

## Musterlösung zur Aufgabe A2.1

a) Da  $\Phi_a(f)$  als eine spektrale Leistungsdichte stets reell ist (dazu gerade und positiv, aber das spielt hier keine Rolle) und die AKF-Werte  $\varphi_a(\lambda)$  symmetrisch um  $\lambda = 0$  sind, kann die angegebene Gleichung wie folgt umgewandelt werden:

$$\Phi_a(f) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \varphi_a(\lambda) \cdot e^{-j2\pi f\lambda T} = \varphi_a(0) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} 2 \cdot \varphi_a(\lambda) \cdot \cos(2\pi f\lambda T).$$

Durch Vergleich mit der skizzierten Funktion

$$\Phi_a(f) = 1/2 - 1/2 \cdot \cos(4\pi fT).$$

erhält man:

$$\varphi_a(\lambda = 0) \underline{\underline{= 0.5}}, \quad \varphi_a(\lambda = 2) = \varphi_a(\lambda = -2) \underline{\underline{= -0.25}}.$$

Alle anderen AKF-Werte – also auch  $\varphi_a(\lambda = \pm 1)$  – ergeben sich zu 0.

b) Für den rechteckförmigen NRZ-Grundimpuls ergibt sich aufgrund der Begrenzung der Energie-AKF auf den Bereich  $|\tau| \leq T$ :

$$P_S = \varphi_s(\tau = 0) = \frac{1}{T} \cdot \varphi_a(\lambda = 0) \cdot \varphi_{gs}^*(\tau = 0) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot s_0^2 \cdot T = \frac{s_0^2}{2} \underline{\underline{= 5 \text{ mW}}}.$$

c) Im hier zu betrachtenden Fall (rechteckförmige Spektralfunktion) ist es günstiger, die Sendeleistung durch Integration über das Leistungsdichtespektrum zu berechnen:

$$\begin{aligned} P_S &= \int_{-1/(2T)}^{+1/(2T)} \Phi_s(f) df = \frac{1}{T} \cdot \int_{-1/(2T)}^{+1/(2T)} \Phi_a(f) \cdot \Phi_{gs}^*(f) df = \\ &= \frac{1}{T} \cdot [s_0^2 \cdot T^2] \cdot \int_{-1/(2T)}^{+1/(2T)} (1/2 - 1/2 \cdot \cos(4\pi fT)) df = s_0^2/2 \underline{\underline{= 5 \text{ mW}}}. \end{aligned}$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass für diese Aufgabe das Energie-LDS  $|G_s(f)|^2$  als konstant vorgegeben ist (innerhalb des Integrationsintervalls) und somit vor das Integral gezogen werden kann.

Trotz völlig anderer Signalform  $s(t)$  ergibt sich hier die gleiche Sendeleistung, da das Integral den Wert  $1/(2T)$  liefert. Anzumerken ist, dass diese einfache Rechnung nur für den Roll-off-Faktor  $r = 0$  möglich ist.

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.1

a) Die Bitdauer  $T_q = 0.5 \mu\text{s}$  kann der Grafik entnommen werden. Da die Quelle binär und redundanzfrei ist, gilt für die Bitrate der Quelle:  $R_q = 1/T_q = 2 \text{ Mbit/s}$ .

b) Bei symbolweiser Codierung gilt stets  $T_c = T_q$ . Im vorliegenden Beispiel ist somit auch  $T_c = 0.5 \mu\text{s}$ . Die Stufenzahl  $M_c = 3$  kann aus der unteren Skizze abgelesen werden.

c) Die Symbolrate des Codersignals beträgt  $2 \cdot 10^6$  Ternärsymbole pro Sekunde. Für die äquivalente Bitrate gilt dagegen:

$$R_c = \frac{\log_2(M_c)}{T_c} = \frac{\log_2(3)}{0.5 \mu\text{s}} = \frac{\lg(3)}{\lg(2) \cdot 0.5 \mu\text{s}} = \frac{1.585 \text{ (bit)}}{0.5 \mu\text{s}} \approx 3.17 \text{ Mbit/s}.$$

d) Für die relative Coderedundanz gilt bei redundanzfreier Quelle allgemein:

$$r_c = \frac{R_c - R_q}{R_c} = 1 - \frac{R_q}{R_c} = 1 - \frac{T_c}{T_q \cdot \log_2(M_c)}.$$

Beim hier betrachteten Biploarcodes 2. Ordnung mit den Parametern  $T_c = T_q$  und  $M_c = 3$  gilt weiter:

$$r_c = 1 - \frac{1}{\log_2(3)} \approx 36.9\%.$$

## Musterlösung zur Aufgabe A2.2

- a) Man spricht von einem redundanzfreien Digitalsignal, wenn
- die Amplitudenkoeffizienten nicht voneinander abhängen (dies wurde hier vorausgesetzt),
  - alle möglichen Amplitudenkoeffizienten gleichwahrscheinlich sind.

In diesem Sinne ist  $s_{0,5}(t)$  ein redundanzfreies Signal  $\Rightarrow$  Lösungsvorschlag 2. Somit ist hier die Entropie (der mittlere Informationsgehalt pro übertragenem Binärsymbol) maximal gleich dem Entscheidungsgehalt:

$$H_{\max} = 1/2 \cdot \log_2(2) + 1/2 \cdot \log_2(2) = 1 \text{ bit/Binärsymbol.}$$

Dagegen gilt für die Entropien der beiden anderen Binärsignale:

$$\begin{aligned} H &= \frac{3}{4} \cdot \log_2\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{4} \cdot \log_2(4) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \log_2(4) - \frac{3}{4} \cdot \log_2(3) = \\ &= 2 - \frac{3}{4} \cdot \log_2(3) = 0.811 \text{ bit/Binärsymbol.} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die relative Redundanz dieser Signale:

$$r = \frac{H_{\max} - H}{H_{\max}} \approx 18.9\%.$$

- b) Der quadratische Mittelwert ist unabhängig von  $p$  gleich  $m_{2a} = 1$ :

$$m_{2a} = E[a_v^2] = p \cdot (+1)^2 + (1 - p) \cdot (-1)^2 = 1.$$

- c) Für den linearen Mittelwert erhält man

$$\begin{aligned} m_a &= E[a_v] = p \cdot (+1) + (1 - p) \cdot (-1) = 2p - 1. \\ \Rightarrow \quad p = 0.75 : m_a &\underline{= 0.50}, \quad p = 0.50 : m_a \underline{= 0}, \quad p = 0.25 : m_a \underline{= -0.50}. \end{aligned}$$

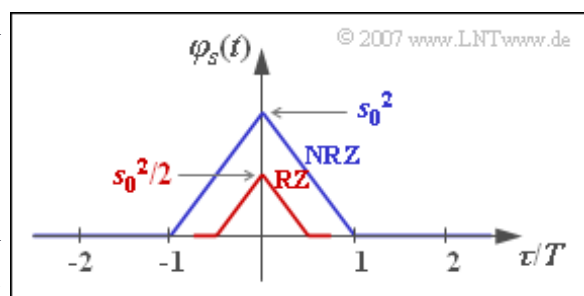
- d) Mit den Ergebnissen aus b) und d) erhält man:

$$\begin{aligned} p = 0.75 : \sigma_a^2 &\underline{= 0.75}, \\ p = 0.50 : \sigma_a^2 &\underline{= 1.00}, \\ p = 0.25 : \sigma_a^2 &\underline{= 0.75}. \end{aligned}$$

- e) Für  $p = 0.5$  gilt  $\varphi_a(\lambda = 0) = 1$  und  $\varphi_a(\lambda \neq 0) = 0$ . Daraus folgt:

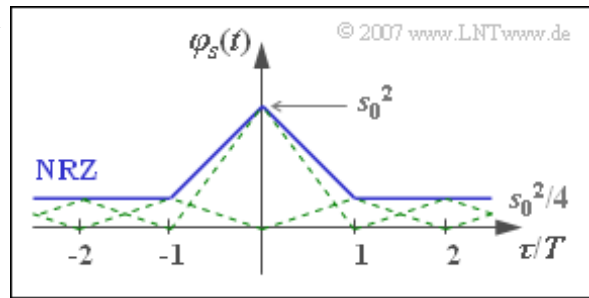
$$\varphi_s(\tau) = \frac{1}{T} \cdot \varphi_{gs}(\tau).$$

Damit ergeben sich sowohl beim NRZ- als auch beim RZ-Grundimpuls eine dreieckförmige AKF und ein  $\text{si}^2$ -förmiges LDS. Die Fläche unter dem LDS ist beim RZ-Impuls um den Faktor  $T_S/T$  kleiner als beim NRZ-Impuls, da sich auch die AKF-Werte bei  $\tau = 0$  um diesen Faktor unterscheiden. Das LDS ist in beiden Fällen kontinuierlich, da die AKF keinen Gleichanteil und keine periodischen Anteile beinhaltet.



Richtig sind also nur die beiden ersten Aussagen.

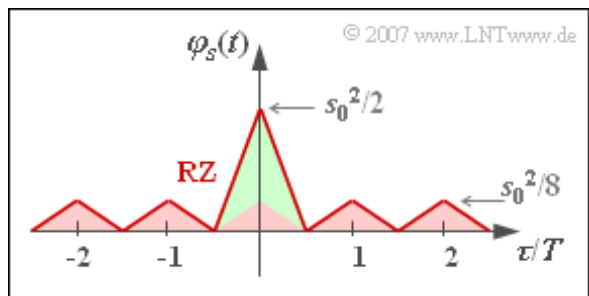
f) Für  $p = 0.75$  setzt sich die AKF  $\varphi_s(\tau)$  aus unendlich vielen Dreiecksfunktionen zusammen, die mit Ausnahme des mittleren Dreiecks um  $\tau = 0$  alle die gleiche Höhe  $s_0^2/4$  aufweisen. Entsprechend der Skizze kann man alle diese Dreiecksfunktionen zu einem Gleichanteil der Höhe  $m_a^2 \cdot s_0^2 = s_0^2/4$  und einem einzigen Dreieck um  $\tau = 0$  mit der Höhe  $\sigma_a^2 \cdot s_0^2 = 3/4 \cdot s_0^2$  zusammenfassen.



Im LDS führt dies zu einem kontinuierlichen,  $\text{si}^2$ -förmigem Anteil und zu einer Diracfunktion bei  $f = 0$ . Das Gewicht dieses Diracs ist  $s_0^2/4$ . Für  $p = 0.25$  ergibt sich die gleiche AKF wie mit  $p = 0.75$ , da sowohl der quadratische Mittelwert  $m_{2a} = 1$  als auch  $m_a^2 = 0.25$  übereinstimmen. Somit stimmen natürlich auch die Leistungsdichtespektren überein.

Richtig sind somit alle Aussagen mit Ausnahme der dritten.

g) Mit dem RZ-Tastverhältnis  $T_S/T = 0.5$  ergibt sich die skizzierte AKF, die auch durch eine periodische Dreiecksfunktion der Höhe  $s_0^2/8$  (mit roter Füllung) und einem einzigen Dreieckimpuls der Höhe  $3/8 \cdot s_0^2$  (grün gefüllt) dargestellt werden kann. Dieser nichtperiodische Anteil führt zu einem kontinuierlichen,  $\text{si}^2$ -förmigen LDS mit Nullstellen bei Vielfachen von  $2/T$ .



Das periodische Dreieckssignal bewirkt Diracfunktionen bei Vielfachen von  $1/T$ . Aufgrund der Antimetrie des periodischen Anteils besitzen die Diracfunktionen bei Vielfachen von  $2/T$  jeweils das Gewicht 0. Die Gewichte der Diracfunktionen im Abstand  $1/T$  sind proportional zum kontinuierlichen LDS-Anteil.

Beide Lösungsvorschläge sind somit richtig.

## Musterlösung zur Aufgabe A2.3

a) Die Nyquistfrequenz  $f_{\text{Nyq}} = 100 \text{ MHz}$  kann aus der Grafik abgelesen werden. Daraus folgt mit den Aussagen von Kapitel 1.3:

$$f_{\text{Nyq}} = \frac{1}{2 \cdot T} \Rightarrow T = \frac{1}{2 \cdot f_{\text{Nyq}}} = \underline{5 \text{ ns}}.$$

b) Beim Binärsystem ist die Bitrate gleichzeitig der Informationsfluss und es gilt:

$$R_B = 1/T = \underline{200 \text{ Mbit/s}} = 2 \cdot f_{\text{Nyq}} \cdot \text{bit/Hz}.$$

c) Die Sendeleistung ist gleich dem Integral über  $\Phi_s(f)$  und kann als Dreiecksfläche berechnet werden:

$$P_S = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_s(f) df = 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{Hz}} \cdot 200 \text{ MHz} = \underline{200 \text{ mW}}.$$

d) Richtig sind die beiden ersten Aussagen. Die Fourierrücktransformierte des Leistungsdichtespektrums  $\Phi_s(f)$  ergibt die  $\text{si}^2$ -förmige AKF  $\varphi_s(\tau)$ . Allgemein gilt zudem folgender Zusammenhang:

$$\varphi_s(\tau) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} 1/T \cdot \varphi_a(\lambda) \cdot \varphi_{gs}^*(\tau - \lambda \cdot T).$$

Bei einem redundanzfreien Binärsystem gilt jedoch  $\varphi_a(\lambda = 0) = 1$ , während alle anderen diskreten AKF-Werte  $\varphi_a(\lambda \neq 0)$  gleich 0 sind. Somit hat auch die Energie-AKF einen  $\text{si}^2$ -förmigen Verlauf:

$$\varphi_{gs}^*(\tau) = T \cdot \varphi_s(\tau).$$

*Hinweis:* Energie-AKF und Energie-LDS werden in diesem Tutorial jeweils mit Punkt versehen.

Dagegen trifft die letzte Aussage nicht zu. Für die folgende Begründung nehmen wir vereinfachend an, dass  $g_s(t)$  symmetrisch sei und somit  $G_s(f)$  reell ist. Dann gilt:

$$\Phi_s(f) = 1/T \cdot |G_s(f)|^2 \Rightarrow G_s(f) = \sqrt{T \cdot \Phi_s(f)} \quad \bullet \text{---} \circ \quad g_s(t).$$

Aufgrund der Quadratwurzel in der obigen Gleichung ist der Sendegrundimpuls  $g_s(t)$  nicht  $\text{si}^2$ -förmig im Gegensatz zum Detektionsgrundimpuls  $g_d(t)$ , der formgleich mit der Energie-AKF  $\varphi_{gs}^*(\tau)$  und damit  $\text{si}^2$ -förmig ist. Gleichzeitig gilt  $\varphi_{gs}^*(\tau) = g_s(\tau) * g_s(-\tau)$ .

e) Die AKF  $\varphi_s(\tau)$  ist auf den Bereich  $|\tau| \leq T$  begrenzt, wenn der Sendegrundimpuls ein NRZ-Rechteck ist. Somit ergibt sich aus der Grafik die Symboldauer  $T = \underline{10 \text{ ns}}$ .

f) Beim Quaternärsignal ergibt sich wegen der doppelten Symboldauer der gleiche Informationsfluss wie beim obigen Binärsignal:

$$R_B = \log_2(4)/T = \underline{200 \text{ Mbit/s}}.$$

g) Die Sendeleistung ist gleich dem AKF-Wert bei  $\tau = 0$  und kann aus der Grafik abgelesen werden:

$$P_S = \underline{100 \text{ mW}}.$$

h) Beim redundanzfreien Quaternärsignal mit NRZ-Rechteckimpulsen gilt für die mittlere Sendeleistung:

$$P_S = 1/4 \cdot [(-s_0)^2 + (-s_0/3)^2 + (+s_0/3)^2 + (+s_0)^2] = 5/9 \cdot s_0^2$$

$$\Rightarrow s_0^2 = 9/5 \cdot P_S = 9/5 \cdot 100 \text{ mW} \underline{\underline{= 180 \text{ mW}}}.$$

## Musterlösung zur Aufgabe A2.4

a) Im Signal  $s_2(t)$  erkennt man die Realisierung des vorne angegebenen Dualcodes. Dagegen wurde beim Signal  $s_1(t)$  ein Graycode  $\Rightarrow$  Lösungsvorschlag 1 mit folgender Zuordnung verwendet:

$$\mathbf{HH} \Leftrightarrow -1, \mathbf{HL} \Leftrightarrow -1/3, \mathbf{LL} \Leftrightarrow +1/3, \mathbf{LH} \Leftrightarrow +1.$$

b) Die Wahrscheinlichkeit  $p$ , dass der Amplitudenwert 3V aufgrund des gaußverteilten Rauschens mit der Streuung  $\sigma_d$  die benachbarte Entscheidungsschwelle 2V unterschreitet, soll 1% betragen. Daraus folgt:

$$p = Q\left(\frac{3\text{ V} - 2\text{ V}}{\sigma_d}\right) = 1\% \Rightarrow 1\text{ V}/\sigma_d \approx 2.33 \Rightarrow \sigma_d \approx \underline{0.43\text{ V}}.$$

c) Die beiden äußeren Symbole werden jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  verfälscht, die beiden inneren mit der doppelten Wahrscheinlichkeit ( $2p$ ). Durch Mittelung unter Berücksichtigung gleicher Symbolauftretswahrscheinlichkeiten erhält man

$$p_S = 1.5 \cdot p = \underline{1.5\%}.$$

d) Jeder Symbolfehler führt genau zu einem Bitfehler. Da jedoch jedes Quaternärsymbol genau zwei Binärsymbole beinhaltet, ergibt sich für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_B = p_S/2 = \underline{0.75\%}.$$

e) Bei der Berechnung der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $p_S$  wird das verwendete Mapping nicht berücksichtigt. Wie in der Teilaufgabe c) erhält man somit  $p_S = \underline{1.5\%}$ .

f) Die beiden äußeren Symbole werden mit  $p$  verfälscht und führen auch beim Dualcode jeweils nur zu einem Bitfehler. Die inneren Symbole werden mit  $2p$  verfälscht und führen nun im Mittel zu 1.5 Bitfehlern. Unter Berücksichtigung des Faktors 2 im Nenner – siehe Teilaufgabe (d) – erhält man somit für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit des Dualcodes:

$$p_B = \frac{1}{4} \cdot \frac{p + 2p \cdot 1.5 + 2p \cdot 1.5 + p}{2} = p = \underline{1\%}.$$

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.4

a) Entsprechend der Beschreibung auf der Angabenseite steht „LHH“ für den Amplitudenkoeffizienten  $a_3$  und „HLL“ für  $a_8$ .

b) Die äußeren Koeffizienten ( $a_1$  und  $a_8$ ) werden jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 1\%$  verfälscht, die  $M - 2 = 6$  inneren mit der doppelten Wahrscheinlichkeit ( $2p$ ). Durch Mittelung erhält man:

$$p_s = \frac{2 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{8} \cdot p = \underline{1.75\%}.$$

c) Jeder Übertragungsfehler (Symbolfehler) hat beim Graycode genau einen Bitfehler zur Folge. Da jedoch jedes Oktalsymbol drei Binärzeichen beinhaltet, gilt

$$p_B = p_s/3 = \underline{0.583\%}.$$

d) Von den insgesamt sieben möglichen Übergängen (jeweils in beiden Richtungen) führen zu

- einem Fehler: **HLH**  $\Leftrightarrow$  **LLH**,
- zwei Fehlern: **HLL**  $\Leftrightarrow$  **HHH**, **LLL**  $\Leftrightarrow$  **LHH**, **HHL**  $\Leftrightarrow$  **HLH**, **LLH**  $\Leftrightarrow$  **LHL**,
- drei Fehlern: **HHH**  $\Leftrightarrow$  **LLL**, **LHH**  $\Leftrightarrow$  **HHL**.

Daraus folgt:

$$p_B = \frac{p}{3} \cdot \frac{1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{7} = \frac{15}{21} \cdot p = \underline{0.714\%}.$$



## Musterlösung zur Aufgabe A2.5

a) Entsprechend der angegebenen Gleichung gilt mit  $M = 3$  und  $\sigma_d/s_0 = 0.25$ :

$$p_s = \frac{2 \cdot (M - 1)}{M} \cdot Q\left(\frac{s_0}{(M - 1) \cdot \sigma_d}\right) = 4/3 \cdot Q(2) = 4/3 \cdot 0.0228 \approx 3\%.$$

b) Bei doppeltem Rauscheffektivwert nimmt auch die Fehlerwahrscheinlichkeit signifikant zu:

$$p_s = 4/3 \cdot Q(1) = 4/3 \cdot 0.1587 \approx 21.2\%.$$

c) Die beiden äußeren Symbole werden jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $p = Q(s_0/(2 \cdot \sigma_d)) = 0.1587$  verfälscht. Die Verfälschungswahrscheinlichkeit des Symbols „0“ ist doppelt so groß (es wird durch zwei Schwellen begrenzt). Unter Berücksichtigung der einzelnen Symbolwahrscheinlichkeiten erhält man:

$$p_s = 1/4 \cdot p + 1/2 \cdot 2p + 1/4 \cdot p = 1.5 \cdot p = 1.5 \cdot 0.1587 \approx 23.8\%.$$

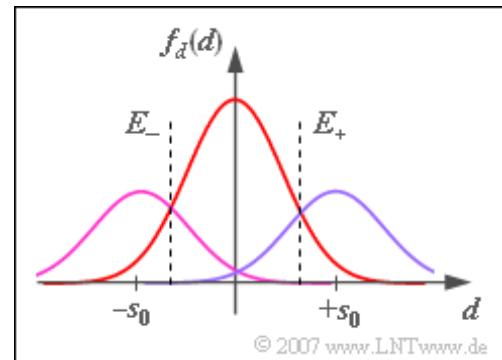
d) Da das Symbol „0“ häufiger auftritt und zudem in beiden Richtungen verfälscht werden kann, sollten die Schwellen nach außen verschoben werden. Die optimale Entscheiderschwelle  $E_{+, \text{opt}}$  ergibt sich aus dem Schnittpunkt der beiden in der Grafik gezeigten Gaußfunktionen. Es muss gelten:

$$\frac{1/2}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_d} \cdot \exp\left[-\frac{E_+^2}{2 \cdot \sigma_d^2}\right] = \frac{1/4}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_d} \cdot \exp\left[-\frac{(s_0 - E_+)^2}{2 \cdot \sigma_d^2}\right]$$

$$\Rightarrow \exp\left[\frac{(s_0 - E_+)^2 - E_+^2}{2 \cdot \sigma_d^2}\right] = 1/2$$

$$\Rightarrow \exp\left[\frac{1 - 2 \cdot E_+/s_0}{2 \cdot \sigma_d^2/s_0^2}\right] = 1/2$$

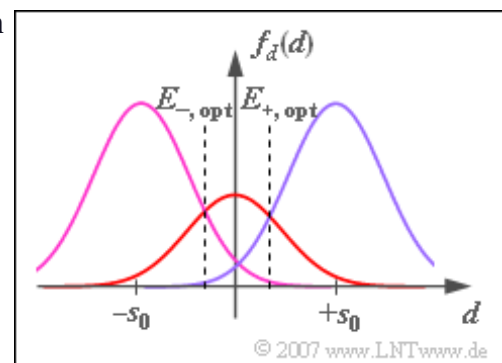
$$\Rightarrow \frac{E_+}{s_0} = \frac{1}{2} + \frac{\sigma_d^2}{s_0^2} \cdot \ln(2) \approx 0.673 \approx 2/3.$$



e) Mit dem näherungsweisen Ergebnis aus d) erhält man:

$$\begin{aligned} p_s &= 1/4 \cdot Q\left(\frac{s_0/3}{\sigma_d}\right) + 2 \cdot 1/2 \cdot Q\left(\frac{2s_0/3}{\sigma_d}\right) + 1/4 \cdot Q\left(\frac{s_0/3}{\sigma_d}\right) = \\ &= 1/2 \cdot Q(2/3) + Q(4/3) = 1/2 \cdot 0.251 + 0.092 \approx 21.7\%. \end{aligned}$$

f) Nach ähnlicher Rechnung wie unter Punkt d) erhält man  $E_+ = 1 - 0.673 \approx 0.327 \approx 1/3$ . Es gilt weiterhin  $E_- = -E_+$ .



g) Ähnlich wie in der Musterlösung zur Teilaufgabe e) erhält man nun:

$$\begin{aligned} p_s &= 0.4 \cdot Q(4/3) + 2 \cdot 0.2 \cdot Q(2/3) + 0.4 \cdot Q(4/3) = \\ &= 0.4 \cdot (0.092 + 0.251 + 0.092) \approx \underline{17.4\%}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich demnach eine kleinere Symbolfehlerwahrscheinlichkeit (17.4 % gegenüber 21.2 %) als bei gleichwahrscheinlichen Amplitudenkoeffizienten. Allerdings liegt nun keine redundanzfreie Codierung mehr vor, auch wenn die Amplitudenkoeffizienten statistisch voneinander unabhängig sind. Während bei gleichwahrscheinlichen Ternärsymbolen die Entropie  $H = \log_2(3) = 1.585$  bit/Ternärsymbol beträgt, woraus die äquivalente Bitrate (der Informationsfluss)  $R_B = H/T$  berechnet werden kann, gilt mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_0 = 0.2$  und  $p_- = p_+ = 0.4$ :

$$\begin{aligned} H &= 0.2 \cdot \log_2(5) + 2 \cdot 0.4 \cdot \log_2(2.5) = \\ &= 0.2 \cdot 2.322 + 0.8 \cdot 1.322 \approx \underline{1.522 \text{ bit/Ternärsymbol}}. \end{aligned}$$

Die äquivalente Bitrate ist also um 4 % kleiner, als sie für  $M = 3$  maximal möglich wäre.

**Musterlösung zur Aufgabe A2.6**

a) Die erste Aussage trifft nicht zu: Beispielsweise ergibt sich beim AWGN-Kanal (*Additives Weißes Gaußsches Rauschen*) mit einem 4B3T-Code im Vergleich zum redundanzfreien Binärcode eine deutlich größere Fehlerwahrscheinlichkeit aufgrund der ternären Entscheidung. Der wesentliche Grund für die Verwendung eines redundanten Übertragungscode ist vielmehr, dass über einen „Telefonkanal“ kein Gleichsignalanteil übertragen werden kann.

Die um 25% kleinere Schrittgeschwindigkeit ( $1/T$ ) des 4B3T-Codes gegenüber dem redundanzfreien Binärcode kommt ebenfalls den Übertragungseigenschaften von symmetrischen Kupferleitungen (starker Dämpfungsanstieg mit der Frequenz) entgegen. Bei gegebener Leitungsdämpfung lässt sich mit dem 4B3T-Code eine größere Länge überbrücken als mit einem redundanzfreien Binärsignal. Richtig sind also die Aussagen 2 und 3.

b) Die 4B3T-Codierung ergibt mit dem Initialwert  $\Sigma_0 = 0$ :

$$\mathbf{HHLL} \Rightarrow +++ (\Sigma_1 = 3),$$

$$\mathbf{LHLL} \Rightarrow - + \mathbf{0} (\Sigma_2 = 3),$$

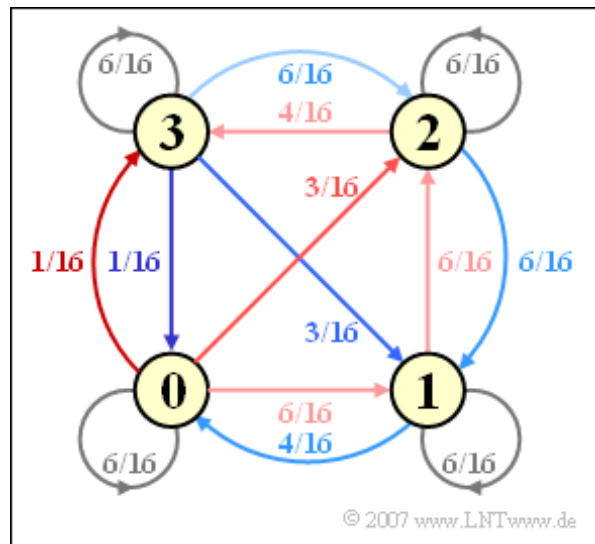
$$\mathbf{LHHL} \Rightarrow -- + (\Sigma_3 = 2),$$

$$\mathbf{HLHL} \Rightarrow + -- (\Sigma_4 = 1).$$

Der gesuchte Amplitudenkoeffizient ist somit  $a_{12} = \underline{-1}$ .

c) Aus der Farbgebung der vorgegebenen Codetabelle kann das folgende Markovdiagramm ermittelt werden. Daraus kann man die gesuchten Übergangswahrscheinlichkeiten ablesen:

$$\begin{aligned} \Pr(\Sigma_{l+1} = 0 \mid \Sigma_l = 0) &= 6/16 = 0.375, \\ \Pr(\Sigma_{l+1} = 2 \mid \Sigma_l = 0) &= 3/16 = 0.1875, \\ \Pr(\Sigma_{l+1} = 0 \mid \Sigma_l = 2) &= 0. \end{aligned}$$



d) Die erste Aussage ist falsch, was man an den Asymmetrien im Markovdiagramm erkennt. Dagegen gibt es Symmetrien bezüglich der Zustände „0“ und „3“ sowie zwischen „1“ und „2“. In der folgenden Berechnung schreiben wir anstelle von  $\Pr(\Sigma_l = 0)$  vereinfachend  $\Pr(0)$ . Unter Ausnutzung der Eigenschaft  $\Pr(3) = \Pr(0)$  und  $\Pr(2) = \Pr(1)$  ergeben sich aus dem Markovdiagramm folgende Gleichungen:

$$\Pr(0) = 6/16 \cdot \Pr(0) + 4/16 \cdot \Pr(1) + 1/16 \cdot \Pr(3) \Rightarrow 9/16 \cdot \Pr(0) = 4/16 \cdot \Pr(1)$$

Aus der weiteren Bedingung  $\Pr(0) + \Pr(1) = 1/2$  folgt weiter:

$$\Pr(0) = \Pr(3) = 9/26, \quad \Pr(1) = \Pr(2) = 4/26.$$

Diese Berechnung basiert auf der „Summe der ankommenden Pfeile im Zustand 0“. Man könnte auch Gleichungen für die drei anderen Zustände angeben, die aber alle zum gleichen Ergebnis führen:

$$\Pr(1) = 6/16 \cdot \Pr(0) + 6/16 \cdot \Pr(1) + 6/16 \cdot \Pr(2) + 3/16 \cdot \Pr(3),$$

$$\Pr(2) = 3/16 \cdot \Pr(0) + 6/16 \cdot \Pr(1) + 6/16 \cdot \Pr(2) + 6/16 \cdot \Pr(3),$$

$$\Pr(3) = 1/16 \cdot \Pr(0) + 4/16 \cdot \Pr(2) + 6/16 \cdot \Pr(3).$$

Richtig sind also die Aussagen 2 und 3.

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.6

a) Richtig ist der zweite Lösungsvorschlag. Die erste Ternärfolge würde sich mit  $\Sigma_0 = 2$  ergeben, die letzte mit  $\Sigma_0 = 5$ .

b) Ausgehend von  $\Sigma_0 = 0$  ergeben sich für die laufende digitale Summe folgende Werte:

- $\Sigma_1 = 0$ ,
- $\Sigma_2 = 1$ ,
- $\Sigma_3 = 4$ ,
- $\Sigma_4 = 3$ ,
- $\Sigma_5 = 2$ ,
- $\Sigma_6 = \underline{3}$ .

c) Es gilt  $K_{+1} = \underline{6}$ . Auch in der codierten Folge dieser Aufgabe erkennt man sechs aufeinanderfolgende Pluszeichen, die von insgesamt drei Blöcken stammen: Zwei am Ende des zweiten Blockes, dann drei „+1“ im Block 3 und schließlich eine „+1“ am Beginn des vierten Blocks. In gleicher Weise gilt  $K_{-1} = 6$  (siehe Lösungsvorschlag 3 in der ersten Teilaufgabe).

d) Ist  $\Sigma_1 = 2$ , so führt die Binärfolge „HLHH HHLH“ zur Ternärfolge „+ 0 0 0 0 –“. Mehr als  $K_0 = \underline{4}$  aufeinanderfolgende Nullen sind nicht möglich.

e) Die Ternärfolge lautet hier: **0 – + + – – – – – + + + 0 0 0 0 –**. Die laufende digitale Summe baut sich wie folgt auf:

- $\Sigma_1 = 5$ ,
- $\Sigma_2 = 4$ ,
- $\Sigma_3 = 1$ ,
- $\Sigma_4 = 2$ ,
- $\Sigma_5 = 3$ ,
- $\Sigma_6 = \underline{2}$ .

## Musterlösung zur Aufgabe A2.7

a) Die Modulo-2-Addition kann auch als Antivalenz aufgefasst werden. Es gilt  $b_v = +1$ , falls sich  $q_v$  und  $b_{v-1}$  unterscheiden, andernfalls ist  $b_v = -1$  zu setzen. Mit dem Startwert  $b_0 = -1$  erhält man:

$$b_1 = +1, b_2 = +1, b_3 = -1, b_4 = +1, b_5 = +1, b_6 = -1, \\ b_7 = +1, b_8 = +1, b_9 = +1, b_{10} = +1, b_{11} = +1, b_{12} = -1.$$

b) Die AMI-Codierung liefert die folgenden Amplitudenkoeffizienten:

$$a_1 = +1, a_2 = 0, a_3 = -1, a_4 = +1, a_5 = 0, a_6 = -1, \\ a_7 = +1, a_8 = 0, a_9 = 0, a_{10} = 0, a_{11} = 0, a_{12} = -1.$$

Zu diesem Ergebnis kommt man entweder über die Gleichung  $a_v = (b_v - b_{v-1})/2$  oder durch direkte Anwendung der einfachen AMI-Codierregel:

- Ein Quellensymbol  $q_v = -1$  führt stets zu  $a_v = 0$ .
- Die Quellensymbole  $q_v = +1$  führen alternierend zu  $a_v = +1$  und  $a_v = -1$ .

c) Der AMI-Code liefert im Bereich zwischen  $v = 8$  und  $v = 11$  vier aufeinanderfolgende Nullen. Beim HDB3-Code würden diese vier Symbole mit „+ 0 0 +“ markiert. Dadurch wird zur Kenntlichmachung die AMI-Regel bewusst verletzt. Dagegen ersetzt der B6ZS-Code nur Nullfolgen der Länge 6  $\Rightarrow$  Lösungsvorschlag 1.

d) Unter der Annahme gleichwahrscheinlicher Binärwerte  $\pm 1$  erhält man  $\Pr(a_v = 0) = \Pr(q_v = -1) = 1/2$  und aus Symmetriegründen  $\Pr(a_v = +1) = \Pr(a_v = -1) = 1/4$ .

e) Mit den unter d) berechneten Wahrscheinlichkeiten erhält man:

$$E[a_v] = 1/4 \cdot (+1) + 1/2 \cdot 0 + 1/4 \cdot (-1) = 0, \\ E[a_v^2] = 1/4 \cdot (+1)^2 + 1/2 \cdot 0^2 + 1/4 \cdot (-1)^2 = 0.5.$$

f) Der AKF-Wert bei  $\lambda = 0$  ist gleich dem quadratischen Mittelwert der Amplitudenkoeffizienten:

$$\varphi_a(\lambda = 0) = E[a_v^2] = 0.5.$$

Da die Ordnung des AMI-Codes  $N = 1$  ist, gilt für  $\lambda > 1$ :

$$\varphi_a(\lambda > 1) = E^2[a_v] = 0.$$

Der AKF-Wert  $\varphi_a(\lambda = 1)$  muss durch Mittelung bestimmt werden:

$$\varphi_a(\lambda = 1) = E[a_v \cdot a_{v+1} \cdot \Pr(a_v \cap a_{v+1})].$$

Von den neun Kombinationsmöglichkeiten für  $a_v \cdot a_{v+1}$  liefern nur vier einen von 0 verschiedenen Wert. In den anderen Fällen ist entweder  $a_v = 0$  oder  $a_{v+1} = 0$ . Da beim AMI-Code aber auch

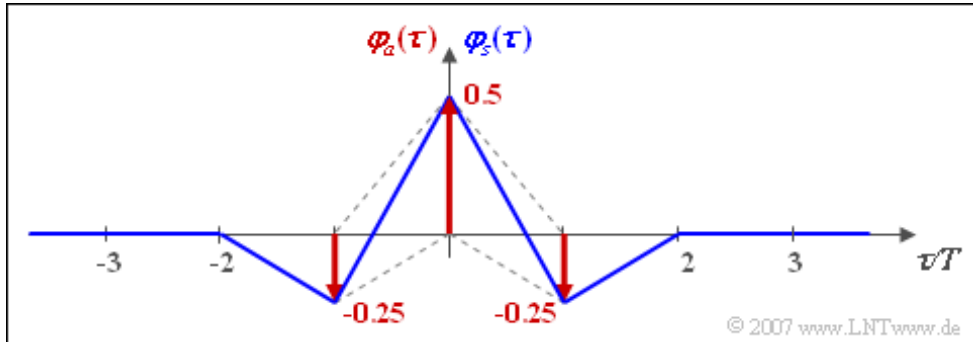
$$\Pr[(a_v = +1) \cap (a_{v+1} = +1)] = 0, \\ \Pr[(a_v = -1) \cap (a_{v+1} = -1)] = 0$$

zutritt, erhält man mit

$$\begin{aligned} \Pr[(a_\nu = +1) \cap (a_{\nu+1} = -1)] &= \Pr(a_\nu = +1) \cdot \Pr(a_{\nu+1} = -1 | a_\nu = +1) = \\ &= 1/4 \cdot 1/2 = 1/8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr[(a_\nu = -1) \cap (a_{\nu+1} = +1)] &= \Pr(a_\nu = -1) \cdot \Pr(a_{\nu+1} = +1 | a_\nu = -1) = \\ &= 1/4 \cdot 1/2 = 1/8 \end{aligned}$$

als Endergebnis  $\varphi_a(\lambda = +1) = \varphi_a(\lambda = -1) = -0.25$ , da die AKF stets eine gerade Funktion ist. Hierbei ist berücksichtigt, dass nach  $a_\nu = +1$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $a_{\nu+1} = 0$  und  $a_{\nu+1} = -1$  folgt.



Die obige Grafik zeigt die diskrete AKF  $\varphi_a(\lambda)$  der Amplitudenkoeffizienten und die AKF  $\varphi_s(\tau)$  des Sendesignals unter der Voraussetzung von NRZ-Rechteckimpulsen und AMI-Codierung. Dabei ist die blau gezeichnete AKF  $\varphi_s(\tau)$  das Ergebnis der (diskreten) Faltung zwischen der diskreten AKF  $\varphi_a(\lambda)$  – rot gezeichnet – und der dreieckförmigen Energie-AKF des Sendegrundimpulses.

**g)** Aus der angegebenen Gleichung erhält man unter Berücksichtigung der in f) berechneten diskreten AKF-Werte  $\varphi_a(\lambda = 0) = 1/2$ ,  $\varphi_a(|\lambda| = 1) = -1/4$  und  $\varphi_a(|\lambda| > 1) = 0$ :

$$\begin{aligned} \Phi_a(f) &= \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \varphi_a(\lambda) \cdot e^{-j 2\pi f \lambda T} = \varphi_a(\lambda = 0) + 2 \cdot \varphi_a(\lambda = 1) \cdot \cos(2\pi f \lambda T) = \\ &= 1/2 \cdot [1 - \cos(2\pi f T)] = \sin^2(\pi f T). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt:

$$\Phi_a(f = 0) \equiv \underline{0}, \quad \Phi_a(f = 1/(2T)) = \sin^2(\pi/2) \equiv \underline{1}.$$

## Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.7

a) Beim AMI-Code kann das LDS wie folgt umgeformt werden:

$$\Phi_s(f) = s_0^2 \cdot T \cdot \sin^2(\pi f T) \cdot \text{sinc}^2(\pi f T).$$

Dieser Kurvenverlauf ist rot dargestellt. Das LDS der Amplitudenkoeffizienten ist  $\Phi_a(f) = \sin^2(\pi f T)$ .

b) Nach Umformung erhält man für den Duobinär code:

$$\Phi_s(f) = s_0^2 \cdot T \cdot \cos^2(\pi f T) \cdot \text{sinc}^2(\pi f T).$$

In der Grafik ist der Duobinär code blau gezeichnet. Weiterhin gilt  $\Phi_a(f) = \cos^2(\pi f T)$ .

c) Der Bipolarcode zweiter Ordnung unterscheidet sich vom AMI-Code nur durch den Faktor 2 im Argument der  $\text{sin}^2$ -Funktion:

$$\Phi_s(f) = s_0^2 \cdot T \cdot \sin^2(2\pi f T) \cdot \text{sinc}^2(\pi f T).$$

Der grüne Kurvenzug stellt diesen Funktionsverlauf dar. Gegenüber dem AMI-Code ist  $\Phi_a(f)$  genau halb so breit.

d) Die Sendeleistung  $P_S$  ist gleich dem Integral über das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_s(f)$  und ist für alle hier betrachteten Codes gleich  $\Rightarrow$  Lösungsvorschlag 4. Dies folgt auch aus der Leistungsberechnung durch Scharmittelung:

$$\begin{aligned} P_S &= \Pr[s(t) = +s_0] \cdot (+s_0)^2 + \Pr[s(t) = -s_0] \cdot (-s_0)^2 = \\ &= 1/4 \cdot s_0^2 + 1/4 \cdot s_0^2 = 1/2 \cdot s_0^2. \end{aligned}$$

e) Gleichsignalfreiheit liegt vor, wenn das Leistungsdichtespektrum bei der Frequenz  $f = 0$  keinen Anteil aufweist. Dies gilt für den AMI-Code und den Bipolarcode zweiter Ordnung  $\Rightarrow$  Lösungsvorschläge 1 und 3. Diese Aussage bedeutet nicht nur, dass  $s(t)$  keinen Gleichanteil besitzt, also dass  $\Phi_s(f)$  keine Diracfunktion bei  $f = 0$  besitzt. Es bedeutet darüber hinaus auch, dass der kontinuierliche LDS-Anteil bei  $f = 0$  verschwindet. Dies wird genau dann erreicht, wenn die lange „+1“- und die lange „-1“-Folge durch die Codiervorschrift ausgeschlossen werden.

f) Beide vorgegebenen Lösungsvorschläge treffen in der Praxis zu.



## Musterlösung zur Aufgabe A2.8

a) Aus dem angegebenen S/N-Verhältnis erhält man:

$$10 \cdot \lg s_0^2 \cdot T/N_0 = 10 \text{ dB} \Rightarrow N_0 = s_0^2 \cdot T/10 \\ \Rightarrow \sigma_d^2 = 1.12 \cdot N_0/(2T) = 0.056 \cdot s_0^2 \Rightarrow \sigma_d/s_0 = \underline{0.237}.$$

b) Daraus folgt für die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit des binären redundanzfreien Referenzsystems:

$$p_s = Q(s_0/\sigma_d) \approx Q(4.22) = \underline{1.22 \cdot 10^{-5}}.$$

c) Die Symboldauer  $T$  des AMI-codierten Signals ist gleich der Bitdauer  $T_B$  des Binärsignals. Deshalb ändert sich an den Bandbreitenverhältnissen nichts und man erhält den gleichen Rauscheffektivwert wie unter Punkt a) berechnet:

$$\sigma_d/s_0 = \underline{0.237}.$$

d) Aufgrund der ternären Entscheidung wird das Argument der Q-Funktion halbiert:

$$p_s \approx 4/3 \cdot Q(2.11) = 4/3 \cdot 1.74 \cdot 10^{-2} = \underline{2.32 \cdot 10^{-2}}.$$

Der Faktor 4/3 berücksichtigt hierbei, dass das innere Symbol „0“ nach zwei Richtungen hin verfälscht werden kann.

e) Bei Anwendung einer 4B3T-Codierung wird die Symbolrate um 25% verringert. Um den gleichen Faktor 0.75 wird dadurch die Rauschleistung kleiner als unter a) und c) berechnet. Daraus folgt:

$$\sigma_d/s_0 = \sqrt{0.75} \cdot 0.237 \approx \underline{0.205}.$$

f) Aufgrund des kleineren Rauscheffektivwertes ergibt sich nun eine kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit als mit dem AMI-Code:

$$p_s \approx 4/3 \cdot Q\left(\frac{0.5}{0.205}\right) = 4/3 \cdot 0.833 \cdot 10^{-2} = \underline{1.11 \cdot 10^{-2}}.$$

Die deutlich kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit des redundanzfreien Binär codes kann der 4B3T-Code aufgrund der ternären Entscheidung (halbe Augenöffnung) jedoch nicht erreichen.