch unabhängig von der Phase ϕ_N des Quellensignals gilt:

$$|S_+(f)| = A_T \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |J_n(\eta)| \cdot \delta[f - (f_T + n \cdot f_N)].$$

Diese Gleichung lässt sich wie folgt begründen:

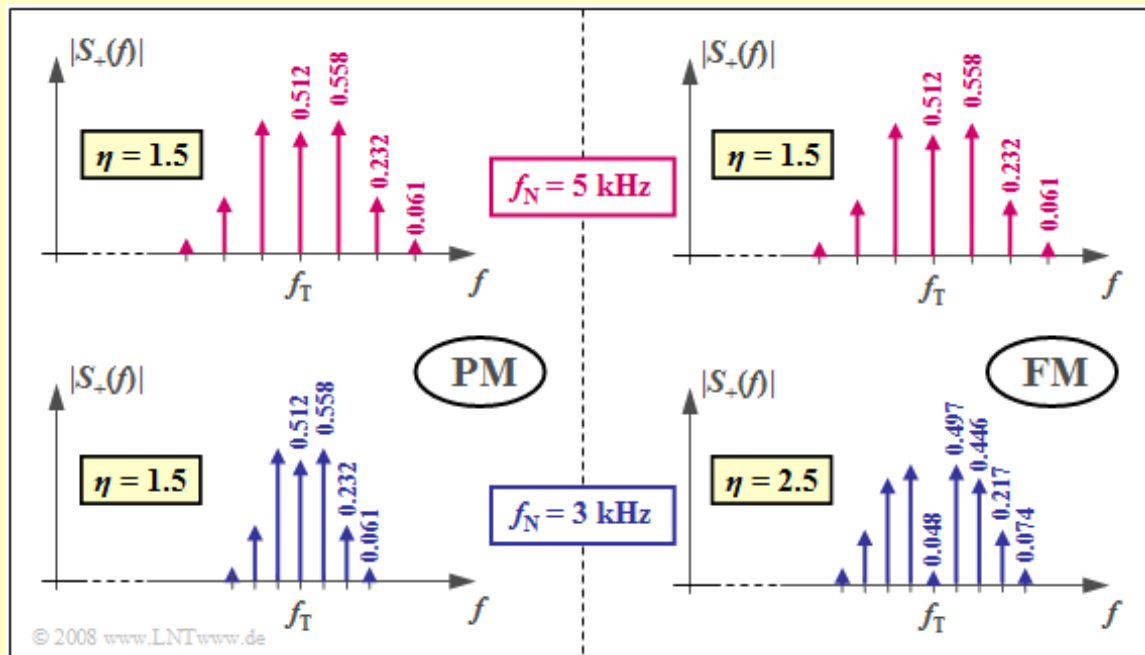
- Auf der **Seite 4** im Abschnitt 3.1 wurde diese Gleichung für ein phasenmoduliertes Sinussignal abgeleitet, wobei $\eta = A_N \cdot K_{PM}$ den Modulationsindex angibt und $J_n(\eta)$ die Besselfunktion erster Art und n -ter Ordnung bezeichnet. K_{PM} ist die Modulatorkonstante.
- Durch eine andere Nachrichtenphase ϕ_N ändert sich nur die Phasenfunktion $\arg S_+(f)$, nicht aber das Betragsspektrum $|S_+(f)|$. Dieses wichtige Ergebnis wurde auch durch die **Aufgabe Z3.3** im Kapitel 3.1 bestätigt.
- Auf **Seite 3** dieses Abschnittes wurde gezeigt, dass ein FM-Signal in gleicher Weise wie ein PM-Signal dargestellt werden kann, wenn der Modulationsindex $\eta = K_{FM} \cdot A_N / \omega_N$ verwendet wird. Folgerichtig sind auch die Betragsspektren bei PM und FM in gleicher Form darstellbar.

WM-Spektrum einer harmonischen Schwingung (2)

Beispiel: Wir betrachten wieder eine harmonische Schwingung mit der Amplitude $A_N = 3$ V nach

- einer Phasenmodulation (mit $K_{PM} = 0.5$ V⁻¹),
- einer Frequenzmodulation (mit $K_{FM} = 15708$ V⁻¹s⁻¹).

Die zugehörigen Signalverläufe sind auf der **Seite 3b** dargestellt. Bei beiden Systemen ergibt sich für $f_N = 5$ kHz ein Besselspektrum mit dem Modulationsindex $\eta = 1.5$. Die identischen Betragsspektren des analytischen Signals (nur positive Frequenzen) sind in der oberen Bildhälfte dargestellt. Bessellinien mit Werten kleiner als 0.03 sind hierbei vernachlässigt.



Die beiden unteren Bilder gelten für die Nachrichtenfrequenz $f_N = 3$ kHz. Man erkennt:

- Bei der Phasenmodulation ergibt sich gegenüber $f_N = 5$ kHz eine schmalere Spektralfunktion, da nun der Abstand der Bessellinien nur mehr 3 kHz beträgt. Da sich der Modulationsindex $\eta = 1.5$ nicht ändert, ergeben sich die gleichen Besselgewichte wie bei $f_N = 5$ kHz.
- Auch bei der Frequenzmodulation treten nun die Bessellinien im Abstand von 3 kHz auf. Es gibt aber nun aufgrund des größeren Modulationsindex $\eta = 2.5$ – dieser ist umgekehrt proportional zu f_N – deutlich mehr Bessellinien als im rechten oberen (für $\eta = 1.5$ gültigen) Diagramm.

Einfluss einer Bandbegrenzung bei Winkelmodulation (1)

Fassen wir einige Resultate dieses Abschnitts kurz zusammen, wobei wir beispielhaft die Trägerfrequenz $f_T = 100$ kHz, die Nachrichtenfrequenz $f_N = 5$ kHz und den Modulationsindex $\eta = \pi/2$ voraussetzen:

- Das Spektrum einer winkelmodulierten Schwingung besteht aus Bessellinien um den Träger f_T im Abstand f_N der Nachrichtenfrequenz und ist theoretisch unendlich weit ausgedehnt.
- Selbst wenn man alle Spektrallinien mit Beträgen kleiner als 0.01 vernachlässigt, beträgt die dann endliche Bandbreite für $\eta = \pi/2$ noch immer $B_{HF} = 8 \cdot f_N = 40$ kHz.
- Die Ortskurve – also der Verlauf des äquivalenten TP-Signals in der komplexen Ebene – ist im Idealfall ein Kreisbogen mit einem Öffnungswinkel von ± 1.57 rad = $\pm 90^\circ$.
- Der Kreisbogen nach vektorieller Addition ergibt sich allerdings nur dann, wenn alle Bessellinien in der Ortskurve mit den richtigen Zeigerlängen, Phasenlagen und Kreisfrequenzen rotieren.
- Logischerweise wird die halbkreisförmige Ortskurve verändert, wenn Spektrallinien verfälscht werden (z. B. durch lineare Kanalverzerrungen) oder ganz fehlen (z. B. durch Bandbegrenzung).
- Da der ideale Winkeldemodulator die Phase $\phi_r(t)$ des Empfangssignals detektiert und daraus das Sinkensignal $v(t)$ gewinnt, wird dieses verfälscht und zwar sogar nichtlinear \Rightarrow irreversibel.
- Das bedeutet gleichzeitig: Aufgrund linearer Verzerrungen im Kanal kommt es zu nichtlinearen Verzerrungen im demodulierten Signal \Rightarrow es entstehen dadurch neue Frequenzen (Oberwellen).
- Je kleiner die zur Verfügung stehende Bandbreite B_{HF} ist und je größer der Modulationsindex η gewählt wird, desto größer wird der die nichtlinearen Verzerrungen beschreibende Klirrfaktor K .
- Als Faustformel für die erforderliche HF-Bandbreite für einen geforderten Klirrfaktor K gilt:

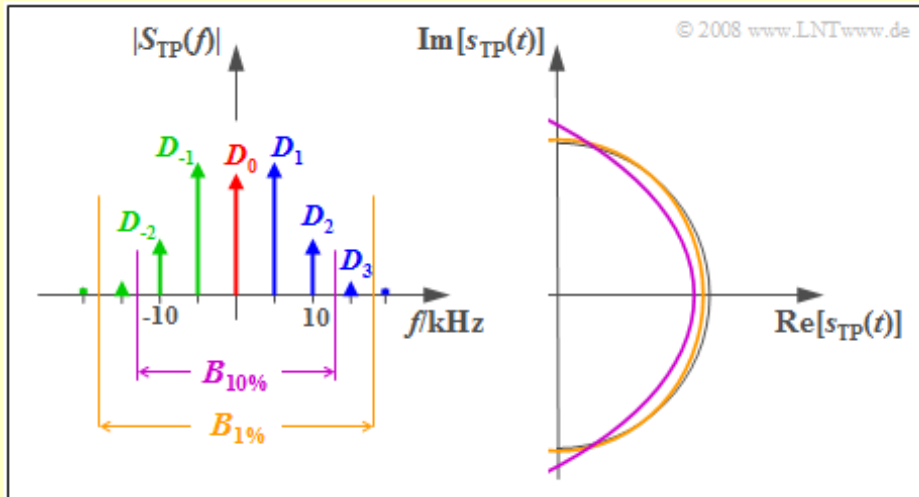
$$K < 10\% : B_{HF} \geq 2 \cdot f_N \cdot (\eta + 1),$$

$$K < 1\% : B_{HF} \geq 2 \cdot f_N \cdot (\eta + 2).$$

Man bezeichnet diesen näherungsweise Zusammenhang zwischen der HF-Bandbreite und dem Klirrfaktor auch als **Carson-Regel**.

Einfluss einer Bandbegrenzung bei Winkelmodulation (2)

Beispiel: Wir gehen weiterhin von den Systemparametern $f_T = 100$ kHz, $f_N = 5$ kHz und $\eta = \pi/2$ aus. Die Grafik zeigt für diesen Fall links das Betragsspektrum $|S_{TP}(f)|$ des äquivalenten TP-Signals und rechts die zugehörige Zeitfunktion $s_{TP}(t)$.



Um den Klirrfaktor K auf Werte kleiner als 1% zu begrenzen, ist nach der sog. Carson-Regel die HF-Bandbreite $B_{1\%} \approx 36$ kHz erforderlich. In diesem Fall setzt sich das äquivalente TP-Signal

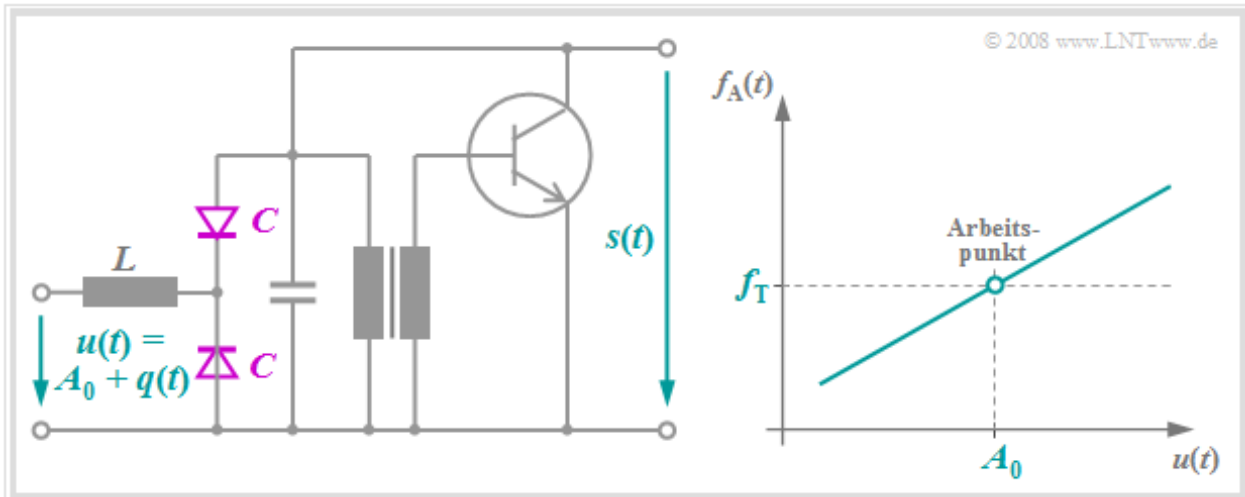
$$r_{TP}(t) = \sum_{n=-3}^{+3} D_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_N \cdot t}$$

aus der Konstanten D_0 und je drei entgegen dem Uhrzeigersinn (D_1, D_2, D_3) bzw. im Uhrzeigersinn (D_{-1}, D_{-2}, D_{-3}) drehenden Zeigern zusammen. Die ockerfarbene Kurve in der Zeitbereichsdarstellung macht deutlich, dass sich das äquivalente TP-Signal durch diese Bandbegrenzung nur geringfügig vom (verzerrungsfreien) Halbkreis unterscheidet.

Gibt man sich mit einem Klirrfaktor $K < 10\%$ zufrieden, so ist die HF-Bandbreite $B_{10\%} \approx 26$ kHz ausreichend. Damit werden auch die Fourierkoeffizienten D_3 und D_{-3} abgeschnitten und die violett dargestellte Ortskurve beschreibt einen Parabelabschnitt. Die Simulation dieses Fallbeispiels liefert den Klirrfaktor $K \approx 6\%$. Das heißt, dass die Carson-Regel oft ein etwas zu pessimistisches Ergebnis liefert.

Realisierung eines FM-Modulators

Eine Frequenzmodulation erhält man dann, wenn die Schwingfrequenz eines Oszillators im Rhythmus des modulierenden Signals verändert wird. Als frequenzbestimmende Elemente dienen meist RC-Glieder oder Schwingkreise.



Die linke Grafik zeigt eine schaltungstechnische Realisierungsform; die genaue Schaltungsbeschreibung finden Sie in **[Mäu 88]**. Rechts ist die idealisierte Frequenz-Spannungskennlinie dargestellt. An dieser Stelle sollen nur einige wenige Anmerkungen gemacht werden:

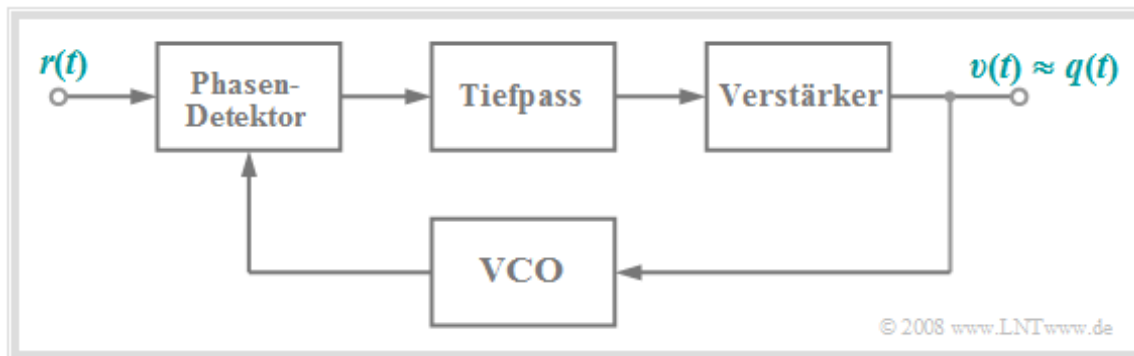
- Die anliegende Spannung $u(t)$ setzt sich additiv aus dem Quellensignal $q(t)$ und einem Gleichanteil A_0 zusammen, der den **Arbeitspunkt** festlegt.
- Die Kapazität C der **Kapazitätsdiode** ist näherungsweise proportional zu $u^{-2}(t)$, so dass sich die Schwingfrequenz des LC-Oszillators abhängig von $q(t)$ verändert.
- Bei nur kleiner Frequenzänderung hängen $u(t)$ und die Schwingfrequenz linear zusammen. Damit beträgt die **Augenblickskreisfrequenz** mit der Steigung K_{FM} der Modulatorkennlinie:

$$\omega_A(t) = \omega_T + K_{FM} \cdot q(t).$$

- Die **Gegentaktschaltung** aus den beiden Kapazitätsdioden dient z.B. zur Kompensation von Unsymmetrien und damit zur Verminderung der quadratischen Verzerrungen.
- Legt man am Eingang die Summe aus dem Gleichanteil A_0 und dem differenzierten Quellensignal – also $dq(t)/dt$ – an, so erhält man am Ausgang das **phasenmodulierte Signal** $s(t)$.

PLL-Realisierung eines FM-Demodulators

Die Grafik zeigt eine Realisierungsmöglichkeit des FM-Demodulators. Weitere FM-Demodulatoren – zum Beispiel mittels Flankendiskriminator – werden in [Mäu 88] ausführlich behandelt.



In Stichpunkten lässt sich diese Schaltung, die als Phasenregelschleife (Phase-Locked-Loop, **PLL**) arbeitet, wie folgt beschreiben:

- Der Phasendetektor ermittelt die Phasenunterschiede (Abstände der Nulldurchgänge) zwischen dem Empfangssignal $r(t)$ und dem vom VCO bereitgestellten Vergleichssignal.
- Das Ausgangssignal $v(t)$ nach Tiefpass-Filterung und Verstärkung ist dann näherungsweise gleich dem Quellsignal $q(t)$, wenn dieses sendeseitig FM-moduliert wurde.
- Das Ausgangssignal $v(t)$ wird gleichzeitig an den Eingang des spannungsgesteuerten Oszillators angelegt. Man bezeichnet diesen auch als *Voltage Controlled Oscillator*, abgekürzt **VCO**.
- Das Ausgangssignal des VCO wird permanent in der Weise nachgeregelt, dass dessen Frequenz der Augenblicksfrequenz $f_A(t)$ des Empfangssignals entspricht.

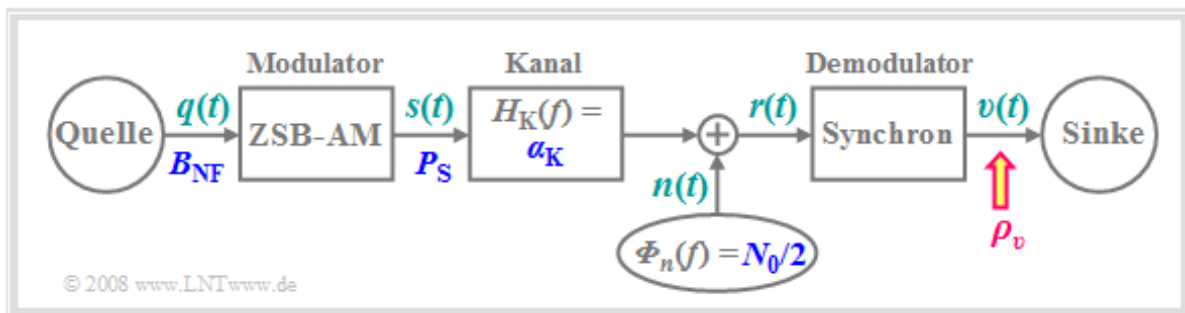
Eine detaillierte Schaltungsbeschreibung des PLL-FM-Demodulators finden Sie ebenfalls in [Mäu 88].

Signal-zu-Rausch-Leistungsverhältnis bei PM

Zur Untersuchung des Rauschverhaltens gehen wir wieder vom so genannten AWGN-Kanal aus und berechnen das Sinken-SNR ρ_v in Abhängigkeit

- der Frequenz (Bandbreite) B_{NF} des cosinusförmigen Quellensignals,
- der Sendeleistung P_S ,
- des Kanaldämpfungsfaktors α_K , und
- der (einseitigen) Rauschleistungsdichte N_0 .

Eine ausführliche Modellbeschreibung findet man im **Kapitel 1.2**.



Ist die Leistungskenngröße

$$\xi = \frac{\alpha_K^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot B_{NF}}$$

hinreichend groß, so erhält man bei Phasenmodulation mit dem Modulationsindex η folgende Näherung:

$$\rho_v \approx \eta^2 / 2 \cdot \xi.$$

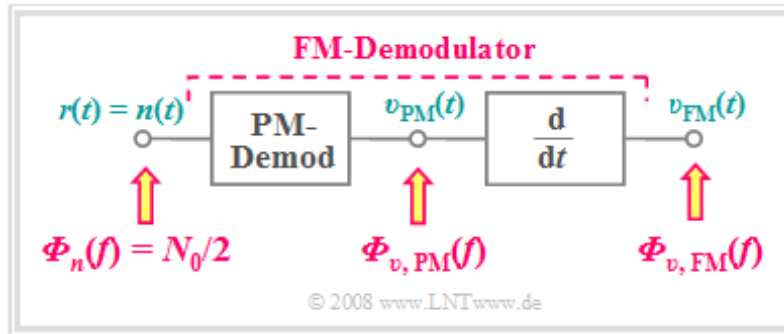
Das bedeutet, dass das Sinken-SNR mit wachsendem η quadratisch zunimmt.

Die exakte Berechnung von ρ_v ist nicht ganz einfach und auch langwierig. Hier soll nur der Rechenweg kurz geschildert werden:

- Man approximiert das weiße Rauschen $n(t)$ mit der Bandbreite B_{HF} durch eine Summe von Sinusstörern im Abstand f_{St} (siehe Skizze auf der nächsten Seite).
- Man berechnet für jeden einzelnen Sinusstörer das S/N-Verhältnis nach der Demodulation und addiert die einzelnen Beiträge, die nun alle im Tiefpassbereich $|f| < B_{NF}$ liegen.
- Das obige einfache Ergebnis erhält man nach dem Grenzübergang $f_{St} \rightarrow 0$. Die Summe geht dann in ein Integral über und dieses kann unter Ausnutzung einiger Näherungen gelöst werden.

Signal-zu-Rausch-Leistungsverhältnis bei FM

Zur Berechnung nutzt man hier die Tatsache, dass der FM-Demodulator mit einem PM-Demodulator und einem Differenzierer realisiert werden kann. Das nachfolgende Blockschaltbild bezieht sich allein auf die Rauschsignale $\Rightarrow s(t) = 0$. Damit ist das Empfangssignal $r(t)$ gleich $n(t)$, wobei für $n(t)$ additives weißes Gaußsches Rauschen mit der Mittenfrequenz f_T und der Bandbreite B_{HF} anzusetzen ist.



Bei der Berechnung der Rauschleistungsdichte nach dem FM-Demodulator ist zu berücksichtigen:

- Die Rauschleistungsdichte $\Phi_{v, PM}(f)$ nach dem PM-Demodulator liegt im Tiefpassbereich, besitzt die (einseitige) Bandbreite B_{NF} und ist ebenfalls „weiß“ (siehe linke untere Skizze).
- Die Leistungsdichte am Ausgang eines linearen Systems mit Frequenzgang $H(f)$ lautet allgemein, wenn am Eingang die Rauschleistungsdichte $\Phi_{v, PM}(f)$ anliegt:

$$\Phi_{v, FM}(f) = \Phi_{v, PM}(f) \cdot |H(f)|^2.$$

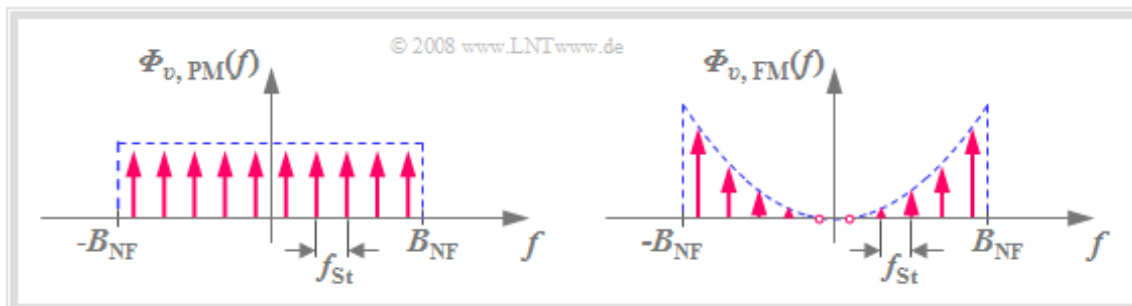
- Der Differenzierer ist ein solches lineares System. Sein Frequenzgang $H(f)$ steigt linear mit f an, und es gilt für die Rauschleistungsdichte am Ausgang des FM-Demodulators (siehe rechte Skizze):

$$\Phi_{v, FM}(f) = \text{const.} \cdot f^2 \cdot \Phi_{v, PM}(f).$$

- Berücksichtigt man dieses Ergebnis, so kommt man nach längerer Rechnung zum folgenden Sinken-SNR, falls die Leistungskenngröße ξ hinreichend groß ist:

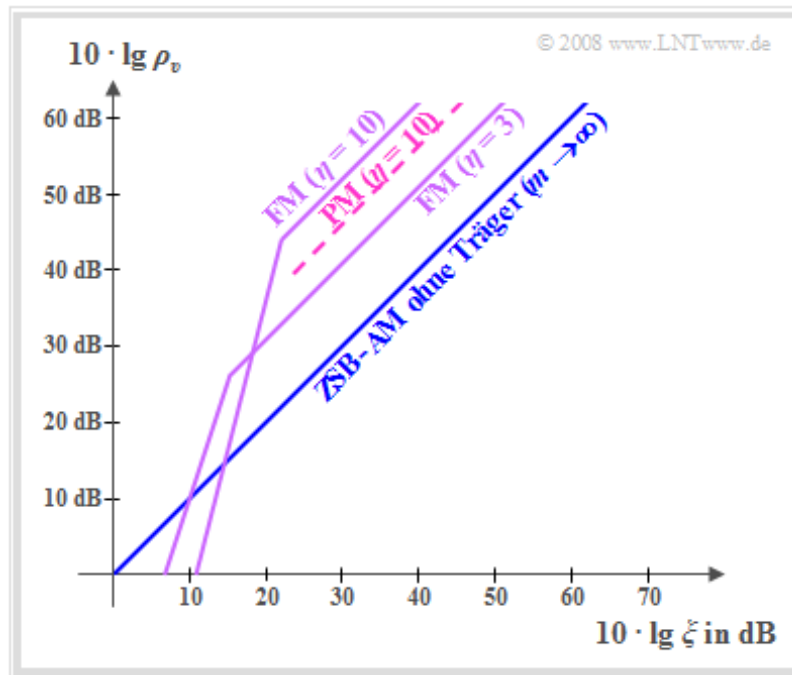
$$\rho_v \approx \frac{3\eta^2}{2} \cdot \frac{\alpha_K^2 \cdot P_S}{N_0 \cdot B_{NF}} = 3/2 \cdot \eta^2 \cdot \xi.$$

Die Grafik verdeutlicht, dass $\Phi_{v, FM}(f)$ im Gegensatz zu $\Phi_{v, PM}(f)$ nicht weiß ist, sondern zu den Grenzen hin quadratisch ansteigt. Bei der Frequenz $f = 0$ besitzt $\Phi_{v, FM}(f)$ dagegen keine Rauschanteile.



Systemvergleich von AM, PM und FM hinsichtlich Rauschen

Wie schon in **Kapitel 1.2** ausführlich erläutert und in **Kapitel 2.2** angewandt, betrachten wir wieder die doppelt-logarithmische Darstellung des Sinken-SNR ρ_v über der Kenngröße $\xi = \alpha_K^2 \cdot P_S / (N_0 \cdot B_{NF})$.



Diese qualitativ zu verstehenden Kurven sind wie folgt zu interpretieren:

- Die *Vergleichskurve* liefert die ZSB-AM ohne Träger, das heißt mit Modulationsgrad $m \rightarrow \infty$. Hier gilt $\rho_v = \xi$ und auch bei doppelt-logarithmischer Darstellung ergibt sich eine 45°-Gerade durch den Ursprung. Siehe auch **Kapitel 2.2**.
- Die *FM-Kurve* mit $\eta = 3$ liegt um $10 \cdot \lg 13.5 \approx 11.3$ dB oberhalb der AM-Kurve. Anschaulich kann man das bessere Rauschverhalten der FM dadurch erklären, dass ein additiver Rauschteil die Lage der Nulldurchgänge weniger beeinflusst als er die Amplitudenwerte verändert.
- Ist das wirksame Rauschen sehr groß und damit die Leistungskenngröße klein ($10 \cdot \lg \xi \leq 15$ dB), so ist Winkelmodulation nicht zu empfehlen. Aufgrund des Rauschens können Nulldurchgänge völlig verschwinden und so deren Detektion unmöglich machen. Man spricht vom *FM-Knick*.
- Hinsichtlich Rauschen ist ein *möglichst großer Modulationsindex* anzustreben. So liegt die Kurve für $\eta = 10$ um etwa 10.4 dB über der Kurve für $\eta = 3$. Zu berücksichtigen ist allerdings, dass ein größeres η auch eine größere Bandbreite erfordert oder – bei gegebener Kanalbandbreite – stärkere nichtlineare Verzerrungen hervorruft.
- Bei gleichem Modulationsindex ist die Phasenmodulation stets um $10 \lg 3 \approx 4.8$ dB schlechter als die Frequenzmodulation. Dies ist einer der Gründe, warum die analoge Phasenmodulation in der Praxis nur wenig Bedeutung hat. Dagegen wird bei digitaler Modulation die Variante *Phase Shift Keying* (PSK) aufgrund anderer Vorteile häufiger eingesetzt als *Frequency Shift Keying* (FSK).
- Alle angegebenen Kurven gelten quantitativ nur für eine harmonische Schwingung (eine Frequenz). Bei einem Frequenzgemisch – das in der Praxis stets vorliegt – gelten die Kurven nur qualitativ.

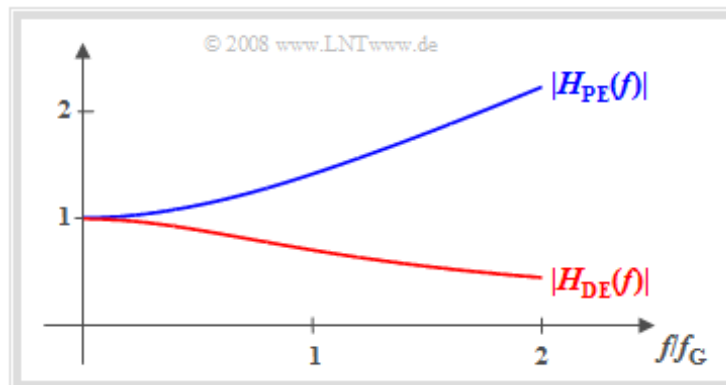
Preemphase und Deemphase

Ein wichtiges Ergebnis der letzten Seiten war, dass das Sinken-SNR bei FM entsprechend

$$\rho_v \approx 1.5 \cdot \eta^2 \cdot \xi.$$

in guter Näherung quadratisch vom Modulationsindex abhängt. Da aber bei Frequenzmodulation der Modulationsindex η umgekehrt proportional zur Nachrichtenfrequenz f_N ist, hängt auch das Sinken-SNR von f_N ab. Daraus ergeben sich folgende Konsequenzen:

- Besteht das Nachrichtensignal aus mehreren Frequenzen, so weisen die höheren Frequenzen nach einer FM-Modulation einen kleineren Modulationsindex η auf als die niedrigeren Frequenzen.
- Die höheren Frequenzanteile (mit kleinerem η) sind entsprechend stärker verrauscht als niedrigere Frequenzen, wenn nicht besondere Maßnahmen getroffen werden.
- Eine solche Maßnahme ist beispielsweise eine **Preemphase**. Dabei werden höhere Frequenzen durch ein Hochpass-Filternetzwerk $H_{PE}(f)$ angehoben und für diese der Modulationsindex erhöht.
- Die sendeseitige Preemphase muss beim Empfänger durch ein Netzwerk $H_{DE}(f) = 1/H_{PE}(f)$ rückgängig gemacht werden. Dieses Absenken der höheren Frequenzen nennt man **Deemphase**.



Die Grafik zeigt ein mögliches Beispiel für die Filterfunktionen von Preemphase (blau) und Deemphase (rot) mit folgenden Frequenzgängen:

$$|H_{PE}(f)| = |H_{DE}(f)|^{-1} = \sqrt{1 + (f/f_G)^2}.$$