

Musterlösung zur Aufgabe A3.1

a) Die charakteristische Kabeldämpfung $a_* = 60$ dB entspricht in etwa 6.9 Np. Deshalb muss gelten:

$$\alpha_2 \cdot l \cdot R_B/2 = 6.9 \text{ Np} \Rightarrow l = \frac{6.9 \text{ Np}}{0.2722 \frac{\text{Np}}{\text{km} \cdot \sqrt{\text{MHz}}} \cdot \sqrt{70 \text{ MHz}}} \approx \underline{3 \text{ km}}.$$

b) Mit den Substitutionen

$$x = t/T, \quad K_1 = \frac{a_*/T}{\sqrt{2\pi^2}}, \quad K_2 = \frac{a_*^2}{2\pi}$$

kann die Impulsantwort wie folgt beschrieben werden:

$$h_K(x) = K_1 \cdot x^{-3/2} \cdot e^{-K_2/x}.$$

Durch Nullsetzen der Ableitung folgt daraus:

$$\begin{aligned} -3/2 \cdot K_1 \cdot x^{-5/2} \cdot e^{-K_2/x} + K_1 \cdot x^{-3/2} \cdot e^{-K_2/x} \cdot (-K_2) \cdot (-x^{-2}) &= 0 \\ \Rightarrow 3/2 \cdot x^{-5/2} = K_2 \cdot x^{-7/2} &\Rightarrow x_{\max} = 2/3 \cdot K_2 = a_*^2/(3\pi). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für 60 dB Kabeldämpfung ($a_* \approx 6.9$ Np):

$$x_{\max} = t_{\max}/T: \quad t_{\max}/T = 6.9^2/(3\pi) \approx \underline{5}.$$

c) Setzt man das Ergebnis von b) in die vorgegebene Gleichung ein, so erhält man (zur Vereinfachung verwenden wir a anstelle von a_*):

$$\begin{aligned} h_K(t_{\max}) &= \frac{1}{T} \cdot \frac{a}{\sqrt{2\pi^2 \cdot \frac{a^6}{(3\pi)^3}}} \cdot \exp\left[-\frac{a^2}{2\pi} \cdot \frac{3\pi}{a^2}\right] \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{27\pi}{2}} \cdot e^{-3/2} \approx \frac{1}{T} \cdot \frac{1.453}{a^2}. \end{aligned}$$

Mit $a = 6.9$ kommt man somit zum Endergebnis:

$$\text{Max}[h_K(t)] = \frac{1.453}{6.9^2} \cdot 1/T \approx \underline{0.03 \cdot 1/T}.$$

d) Mit dem Ergebnis aus c) lautet die Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{a/T}{\sqrt{2\pi^2 \cdot (t_{5\%}/T)^3}} &= 0.05 \cdot 0.03 \cdot 1/T = 0.0015 \cdot 1/T \\ \Rightarrow (t_{5\%}/T)^{3/2} &= \frac{a}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot 0.0015} \approx 1036 \Rightarrow t_{5\%}/T \approx \underline{103.5}. \end{aligned}$$

Dieser Wert ist etwas zu groß, da der zweite Term $e^{-0.05} \approx 0.95$ vernachlässigt wurde. Die exakte Berechnung liefert $t_{5\%}/T \approx 97$.

e) Richtig ist der zweite Lösungsvorschlag. Allgemein gilt:

$$g_r(t) = g_s(t) \star h_K(t) = s_0 \cdot \int_{t-T/2}^{t+T/2} h_K(\tau) d\tau.$$

Da sich die Kanalimpulsantwort $h_K(t)$ innerhalb einer Symboldauer nur unwesentlich ändert, kann hierfür auch geschrieben werden:

$$g_r(t) = h_K(t) \cdot s_0 \cdot T.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.1

a) Der α_0 -Term bewirkt nur eine frequenzunabhängige Dämpfung und der β_1 -Term (lineare Phase) eine frequenzunabhängige Laufzeit. Alle anderen Terme tragen zu den (linearen) Verzerrungen bei. Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1 und 4.

b) Mit $a_0 = a_0 \cdot l$ muss folgende Gleichung erfüllt sein:

$$e^{-a_0} \geq 0.99 \Rightarrow a_0 < \ln \frac{1}{0.99} \approx 0.01 \text{ (Np)}.$$

Damit erhält man für die maximale Kabellänge

$$l_{\max} = \frac{a_0}{\alpha_0} = \frac{0.01 \text{ Np}}{0.00162 \text{ Np/km}} \approx \underline{6.173 \text{ km}}.$$

c) Für den Dämpfungsverlauf gilt bei Berücksichtigung aller Terme:

$$\begin{aligned} a_K(f) &= [\alpha_0 + \alpha_1 \cdot f + \alpha_2 \cdot \sqrt{f}] \cdot l = \\ &= [0.00162 + 0.000435 \cdot 70 + 0.2722 \cdot \sqrt{70}] \frac{\text{Np}}{\text{km}} \cdot 2 \text{ km} = \\ &= [0.003 + 0.061 + 4.555] \text{ Np} = \underline{4.619 \text{ Np}}. \end{aligned}$$

d) Entsprechend der Berechnung bei Punkt c) erhält man hier den Dämpfungswert 4.555 Np.

e) Für eine jede positive Größe x gilt:

$$\begin{aligned} x_{\text{Np}} = \ln x &= \frac{\lg x}{\lg e} = \frac{1}{20 \cdot \lg e} \cdot (20 \cdot \lg x) = 0.1151 \cdot x_{\text{dB}} \\ \Rightarrow x_{\text{dB}} &= 8.686 \cdot x_{\text{Np}}. \end{aligned}$$

Der Dämpfungswert 4.555 Np ist somit identisch mit 39.57 dB.

f) Mit der Beschränkung auf den Dämpfungsterm mit α_2 gilt für den Frequenzgang:

$$H_K(f) = e^{-\alpha_2 \cdot l \cdot \sqrt{f}} \cdot e^{-j \cdot \beta_1 \cdot l \cdot f} \cdot e^{-j \cdot \beta_2 \cdot l \cdot \sqrt{f}}.$$

Verzichtet man auf den β_1 -Phasenterm, so ändert sich bezüglich den Verzerrungen nichts. Lediglich die Phasen- und die Gruppenlaufzeit würden (beide gleich) um den Wert $\tau_1 = (\beta_1 \cdot l)/2\pi$ kleiner.

Verzichtet man auf den β_2 -Term, so ergeben sich dagegen völlig andere Verhältnisse:

- Der Frequenzgang $H_K(f)$ erfüllt nun nicht mehr die Voraussetzung eines kausalen Systems; bei einem solchen muss $H_K(f)$ minimalphasig sein.
- Die Impulsantwort $h_K(t)$ ist bei reellem Frequenzgang symmetrisch um $t = 0$, was nicht den Gegebenheiten entspricht.

Deshalb ist als eine Näherung für den Koaxialkabelfrequenzgang erlaubt:

$$a_K(f) = \alpha_2 \cdot l \cdot \sqrt{f}, \quad b_K(f) = a_K(f) \cdot \frac{\text{rad}}{\text{Np}}.$$

Das heißt: $a_K(f)$ und $b_K(f)$ eines Koaxialkabels sind formgleich und unterscheiden sich lediglich in ihren

Einheiten.

Bei einem Digitalsystem mit Bitrate $R_B = 140 \text{ Mbit/s} \Rightarrow R_B/2 = 70 \text{ Mbit/s}$ und Kabellänge $l = 2 \text{ km}$ gilt tatsächlich $a_* \approx 40 \text{ dB}$ (siehe Musterlösung zur letzten Teilaufgabe). Ein System mit vierfacher Bitrate ($R_B/2 = 280 \text{ Mbit/s}$) und halber Länge ($l = 1 \text{ km}$) führt zur gleichen charakteristischen Kabeldämpfung. Dagegen gilt für ein System mit $R_B/2 = 35 \text{ Mbit/s}$ und $l = 2 \text{ km}$:

$$a_{\text{dB}} = 0.2722 \frac{\text{Np}}{\text{km} \cdot \sqrt{\text{MHz}}} \cdot 2 \text{ km} \cdot \sqrt{35 \text{ MHz}} \cdot 8.6859 \frac{\text{dB}}{\text{Np}} \approx \underline{28 \text{ dB}}.$$

Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 1, 4 und 5.

Musterlösung zur Aufgabe A3.2

a) Die Symboldauer ist der Kehrwert der Bitrate:

$$T = \frac{1}{10^8 \text{ bit/s}} = 10^{-8} \text{ s} = \underline{10 \text{ ns}}.$$

b) Die Integration entsprechend der angegebenen Gleichung führt auf:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_G(f)|^2 df = \frac{N_0 \cdot f_G}{\sqrt{2}} = \frac{10^{-9} \text{ V/Hz} \cdot 5 \cdot 10^7 \text{ Hz}}{\sqrt{2}} \approx 0.035 \text{ V}^2$$

$$\Rightarrow \sigma_d = \underline{0.188 \text{ V}}.$$

c) Diese Werte können aus der Grafik entnommen werden:

$$g_0 = g_d(0) = \underline{0.790 \text{ V}}, \quad g_1 = g_d(10 \text{ ns}) = \underline{0.105 \text{ V}} = g_{-1}, \quad g_2 = g_{-2} \approx 0.$$

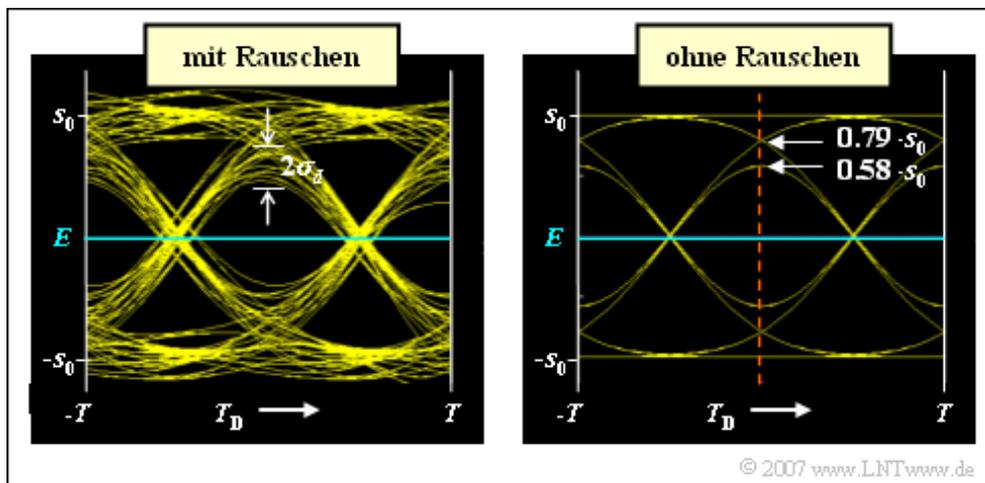
d) Mit den unter c) berechneten Grundimpulswerten erhält man für die vertikale Augenöffnung:

$$\ddot{o}(T_D) = 2 \cdot (g_0 - g_1 - g_{-1}) = 2 \cdot (0.790 \text{ V} - 2 \cdot 0.105 \text{ V}) = \underline{1.16 \text{ V}}.$$

Zusammen mit dem Rauscheffektivwert erhält man somit für die ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_U = Q\left(\frac{1.16 \text{ V}/2}{0.188 \text{ V}}\right) \approx Q(3.08) \approx \underline{10^{-3}}.$$

Die nachfolgende rechte Grafik zeigt das Augendiagramm ohne Rauschen. Man erkennt hieraus die vertikale Augenöffnung in Symbolmitte: $\ddot{o}(T_D = 0) = 2 \cdot 0.58 \cdot s_0$.



e) Aus obigem Augendiagramm erkennt man, dass das Nutzsignal zum Detektionszeitpunkt $T_D = 0$ sechs verschiedene Werte annehmen kann. In der oberen Augenhälfte sind dies:

1.) $g_0 + g_1 + g_{-1} = 0.790 \text{ V} + 2 \cdot 0.105 \text{ V} = 1 \text{ V} = s_0$

$$\Rightarrow p_1 = Q\left(\frac{1 \text{ V}}{0.188 \text{ V}}\right) \approx 5 \cdot 10^{-8},$$

2.) $g_0 = 0.790 \text{ V} \Rightarrow p_2 = Q\left(\frac{0.790 \text{ V}}{0.188 \text{ V}}\right) \approx 1.3 \cdot 10^{-5},$

3.) $g_0 - g_1 - g_{-1} = 0.580 \text{ V} = \ddot{o}(T_D)/2 \Rightarrow p_3 = p_U \approx 10^{-3}.$

Durch Mittelung über diese Werte mit geeigneter Gewichtung (p_2 tritt doppelt so oft wie p_1 und p_3 auf) erhält man:

$$\begin{aligned} p_S &= 1/4 \cdot (p_1 + 2 \cdot p_2 + p_3) = \\ &= 1/4 \cdot (5 \cdot 10^{-8} + 2 \cdot 1.3 \cdot 10^{-5} + 10^{-3}) \approx \underline{2.56 \cdot 10^{-4}}. \end{aligned}$$

Da p_1 und p_2 sehr viel kleiner als $p_3 = p_U$ sind, ist die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit (nahezu) um den Faktor 4 kleiner als p_U .

f) Um eine kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit zu erreichen, muss s_0 auf jeden Fall vergrößert werden. Damit ist die Näherung $p_S \approx p_U/4$ noch genauer:

$$\begin{aligned} p_S \leq 10^{-10} &\Rightarrow p_U = Q\left(\frac{0.58 \cdot s_0}{0.188 \text{ V}}\right) \leq 4 \cdot 10^{-10} \\ \Rightarrow \frac{0.58 \cdot s_0}{0.188 \text{ V}} &\geq 6.15 \Rightarrow s_0 \geq 1.993 \text{ V} \approx \underline{2 \text{ V}}. \end{aligned}$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.2

a) Bei der Berechnung der vertikalen Augenöffnung darf der Rauschanteil nicht berücksichtigt werden. Dieser wird durch den Rauscheffektivwert σ_d erfasst. Würde man die Augenöffnung aus dem unteren Augendiagramm auf der Angabenseite entnehmen, so würde die Rauschkomponente zweimal erfasst.

Die obere Begrenzung der inneren Augenlinie ergibt sich für die Symbolfolge „... , -1, -1, +1, -1, -1, ...“. Die lange „-1“-Folge würde zum Wert $-s_0$ führen. Dagegen führt die „worst-case“-Folge zur Augenlinie $-s_0 + 2 \cdot g_d(t)$. Zum Detektionszeitpunkt $T_D = 0$ gilt somit mit der Entscheidungsschwelle $E = 0$:

$$\ddot{o}(T_D)/2 = 2 \cdot g_0 - s_0.$$

Richtig sind somit der erste und der dritte Lösungsvorschlag.

b) Für die halbe vertikale Augenöffnung gilt:

$$\begin{aligned} \ddot{o}(T_D)/2 &= 2 \cdot g_0 - s_0 = 2 \cdot s_0 \cdot \left[1 - 2 \cdot Q\left(\sqrt{2\pi} \cdot f_G \cdot T\right) \right] - s_0 = \\ &= s_0 \cdot \left[1 - 4 \cdot Q\left(\sqrt{2\pi} \cdot f_G \cdot T\right) \right]. \end{aligned}$$

Ein geschlossenes Auge ergibt sich gemäß dem angegebenen Interaktionsmodul für

$$\begin{aligned} Q\left(\sqrt{2\pi} \cdot f_G \cdot T\right) &\geq 0.25 \Rightarrow \sqrt{2\pi} \cdot f_G \cdot T < 0.675 \\ \Rightarrow f_{G,\min} \cdot T &\approx \frac{0.675}{2.5} \approx \underline{0.27}. \end{aligned}$$

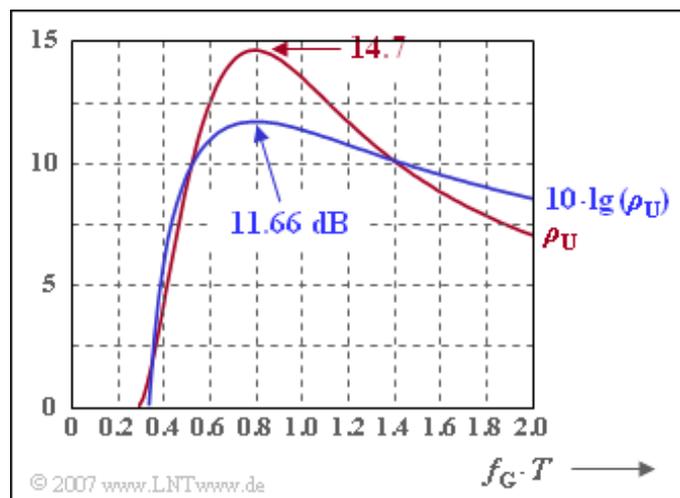
c) Mit den Gleichungen auf der Angabenseite und den bisherigen Berechnungen ergibt sich

$$\rho_U = \frac{[\ddot{o}(T_D)/2]^2}{\sigma_d^2} = \frac{s_0^2 \cdot \left[1 - 4 \cdot Q\left(\sqrt{2\pi} \cdot f_G \cdot T\right) \right]^2}{N_0 \cdot f_G / \sqrt{2}}$$

Mit der Angabe „ $E_B/N_0 = 10$ dB“ erhält man folgende Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} 10 \cdot \lg E_B/N_0 = 10 \text{ dB} &\Rightarrow E_B/N_0 = s_0^2 \cdot T/N_0 = 10 \\ \Rightarrow \rho_U &= 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\left[1 - 4 \cdot Q\left(\sqrt{2\pi} \cdot f_G \cdot T\right) \right]^2}{f_G \cdot T}. \end{aligned}$$

Die Abbildung zeigt diesen Funktionsverlauf in Abhängigkeit der (normierten) Grenzfrequenz. Für die vorgegebenen Grenzfrequenzen gilt:



- $f_G \cdot T = 0.6: \rho_U \approx 12.7 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_U \approx \underline{11.04 \text{ dB}}$,
- $f_G \cdot T = 0.8: \rho_U \approx 14.7 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_U \approx \underline{11.66 \text{ dB}}$,
- $f_G \cdot T = 1.0: \rho_U \approx 13.5 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_U \approx \underline{11.30 \text{ dB}}$.

Aus obiger Grafik erkennt man auch die minimale Grenzfrequenz gemäß Teilaufgabe b).

d) Die Gültigkeit der ersten Aussage ergibt sich aus obiger Grafik. Da in der obigen Gleichung für ρ_U das Verhältnis E_B/N_0 nur als Faktor auftritt, führt die Optimierung (Nullsetzen der Ableitung) unabhängig von E_B/N_0 stets zum gleichen Ergebnis.

Die optimale Grenzfrequenz hinsichtlich p_U ist näherungsweise auch hinsichtlich p_S optimal, aber nicht exakt. Für sehr große Werte von E_B/N_0 (kleines Rauschen) stimmt diese Näherung sehr gut und es gilt $p_S \approx p_B/4$. Dagegen ergibt sich bei großem Rauschen, beispielsweise $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 0 \text{ dB}$ eine kleinere optimale Grenzfrequenz, wenn die Optimierung auf p_S basiert:

- $f_G \cdot T = 0.8: p_U = 0.113, p_S = 0.102,$
- $f_G \cdot T = 0.6: p_U = 0.129, p_S = 0.094.$

Die Fehlerwahrscheinlichkeiten sind dann aber so groß, dass diese Ergebnisse nicht praxisrelevant sind. Richtig sind also die beiden ersten Lösungsvorschläge.

e) Mit dem Ergebnis aus b), $E_B/N_0 = 10$ und $f_G \cdot T = 0.8$ gilt:

$$\ddot{\sigma}(T_D)/s_0 = 2 \cdot \left[1 - 4 \cdot Q \left(\sqrt{2\pi} \cdot 0.8 \right) \right] = 2 \cdot [1 - 4 \cdot 0.022] \approx \underline{1.824},$$

$$\sigma_d^2/s_0^2 = \frac{N_0 \cdot f_G}{\sqrt{2} \cdot s_0^2} = \frac{N_0}{s_0^2 \cdot T} \cdot \frac{f_G \cdot T}{\sqrt{2}} = 0.1 \cdot \frac{0.8}{\sqrt{2}} \approx 0.0566 \Rightarrow \sigma_d/s_0 \approx \underline{0.238},$$

$$\rho_U = \frac{[\ddot{\sigma}(T_D)]^2}{4 \cdot \sigma_d^2} = \frac{1.824^2}{4 \cdot 0.0566} \approx 14.7 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_U \approx \underline{11.66 \text{ dB}}.$$

$$p_U = Q(\sqrt{\rho_U}) = Q(\sqrt{14.7}) \approx \underline{6.4 \cdot 10^{-5}}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A3.3

a) Aus $10 \cdot \lg \rho_U = 14.8 \text{ dB}$ folgt $\rho_U = 10^{1.48} \approx 30.2$ und weiter mit der angegebenen Gleichung:

$$\sqrt{\rho_U} = \frac{\ddot{o}(T_D)/2}{\sigma_d} \Rightarrow \sigma_d = \frac{0.478 \cdot s_0/2}{\sqrt{30.2}} \approx 0.044 \cdot s_0.$$

b) Bei gleicher Fehlerwahrscheinlichkeit p_U (und damit gleichem ρ_U) muss σ_d genau den gleichen Wert besitzen wie unter Teilaufgabe a) berechnet, da auch die Augenöffnung gleich bleibt $\Rightarrow \sigma_d/s_0 = 0.044$.

c) Entsprechend dem Angabenblatt gilt:

$$\alpha^2 = \frac{N_0 \cdot f_G}{\sqrt{2} \cdot \sigma_d^2} = \frac{10^{-9} \cdot s_0^2 \cdot T \cdot f_G}{\sqrt{2} \cdot \sigma_d^2} = 10^{-9} \cdot \frac{f_G \cdot T}{\sqrt{2} \cdot (\sigma_d/s_0)^2}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 10^{-9} \cdot \frac{0.35}{\sqrt{2} \cdot 0.044^2} \approx 1.28 \cdot 10^{-7}.$$

In dB ausgedrückt erhält man somit

$$20 \cdot \lg \alpha = 10 \cdot \lg \alpha^2 = -70 \text{ dB} + 10 \cdot \lg 1.28 = \underline{\underline{-68.9 \text{ dB}}}.$$

d) Beim System B ist wegen $H_E(f=0) = 1$ der normierte Wert gleich 1, das heißt, es ist $\Phi_{dN}(f=0) = N_0/2$. Dagegen ist bei System A dieser Wert aufgrund der Komponenten der frequenzunabhängigen Kabeldämpfung α um $1/\alpha^2$ größer:

$$\text{System A : } \frac{\Phi_{dN}(f=0)}{N_0/2} = \frac{1}{\alpha^2} \approx 7.8 \cdot 10^6,$$

$$\text{System B : } \frac{\Phi_{dN}(f=0)}{N_0/2} = 1.$$

e) $\Phi_{dN}(f)$ ist maximal, wenn der Exponent

$$18.4 \cdot \sqrt{2fT} - 2\pi \cdot \frac{(f \cdot T)^2}{0.49}$$

den maximalen Wert besitzt. Mit $x = f \cdot T$ gilt somit für die Optimierungsfunktion:

$$y(x) = 26.022 \cdot \sqrt{x} - 12.823 \cdot x^2 \approx 26 \cdot \sqrt{x} - 13 \cdot x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{26}{2 \cdot \sqrt{x}} - 13 \cdot 2 \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \cdot x \Rightarrow \frac{1}{x} = 4 \cdot x^2 \Rightarrow x^3 = 0.25 \Rightarrow x \approx \underline{\underline{0.63}}.$$

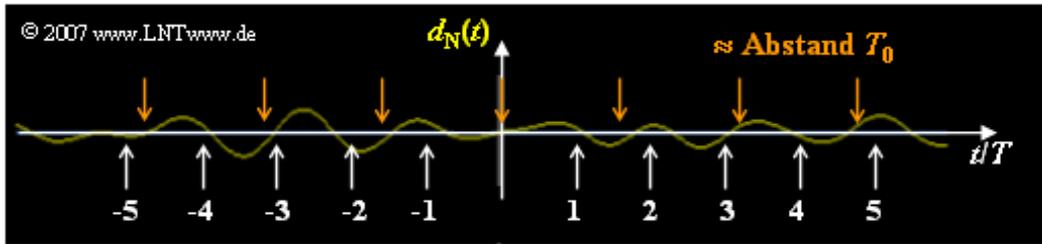
Damit ergibt sich $f_{\max} \cdot T$ näherungsweise zu 0.63.

f) Mit $x_{\max} = 0.63$ erhält man den Funktionswert

$$y(x_{\max}) \approx 26 \cdot \sqrt{0.63} - 13 \cdot 0.63^2 \approx \underline{\underline{15.477}}.$$

Daraus folgt, dass die Rauschleistungsdichte bei der (normierten) Frequenz $f \cdot T \approx 0.63$ um den Faktor

$e^{15.5} \approx 5.4 \cdot 10^6$ größer ist als bei der Frequenz $f = 0$. Im Rauschanteil $d_N(t)$ überwiegen somit periodische Anteile mit der Periodendauer $T_0 \approx 1.6 \cdot T$. Die Grafik zeigt eine Simulation und bestätigt dieses Ergebnis.



Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.3

a) Für die Optimierung genügt es, den Quotienten $\delta(T_D)/\sigma_d$ zu maximieren. Dieser ist von den in der Tabelle gegebenen Werten für die Grenzfrequenz $f_{G,opt} \cdot T = \underline{0.4}$ mit $0.735/0.197 \approx 3.73$ maximal. Zum Vergleich: Für $f_G \cdot T = 0.3$ ergibt sich aufgrund der kleineren Augenöffnung $0.192/0.094 \approx 2.04$ und für $f_G \cdot T = 0.5$ ist der Quotient ebenfalls kleiner als beim Optimum: $1.159/0.379 \approx 3.05$.

Eine noch größere Grenzfrequenz führt zu einem sehr großen Störeffektivwert, ohne dass gleichzeitig die vertikale Augenöffnung in gleicher Weise vergrößert wird.

b) Mit dem Ergebnis aus a) erhält man weiter:

$$\begin{aligned}\rho_U &= (3.73/2)^2 \approx 3.48 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_U = \underline{5.41 \text{ dB}} \\ \Rightarrow p_U &= Q(3.73/2) \approx \underline{0.031}.\end{aligned}$$

c) Mit dem gegebenen $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 40 \text{ dB}$, also $E_B/N_0 = 10^4$, hat sich der ungünstigste Störabstand zu $10 \cdot \lg \rho_U \approx 5.41 \text{ dB}$ ergeben. Für die ungünstigste Fehlerwahrscheinlichkeit $p_U = 10^{-6}$ muss aber $10 \cdot \lg \rho_U > 13.55 \text{ dB}$ sein. Dies erreicht man, indem man den Quotienten E_B/N_0 entsprechend erhöht:

$$\begin{aligned}10 \cdot \lg E_B/N_0 &= 40 \text{ dB} + 13.55 \text{ dB} - 5.41 \text{ dB} = 48.14 \text{ dB} \\ \Rightarrow E_B/N_0 &= 10^{4.814} \approx 65163 \Rightarrow N_0/E_B = \underline{1.53 \cdot 10^{-5}}.\end{aligned}$$

d) Die obere Schranke für p_S ist gleich der ungünstigsten Fehlerwahrscheinlichkeit $p_U = \underline{10^{-6}}$. Die untere Schranke liegt bei $\underline{0.25 \cdot 10^{-6}}$, ist also um den Faktor 4 kleiner.

Musterlösung zur Aufgabe A3.4

a) Normiert man die Grenzfrequenz f_G auf die Bitrate R_B (und nicht auf die Symbolrate $1/T$), so gelten die angegebenen Rauscheffektivwerte unabhängig von der Stufenzahl. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} M = 2, f_G/R_B = 0.33 : \sigma_d/s_0 &\underline{\underline{= 0.047}}, \\ M = 4, f_G/R_B = 0.28 : \sigma_d/s_0 &\underline{\underline{= 0.021}}. \end{aligned}$$

b) Die optimale Grenzfrequenz ist dann gegeben, wenn der Quotient aus (halber) Augenöffnung und Rauscheffektivwert maximal ist. Das Optimum ergibt sich für $f_G/R_B \underline{\underline{= 0.33}}$:

$$\rho_{U,\max} = \frac{0.184^2}{0.047^2} = 15.32 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_{U,\max} \underline{\underline{= 11.85 \text{ dB}}}.$$

Dagegen gilt für die benachbarten Grenzfrequenzwerte:

$$\begin{aligned} f_G/R_B = 0.32 : \rho_U &= \frac{0.155^2}{0.040^2} = 15.02 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_U = 11.76 \text{ dB}, \\ f_G/R_B = 0.34 : \rho_U &= \frac{0.212^2}{0.055^2} = 14.86 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_U = 11.72 \text{ dB}. \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man das – wenn auch flache – Optimum.

c) Für $M = 4$ erhält man folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} f_G/R_B = 0.27 : \rho_U &= \frac{0.097^2}{0.017^2} = 32.56 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_U = 15.13 \text{ dB}, \\ f_G/R_B = 0.28 : \rho_U &= \frac{0.121^2}{0.021^2} = 33.20 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_U \underline{\underline{= 15.21 \text{ dB}}}, \\ f_G/R_B = 0.29 : \rho_U &= \frac{0.139^2}{0.025^2} = 30.91 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_U = 14.90 \text{ dB}. \end{aligned}$$

Die optimale Grenzfrequenz liegt demnach beim Quaternärsystem bei $f_G/R_B \underline{\underline{= 0.28}}$. Der Störabstand ist dann um mehr als 3 dB größer als beim Binärsystem mit optimierter Grenzfrequenz.

d) Zutreffend sind die Aussagen 1, 3 und 4. Die Richtigkeit der ersten Aussage wird durch die Tabelle bestätigt. Für $f_G/R_B \geq 0.35$ weist das Binärsystem eine größere Augenöffnung als das Quaternärsystem auf. Durch die Normierung aller Frequenzen auf die Bitrate ist zudem der Rauscheffektivwert unabhängig von der Stufenzahl M , so dass die Optimierung auf die Augenöffnung beschränkt werden kann.

Für $f_G/R_B < 0.35$ ist dagegen das Quaternärsystem besser, also auch für $f_G/R_B = 0.33$. Obwohl diese Grenzfrequenz für $M = 2$ optimal ist und für $M = 4$ nicht, ist mit $f_G/R_B = 0.33$ das Quaternärsystem um etwa 0.85 dB besser als das Binärsystem.

Die dritte Aussage trifft zu. Durch die niedrigere (genauer gesagt: halbe) Symbolrate ist für $M = 4$ das Auge auch mit $f_G/R_B = 0.23$ noch geöffnet, während bei einem Binärsystem bereits für $f_G/R_B = 0.27$ ein (fast) geschlossenes Auge vorliegt.

Mit größerer charakteristischer Kabeldämpfung geht die Tendenz zu immer kleinerer Grenzfrequenz, um die Anhebung des Rauschens möglichst gering zu halten. Wenn aber bereits bei $a_* = 80 \text{ dB}$ das

(bezüglich der Grenzfrequenz optimierte) Quaternärsystem besser ist, so gilt das auch für 100 dB; der Gewinn ist größer als $15.21 - 11.85 \approx 3.4$ dB. Diese Werte wurden in den Aufgaben b) und c) ermittelt.

Dagegen ist für die charakteristische Kabeldämpfung $a_* = 40$ dB anhand des vorliegenden Zahlenmaterials keine Aussage möglich. Eine Systemsimulation lieferte hierfür die folgenden Ergebnisse (für $E_B/N_0 = 50$ dB):

$$M = 2 : 10 \cdot \lg \rho_U = 15.43 \text{ dB mit } f_G/R_B \approx 0.4,$$

$$M = 4 : 10 \cdot \lg \rho_U = 14.65 \text{ dB mit } f_G/R_B \approx 0.32.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.4

a) Beim Binärsystem ist die Bitdauer gleich dem Kehrwert der äquivalenten Bitrate:

$$T = \frac{1}{R_B} = \frac{1}{100 \text{ Mbit/s}} \approx 10 \text{ ns}.$$

Die Symboldauer des Quaternärsystems ist doppelt so groß:

$$T = \frac{\log_2 4}{R_B} \approx 20 \text{ ns}.$$

b) Entsprechend der angegebenen Gleichung gilt für das Binärsystem:

$$\begin{aligned} g_0 &= s_0 \cdot \left[1 - 2 \cdot Q \left(\sqrt{2\pi} \cdot f_G \cdot T \right) \right] = 1 \text{ V} \cdot \left[1 - 2 \cdot Q \left(\sqrt{2\pi} \cdot 30 \text{ MHz} \cdot 10 \text{ ns} \right) \right] \\ &\approx 1 \text{ V} \cdot \left[1 - 2 \cdot Q(0.75) \right] = 1 \text{ V} \cdot \left[1 - 2 \cdot 0.2266 \right] \approx 0.547 \text{ V}. \end{aligned}$$

c) Aufgrund der doppelten Symboldauer ergibt sich bei gleicher Grenzfrequenz für $M = 4$:

$$g_0 = 1 \text{ V} \cdot \left[1 - 2 \cdot Q(1.5) \right] = 1 \text{ V} \cdot \left[1 - 2 \cdot 0.0668 \right] \approx 0.867 \text{ V}.$$

d) Erweitert man die angegebene Gleichung um $\pm g_0$, so erhält man:

$$\ddot{o}(T_D)/2 = \frac{g_0}{M-1} + g_0 - g_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} g_{\nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} g_{-\nu} = \frac{M}{M-1} \cdot g_0 - s_0.$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass beim Gaußtieffpass auf die Betragsbildung verzichtet werden kann und zum zweiten, dass die Summe über alle Detektionsimpulswerte gleich s_0 ist. Richtig ist also der erste, aber auch der letzte Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} \ddot{o}(T_D)/2 &= \frac{M}{M-1} \cdot g_0 - s_0 = \frac{M}{M-1} \cdot s_0 \cdot \left[1 - 2 \cdot Q \left(\sqrt{2\pi} \cdot f_G \cdot T \right) \right] - s_0 = \\ &= \frac{s_0}{M-1} \cdot \left[1 - 2 \cdot M \cdot Q \left(\sqrt{2\pi} \cdot f_G \cdot T \right) \right]. \end{aligned}$$

Mit der Beziehung $T = \log_2(M)/R_B$ kommt man zum dritten, ebenfalls zutreffenden Lösungsvorschlag.

e) Mit den Ergebnissen aus b) und d) sowie $M = 2$ erhält man:

$$\ddot{o}(T_D) = 2 \cdot (2 \cdot g_0 - s_0) = 2 \cdot (2 \cdot 0.547 \text{ V} - 1 \text{ V}) \approx 0.188 \text{ V}.$$

f) Mit $g_0 = 0.867 \text{ V}$, $s_0 = 1 \text{ V}$ und $M = 4$ ergibt sich dagegen:

$$\ddot{o}(T_D) = 2 \cdot (4/3 \cdot 0.867 \text{ V} - 1 \text{ V}) \approx 0.312 \text{ V}.$$

g) Entsprechend Teilaufgabe c) ist $g_0 = 0.867 \text{ V}$ und dementsprechend $g_{VN} = 0.133 \text{ V}$ (Summe aller Vor- und Nachläufer). Die Augenöffnung beträgt $\ddot{o} = 0.312 \text{ V}$. Aus der Skizze auf der Angabenseite erkennt man, dass die obere Begrenzung des oberen Auges folgenden Wert besitzt (für $T_D = 0$):

$$o = s_0 - 2 \cdot g_{VN} = g_0 - g_{VN} = 0.867 \text{ V} - 0.133 \text{ V} = 0.734 \text{ V}.$$

Die untere Begrenzung liegt bei

$$u = o - \ddot{o} = 0.734 \text{ V} - 0.312 \text{ V} = 0.422 \text{ V}.$$

Daraus folgt für die optimale Schwellenschwelle des oberen Auges:

$$E_3 = \frac{o + u}{2} = \frac{0.734 \text{ V} + 0.422 \text{ V}}{2} = 0.578 \text{ V}.$$

Der gesuchte Schwellenwert (für das untere Auge) ist $E_1 = -0.578 \text{ V}$. Die mittlere Schwellenschwelle liegt aus Symmetriegründen bei $E_2 = 0$.

Musterlösung zur Aufgabe A3.5

a) Da beim AMI-Code die Symbolrate gegenüber dem redundanzfreien Binärsystem nicht verändert wird, bleiben die Grundimpulswerte $g_0 = 1.56 \text{ V}$, $g_1 = g_{-1} = 0.22 \text{ V}$ und $g_2 = g_{-2} \approx 0$ unverändert.

Bei Pseudoternärcodierung gibt es stets zwei Augenöffnungen. Die obere Begrenzungslinie des oberen Auges ergibt sich beim AMI-Code wie beim redundanzfreien Binärsystem:

$$d_{\text{oben}} = g_0 - 2 \cdot g_1 \quad (\text{zugehörige Folge : } -1, +1, -1).$$

Dagegen gilt für die untere Begrenzungslinie des oberen Auges:

$$d_{\text{unten}} = g_1 \quad (\text{zugehörige Folge : } 0, 0, +1 \text{ bzw. } +1, 0, 0).$$

Für die halbe Augenöffnung gilt somit:

$$\ddot{o}(T_D)/2 = 1/2 \cdot (d_{\text{oben}} - d_{\text{unten}}) = 1/2 \cdot g_0 - 3/2 \cdot g_1 \underline{\underline{= 0.45 \text{ V}}}.$$

Die entsprechende Gleichung für das redundanzfreie Binärsystem lautet:

$$\ddot{o}(T_D)/2 = g_0 - 2 \cdot g_1.$$

b) Bezüglich des Rauschens gibt es keinen Unterschied zwischen den Systemen A, B und C, da stets die gleiche Symbolrate vorliegt. Daraus folgt für den AMI-Code:

$$\rho_U = \frac{(0.45 \text{ V})^2}{(0.2 \text{ V})^2} = 5.06 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot \lg \rho_U \underline{\underline{\approx 7 \text{ dB}}}.$$

Die Einbuße gegenüber dem redundanzfreien Binärsystem beträgt somit fast 8 dB. Der Grund für diesen gravierenden Störabstandsverlust ist, dass beim AMI-Code trotz 37% Redundanz die bezüglich der Impulsinterferenzen besonders ungünstige Symbolfolge „... , -1, +1, -1, ... ” nicht ausgeschlossen wird.

c) Die Schwelle E_2 muss in der Mitte zwischen d_{oben} und d_{unten} liegen:

$$E_2 = 1/2 \cdot (d_{\text{oben}} + d_{\text{unten}}) = 1/2 \cdot (g_0 - g_1) \underline{\underline{= 0.67 \text{ V}}}.$$

Der Schwellenwert E_1 liegt symmetrisch dazu: $E_1 \underline{\underline{= -0.67 \text{ V}}}$.

d) Wir gehen wieder von den gleichen Grundimpulswerten aus. Die ungünstigste Folge bezüglich der oberen Begrenzungslinie des oberen Auges ist „... , 0, +1, 0, ... ”, während die untere Begrenzungslinie durch „... , 0, 0, +1, ... ” bzw. „... , +1, 0, 0, ... ” bestimmt wird. Daraus folgt:

$$d_{\text{oben}} = g_0, \quad d_{\text{unten}} = g_1 \quad \Rightarrow \quad \ddot{o}(T_D)/2 = g_0/2 - g_1/2 \underline{\underline{= 0.67 \text{ V}}}.$$

e) Mit dem Ergebnis aus d) erhält man analog zur Teilaufgabe b):

$$\rho_U = \frac{(0.67 \text{ V})^2}{(0.2 \text{ V})^2} = 11.2 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot \lg \rho_U \underline{\underline{\approx 10.5 \text{ dB}}}.$$

Voraussetzung für dieses Ergebnis sind Schwellenwerte bei

$$E_2 = 1/2 \cdot (g_0 + g_1) = 0.89 \text{ V}, \quad E_1 = -0.89 \text{ V}.$$

Anzumerken ist, dass hier stets von der gleichen Grenzfrequenz $f_G \cdot T = 0.5$ ausgegangen wurde. Bei Optimierung der Grenzfrequenz kann es durchaus sein, dass der Duobinärcode dem redundanzfreien Binärcode überlegen ist, wenn die charakteristische Kabeldämpfung hinreichend groß ist.

Musterlösung zur Aufgabe A3.6

a) Der Eingangsimpuls $g_x(t)$ ist durch folgende Abtastwerte bei Vielfachen von T gegeben:

$$g_x(t = 0) = 1, \quad g_x(t = \pm T) = 0.5, \quad g_x(t = \pm 2T) = \dots = 0.$$

Damit kann folgendes Gleichungssystem aufgestellt werden:

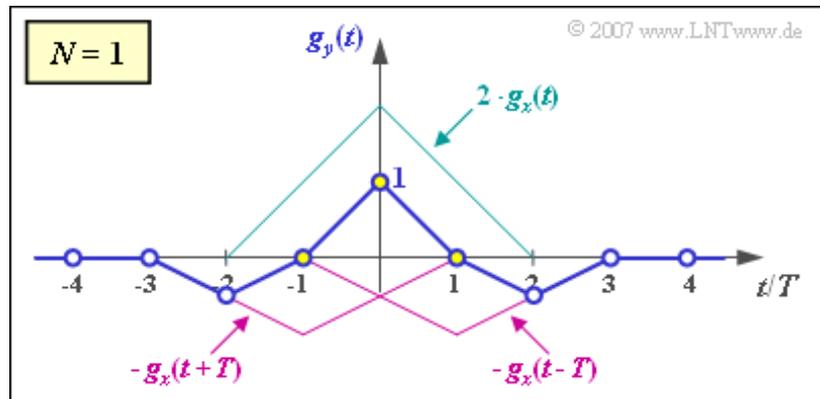
$$\begin{aligned} t = 0: \quad g_0 &= k_0 \cdot 1.0 + k_1 \cdot 2 \cdot 0.5 = 1, \\ t = T: \quad g_1 &= k_0 \cdot 0.5 + k_1 \cdot 1.0 = 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt $k_0 = 2$ und $k_1 = -1$.

b) Die Werte $g_0 = 1$ und $g_1 = 0$ wurden bereits der Optimierung zugrundegelegt und sind deshalb unbestritten. Zum Zeitpunkt $t = 2T$ ergibt sich am Ausgang, wobei $k_{-1} = k_1 = -1$ zu berücksichtigen ist:

$$g_2 = g_y(t = 2T) = g_x(t = T) \cdot k_{-1} = -0.5 = g_{-2}.$$

Der Wert $g_3 = g_y(t = 3T) = 0$, da alle Eingangswerte zu den Zeiten $2T$, $3T$ und $4T$ ebenfalls 0 sind. Damit ergibt sich der Ausgangsimpuls $g_y(t)$ gemäß nebenstehender Skizze.

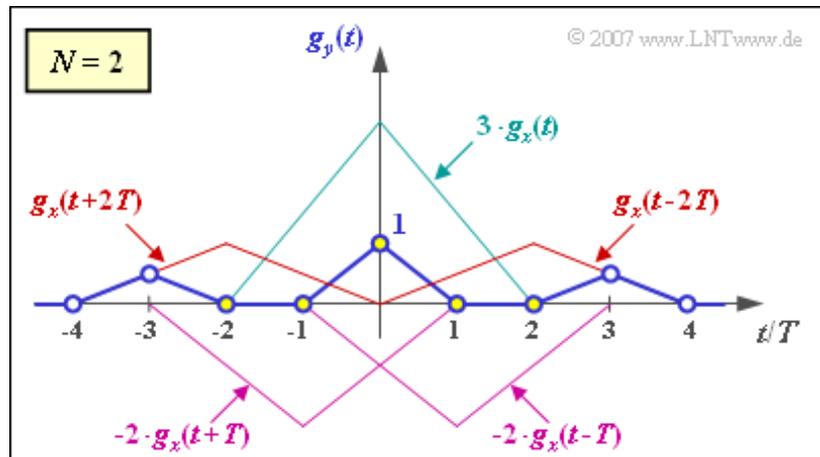


c) Bei einem Filter zweiter Ordnung lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} t = 2T: \quad g_2 &= k_1 \cdot 0.5 + k_2 \cdot 1.0 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -0.5 \cdot k_1, \\ t = T: \quad g_1 &= k_0 \cdot 0.5 + k_1 \cdot 1.0 + k_2 \cdot 0.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -2/3 \cdot k_0, \\ t = 0: \quad g_0 &= k_0 \cdot 1.0 + k_1 \cdot 0.5 + k_2 \cdot 0.5 = 1 \quad \Rightarrow \quad k_0 = 3. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die optimalen Koeffizienten zu

- $k_0 = 3$,
- $k_1 = -2$,
- $k_2 = 1$.



d) Bei analoger Vorgehensweise wie in der Teilaufgabe b) erhält man $g_4 = 0$ sowie

$$g_3 = g_y(t = 3T) = g_x(t = T) \cdot k_{-2} = 0.5 \cdot 1 = 0.5.$$

Die beiden Grafiken zeigen, dass bei der hier vorliegenden Dreieckform die optimale Nyquistverzerrung keine Verbesserung bringt. Das Auge ist in allen Fällen gerade geschlossen:

$$N = 0: \quad \ddot{o}/2 = g_0 - 2 \cdot g_1 = 1 - 2 \cdot 0.5 = 0,$$

$$N = 1: \quad \ddot{o}/2 = g_0 - 2 \cdot |g_2| = 1 - 2 \cdot 0.5 = 0,$$

$$N = 2: \quad \ddot{o}/2 = g_0 - 2 \cdot g_3 = 1 - 2 \cdot 0.5 = 0.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.6

a) Die fünf ersten Abtastwerte des Eingangsimpulses im Abstand T lauten:

$$g_x(0) \equiv 1, \quad g_x(1) \equiv 0.368, \quad g_x(2) \equiv 0.135, \quad g_x(3) = 0.050, \quad g_x(4) = 0.018.$$

b) Entsprechend der **Musterlösung** zur Aufgabe A3.6 kommt man auf folgendes Gleichungssystem:

$$2t = T: \quad g_1 = k_0 \cdot g_x(1) + k_1 \cdot [g_x(0) + g_x(2)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_1}{k_0} = -\frac{g_x(1)}{g_x(0) + g_x(2)},$$

$$t = 0: \quad g_0 = k_0 \cdot g_x(0) + k_1 \cdot 2 \cdot g_x(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{1 - k_0}{0.736}.$$

Dies führt zum Ergebnis:

$$k_0 - 0.324 \cdot 0.736 \cdot k_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad k_0 \equiv 1.313, \quad k_1 \equiv -0.425.$$

c) Für den Zeitpunkt $t = 2T$ gilt:

$$g_2 = k_0 \cdot g_x(2) + k_1 \cdot [g_x(1) + g_x(3)] =$$

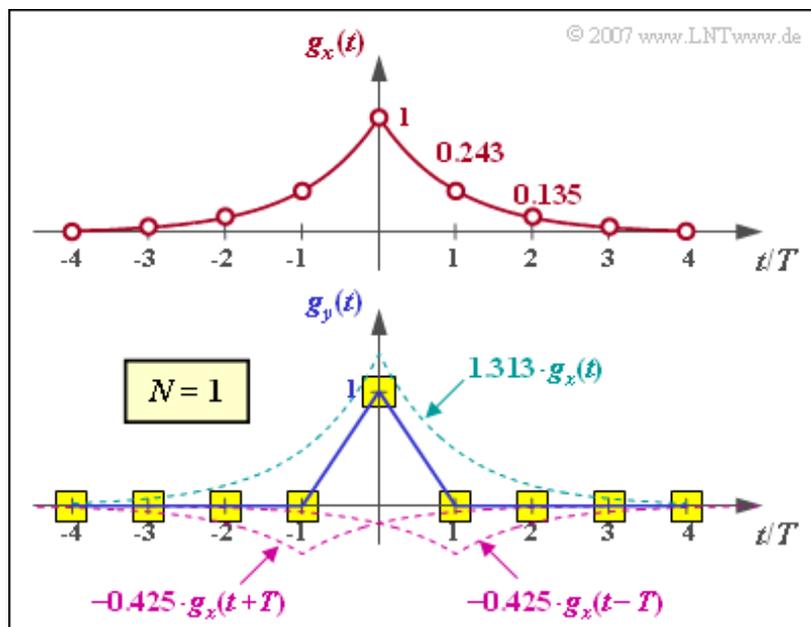
$$= 1.313 \cdot 0.050 - 0.425 \cdot [0.135 + 0.018] \approx 0.$$

Ebenso ist auch der Ausgangsimpuls zum Zeitpunkt $t = 3T$ gleich 0:

$$g_3 = k_0 \cdot g_x(3) + k_1 \cdot [g_x(2) + g_x(4)] =$$

$$= 1.313 \cdot 0.135 - 0.425 \cdot [0.368 + 0.050] \approx 0.$$

Die Abbildung zeigt, dass bei diesem exponentiell abfallenden Impuls das Transversalfilter erster Ordnung eine vollständige Entzerrung bewirkt. Außerhalb des Intervalls $-T < t < T$ ist $g_y(t)$ identisch 0, innerhalb ergibt sich eine Dreieckform.



d) Richtig ist nur der erste Lösungsvorschlag: Nachdem bereits mit einem Laufzeitfilter erster Ordnung alle Vor- und Nachläufer kompensiert werden, ergeben sich auch mit einem Filter zweiter Ordnung und auch für $N \rightarrow \infty$ keine weiteren Verbesserungen. Dieses Ergebnis gilt jedoch ausschließlich für den (beidseitig) exponentiell abfallenden Eingangsimpuls. Bei fast jeder anderen Impulsform ist das Ergebnis um so besser, je größer N ist.

Musterlösung zur Aufgabe A3.7

a) Allgemein gilt für alle Frequenzen ≥ 0 :

$$|H_{SK}(f)| = \text{si}(\pi f T) \cdot \exp \left[-9.2 \cdot \sqrt{2 \cdot |f| \cdot T} \right].$$

Daraus ergeben sich die gesuchten Sonderfälle:

$$\begin{aligned} f = 0: \quad |H_{SK}(f = 0)| &= \text{si}(0) \cdot e^0 \underline{\underline{= 1}}, \\ f = f_{Nyq}: \quad |H_{SK}(f = \frac{1}{2T})| &= \text{si}(\frac{\pi}{2}) \cdot e^{-9.2} \underline{\underline{\approx 6.43 \cdot 10^{-5}}}, \\ f = \frac{1}{T}: \quad |H_{SK}(f = \frac{1}{T})| &= \text{si}(\pi) \cdot e^{\dots} \underline{\underline{= 0}}. \end{aligned}$$

b) Die Grafik zeigt, dass $H_{TF}(f)$ bei $f = f_{Nyq}$ maximal wird. Daraus folgt mit der angegebenen Gleichung weiter, dass

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} |H_{SK}(f - \frac{\kappa}{T})|^2$$

bei der Nyquistfrequenz minimal ist. Für $f = f_{Nyq}$ tragen von der unendlichen Summe allerdings nur die Terme mit $\kappa = 0$ und $\kappa = 1$ relevant zum Ergebnis bei. Daraus folgt mit dem Ergebnis aus a):

$$\begin{aligned} \text{Max} [H_{TF}(f)] &= H_{TF}(f = f_{Nyq}) = \frac{1}{2 \cdot |H_{SK}(f = f_{Nyq})|^2} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot (6.43 \cdot 10^{-5})^2} = \frac{10^{10}}{82.69} \underline{\underline{\approx 1.21 \cdot 10^8}}. \end{aligned}$$

c) Nähert man das Integral über $H_{TF}(f)$ durch die in der Grafik eingezeichnete Dreiecksfläche an, so erhält man:

$$\sigma_{d, \text{norm}}^2 = T \cdot \int_0^{1/T} H_{TF}(f) df \approx T \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.21 \cdot 10^8 \cdot (0.64 - 0.36) \underline{\underline{\approx 1.7 \cdot 10^7}}.$$

d) Gemäß der gegebenen Gleichung erhält man für die (mittlere) Symbolfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_S = Q \left(\sqrt{\frac{s_0^2 \cdot T}{N_0 \cdot \sigma_{d, \text{norm}}^2}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{10^8}{1.7 \cdot 10^7}} \right) \approx Q(2.42) \Rightarrow p_S \underline{\underline{\approx 8 \cdot 10^{-3}}}.$$

Da ein Nyquistsystem vorliegt, ist die ungünstigste (worst-case) Fehlerwahrscheinlichkeit genau so groß.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.7

a) Berechnet man den Systemwirkungsgrad unter der Voraussetzung $a_* = 40$ dB, so erhält man für die vier Systemvarianten:

$$\begin{aligned} \text{GTP, } M = 2: & 10 \cdot \lg \eta = +9.4 \text{ dB} - 1.10 \cdot 40 \text{ dB} = -34.6 \text{ dB}, \\ \text{GTP, } M = 8: & 10 \cdot \lg \eta = -1.3 \text{ dB} - 0.91 \cdot 40 \text{ dB} = -37.7 \text{ dB}, \\ \text{ONE, } M = 2: & 10 \cdot \lg \eta = +4.5 \text{ dB} - 0.96 \cdot 40 \text{ dB} = -33.9 \text{ dB}, \\ \text{ONE, } M = 8: & 10 \cdot \lg \eta = -9.3 \text{ dB} - 0.54 \cdot 40 \text{ dB} = -30.9 \text{ dB}. \end{aligned}$$

Die erste Aussage ist zutreffend, da das System (ONE, $M = 8$) bereits bei 40 dB Kabeldämpfung am besten ist und zudem den günstigsten B-Koeffizienten aufweist. Dagegen trifft die zweite Aussage nicht zu, da zum Beispiel bei 40 dB Kabeldämpfung das oktale GTP-System schlechter ist als das binäre.

b) Als Bestimmungsgleichung benutzen wir

$$\begin{aligned} -1.3 \text{ dB} - 0.91 \cdot a_* &= +4.5 \text{ dB} - 0.96 \cdot a_* \\ \Rightarrow 0.05 \cdot a_* &= 5.8 \text{ dB} \quad \Rightarrow \quad a_{*, \text{Grenz}} = \underline{116 \text{ dB}}. \end{aligned}$$

Das heißt: Bis zur charakteristischen Kabeldämpfung $a_* = 116$ dB (Anmerkung: dies ist ein unrealistisch großer Wert für realisierte Systeme) ist das binäre Nyquistsystem dem System (GTP, $M = 8$) überlegen. Erst für größere Werte als $a_{*, \text{Grenz}} = 116$ dB überwiegt bei Letzterem der Vorteil ($M = 8$ und damit deutlich niedrigere Symbolrate) gegenüber dem Nachteil (oktale Entscheidung und dadurch größeres Gewicht der Impulsinterferenzen).

c) Das Sinken-SNR soll mindestens 16.1 dB betragen, das heißt es muss gelten:

$$\begin{aligned} 10 \cdot \lg \rho &= 10 \cdot \lg \frac{s_0^2}{N_0 \cdot R_B} + 10 \cdot \lg \eta \\ \Rightarrow 10 \cdot \lg \eta &> 10 \cdot \lg \rho_{\min} - 10 \cdot \lg \frac{s_0^2}{N_0 \cdot R_B} = \\ &= 16.1 \text{ dB} - 100 \text{ dB} = \underline{-83.9 \text{ dB}} = 10 \cdot \lg \eta_{\min}. \end{aligned}$$

d) Beim hier betrachteten System gilt:

$$10 \cdot \lg \eta = -9.3 \text{ dB} - 0.54 \cdot a_*.$$

Aus „ $10 \cdot \lg \eta > -83.9$ dB“ ergibt sich die Bedingung für die charakteristische Kabeldämpfung:

$$a_* < \frac{-83.9 \text{ dB} + 9.3 \text{ dB}}{-0.54} \approx 138.1 \text{ dB}.$$

Mit der angegebenen Gleichung

$$a_* = \frac{2.36 \text{ dB}}{\text{km} \cdot \sqrt{\text{MHz}}} \cdot l \cdot \sqrt{R_B/2}.$$

ist damit die maximale Kabellänge (Regeneratorfeldlänge) angebar:

$$l_{\max} = \frac{138.1 \text{ dB}}{2.36 \text{ dB}/(\text{km} \cdot \sqrt{\text{MHz}}) \cdot \sqrt{500 \text{ MHz}}} \approx \underline{2.62 \text{ km}}.$$

e) Nach gleichem Vorgehen, aber in kompakterer Schreibweise, ergibt sich für dieses „schlechtere“

System eine kleinere Regeneratorfeldlänge:

$$l_{\max} = \frac{-(83.9 \text{ dB} + A)/B}{2.36 \text{ dB/km} \cdot \sqrt{500}} = \frac{+(83.9 + 9.4)/1.10}{2.36 \cdot \sqrt{500}} \text{ km} \approx \underline{1.61 \text{ km}}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A3.8

a) Bei idealer DFE werden alle Nachläufer kompensiert. Somit erhält man für die halbe Augenöffnung unter der Voraussetzung $T_D = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{o}(T_D)}{2} &= g_d(0) - g_d(-T) - g_d(-2T) - g_d(-3T) \\ \Rightarrow \frac{\ddot{o}(T_D)}{2 \cdot s_0} &= 0.470 - 0.235 - 0.029 - 0.001 \underline{= 0.205}.\end{aligned}$$

b) Aus dem angegebenen ungünstigsten S/N-Verhältnis $\rho_U = 25$ folgt:

$$\begin{aligned}\rho_U &= \frac{[\ddot{o}(T_D)/2]^2}{\sigma_d^2} = 25 \Rightarrow (\sigma_d/s_0)^2 = \frac{[\ddot{o}(T_D)/(2s_0)]^2}{25} \\ \Rightarrow \sigma_d/s_0 &= \frac{\ddot{o}(T_D)/(2s_0)}{5} \underline{= 0.041}.\end{aligned}$$

c) Durch dieses Filter werden die beiden ersten Nachläufer nur teilweise und der dritte Nachläufer gar nicht kompensiert. Daraus folgt mit dem Ergebnis aus a):

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{o}(T_D)}{2 \cdot s_0} &= 0.205 - |0.235 - 0.2| - |0.029 - 0.05| - 0.001 = \\ &= 0.205 - 0.035 - 0.021 - 0.001 \underline{= 0.148} \\ \Rightarrow \rho_U &= \frac{0.148^2}{0.041^2} \approx 13 \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_U \underline{\approx 11.1 \text{ dB}}.\end{aligned}$$

d) Es ergeben sich nahezu die gleichen Ergebnisse wie bei idealer DFE (lediglich der dritte Nachläufer wird nicht kompensiert):

$$\frac{\ddot{o}(T_D)}{2 \cdot s_0} \underline{= 0.204} \Rightarrow 10 \cdot \lg \rho_U \underline{\approx 13.94 \text{ dB}} \quad (\text{Ideale DFE exakt: } \approx 13.98 \text{ dB}).$$

e) Die beiden ersten Aussagen sind richtig. Ohne DFE beträgt die halbe Augenöffnung:

$$\frac{\ddot{o}(T_D)}{2 \cdot s_0} = 0.470 - 2 \cdot 0.235 - 2 \cdot 0.029 - 2 \cdot 0.001 < 0.$$

Wird irgendwann einmal aufgrund eines zu großen Rauschwertes eine Fehlentscheidung getroffen, so wird die Verfälschungswahrscheinlichkeit der nachfolgenden Symbole signifikant erhöht. Allerdings gibt es in jeder Folge immer wieder Symbolkombinationen, die diese Fehlerfortpflanzung unterbrechen.

Der letzte Lösungsvorschlag ist falsch. Es gilt vielmehr: Kleine Abstände von der Entscheidungsschwelle werden vergrößert, große Abstände dagegen verkleinert und deren Verfälschungswahrscheinlichkeiten demzufolge vergrößert. Im Mittel führt dies aber zu einer kleineren Fehlerwahrscheinlichkeit.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.8

a) Für den Detektionszeitpunkt $T_D = 0$ gilt (wurde bereits in **Aufgabe A3.8** berechnet):

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{o}(T_D)}{2} &= g_d(0) - g_d(-T) - g_d(-2T) - g_d(-3T) \\ \Rightarrow \frac{\ddot{o}(T_D)}{2 \cdot s_0} &= 0.470 - 0.235 - 0.029 - 0.001 = \underline{0.205}.\end{aligned}$$

b) Die Koeffizienten sind so zu wählen, dass $g_k(t)$ die Nachläufer von $g_d(t)$ vollständig kompensiert.

$$k_1 = g_d(T) = \underline{0.235}, \quad k_2 = g_d(2T) = \underline{0.029}, \quad k_3 = g_d(3T) = \underline{0.001}.$$

c) Ausgehend von dem Ergebnis der Teilaufgabe a) erhält man:

$$\frac{\ddot{o}(T_D)}{2 \cdot s_0} = 0.205 - 0.5 \cdot (0.235 + 0.029 + 0.001) = \underline{0.072}.$$

d) Die Optimierung von T_D entsprechend den Einträgen in der Tabelle liefert:

$$T_D/T = 0: \quad \ddot{o}(T_D)/(2 s_0) = 0.470 - 0.235 - 0.029 - 0.001 = 0.205,$$

$$T_D/T = -0.1: \quad \ddot{o}(T_D)/(2 s_0) = 0.466 - 0.204 - 0.022 = 0.240,$$

$$T_D/T = -0.2: \quad \ddot{o}(T_D)/(2 s_0) = 0.456 - 0.174 - 0.016 = 0.266,$$

$$T_D/T = -0.3: \quad \ddot{o}(T_D)/(2 s_0) = 0.441 - 0.146 - 0.012 = 0.283,$$

$$T_D/T = -0.4: \quad \ddot{o}(T_D)/(2 s_0) = \mathbf{0.420 - 0.121 - 0.008 = 0.291},$$

$$T_D/T = -0.5: \quad \ddot{o}(T_D)/(2 s_0) = 0.395 - 0.099 - 0.006 = 0.290,$$

$$T_D/T = -0.6: \quad \ddot{o}(T_D)/(2 s_0) = 0.366 - 0.080 - 0.004 = 0.282.$$

Der optimale Detektionszeitpunkt ist demnach $T_{D,\text{opt}} = -0.4 T$ (wahrscheinlich geringfügig größer).

Hierfür wurde für die halbe Augenöffnung der maximale Wert (0.291) ermittelt.

e) Mit $T_D = -0.4 T$ lauten die Filterkoeffizienten:

$$k_1 = g_d(0.6T) = \underline{0.366}, \quad k_2 = g_d(1.6T) = \underline{0.080}, \quad k_3 = g_d(2.6T) = \underline{0.004}.$$

f) Bei gleicher Vorgehensweise wie in der Teilaufgabe c) erhält man hier:

$$\frac{\ddot{o}(T_{D,\text{opt}})}{2 \cdot s_0} = 0.291 - 0.5 \cdot (0.366 + 0.080 + 0.004) = \underline{0.066}.$$

Die Ergebnisse dieser Aufgabe lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Durch Optimierung des Detektionszeitpunktes wird die Augenöffnung im Idealfall um den Faktor $0.291/0.205 = 1.42$ vergrößert, was dem Störabstandsgewinn von $20 \cdot \lg 1.42 \approx 3$ dB entspricht.
- Funktioniert die DFE aufgrund von Realisierungsungenauigkeiten jedoch nur zu 50%, so ergibt sich mit $T_D = -0.4T$ gegenüber der idealen DFE eine Verschlechterung um den Amplitudenfaktor $0.291/0.066 \approx 4.4$. Für $T_D = 0$ ist dieser Faktor mit $2.05/0.072 \approx 3$ deutlich kleiner.

- Es ist sogar so: Das eigentlich schlechtere System (mit $T_D = 0$) ist dem eigentlich besseren System (mit $T_D = -0.4T$) überlegen, wenn die Entscheidungsrückkopplung nur zu 50% funktioniert. Dann ergibt sich ein Störabstandsverlust von $20 \cdot \lg(0.072/0.066) \approx 0.75$ dB.
- Man kann diese Aussagen verallgemeinern: Je größer die Verbesserung durch Systemoptimierung (hier: die Optimierung des Detektionszeitpunktes) im Idealfall ist, desto größer ist auch die Verschlechterung bei nichtidealen Bedingungen, z. B. bei toleranzbehafteter Realisierung.

Musterlösung zur Aufgabe A3.9

a) Bei System B treten viermal die Metriken 0 und viermal die Metriken 1 auf. Dies weist auf $n(t) = 0$ hin, da sich sonst – wie bei den Systemen **A** und **C** – alle I_i unterscheiden müssten.

b) Beim System **B** ergeben sich folgende Entscheidungswerte $W_i = I_i - E_i/2$, jeweils normiert auf E_B :

$$\begin{aligned}W_0 &= 0 - 0 = 0, & W_1 &= 0 - 0.5 = -0.5, \\W_2 &= 1 - 0.5 = 0.5, & W_3 &= 1 - 1 = 0, \\W_4 &= 0 - 0.5 = -0.5, & W_5 &= 0 - 1 = -1, \\W_6 &= 1 - 1 = 0, & W_7 &= 1 - 1.5 = -0.5.\end{aligned}$$

Der maximale Wert ist $W_2 = 0.5 \Rightarrow i = 2$. Der Korrelationsempfänger entscheidet sich also für $V = Q_2$. Da keine Störungen auftreten, wurde tatsächlich auch $Q_2 = „010”$ gesendet $\Rightarrow k = \underline{2}$.

c) Für die Entscheidungswerte von System **A** gilt:

$$\begin{aligned}W_0 &= 0.00 - 0.00 = 0.00, & W_1 &= -0.07 - 0.50 = -0.57, \\W_2 &= 1.13 - 0.50 = 0.63, & W_3 &= 1.06 - 1.00 = 0.06, \\W_4 &= 0.05 - 0.50 = -0.45, & W_5 &= -0.02 - 1.00 = -1.02, \\W_6 &= 1.18 - 1.00 = 0.18, & W_7 &= 1.11 - 1.50 = -0.39.\end{aligned}$$

Das Maximum ist $W_j = W_2 \Rightarrow j = \underline{2}$. Das heißt, dass der Korrelationsempfänger auch bei System **A** die richtige Entscheidung $V = Q_2$ trifft. Ohne den Korrekturterm ($-E_i/2$) hätte der Empfänger allerdings die falsche Entscheidung $V = Q_6$ getroffen.

d) Der Korrelationsempfänger **C** hat folgende Werte zu vergleichen:

$$\begin{aligned}W_0 &= 0.00 - 0.00 = 0.00, & W_1 &= -1.31 - 0.50 = -1.81, \\W_2 &= 3.59 - 0.50 = 3.09, & W_3 &= 2.28 - 1.00 = 1.28, \\W_4 &= 0.97 - 0.50 = 0.47, & W_5 &= -0.34 - 1.00 = -1.34, \\W_6 &= 4.56 - 1.00 = 3.56, & W_7 &= 3.25 - 1.50 = 1.75.\end{aligned}$$

Die Maximierung ergibt hier $j = \underline{6} \Rightarrow V = Q_6$. Da aber Q_2 gesendet wurde, entscheidet hier der Korrelationsempfänger falsch. Die Störungen sind zu stark.

e) Die Störungen sind bei System C am größten und für die aktuellen Empfangswerte sogar so groß, dass der Korrelationsempfänger eine Fehlentscheidung trifft.

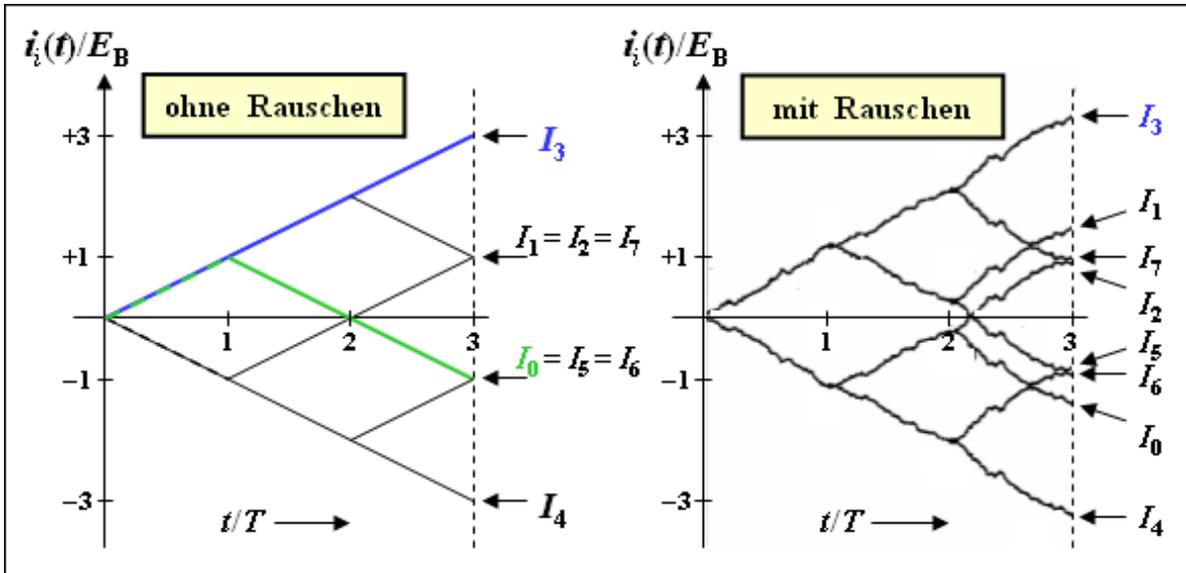
f) Die erste Aussage ist richtig. Im fehlerfreien Fall ist die Differenz zwischen $W_2 = 0.5$ und den nächstgrößten Werten $W_0 = W_3 = W_6 = 0$ jeweils gleich 0.5. Bei System **B** (leichte Störungen) ist die Differenz zwischen $W_2 = 0.63$ und dem nächstgrößeren Wert $W_6 = 0.18$ immerhin noch $D_{\min} = 0.45$. Erhöht man die Rauschleistung um den Faktor 50, so entscheidet der Korrelationsempfänger immer noch richtig, doch ist dann die minimale Differenz $D_{\min} = 0.16$ deutlich kleiner.

Für das System **C**, bei dem der Korrelationsempfänger überfordert ist (siehe Teilaufgabe d), wurde eine gegenüber dem System **A** um den Faktor 400 größere Rauschleistung zugrundegelegt.

Entscheidet der Korrelationsempfänger die gesendete Folge Q_2 falsch, so ist eine Verfälschung zu den Folgen Q_0 , Q_3 bzw. Q_6 am wahrscheinlichsten, da sich alle diese drei Folgen von Q_2 nur jeweils in einem Bit unterscheiden. Dass bei der beschriebenen Simulation W_6 stets größer ist als W_0 bzw. W_3 , ist „Zufall“ und sollte nicht überinterpretiert werden. Richtig sind also die Aussagen 1 und 3.

Musterlösung zur Aufgabe A3.10

a) Die linke Grafik zeigt das Baumdiagramm (ohne Rauschen) mit allen Endwerten. Grün hervorgehoben ist der Verlauf $i_0(t)/E_B$ mit dem Endergebnis $I_0/E_B = -1$, der zunächst linear bis $+1$ ansteigt – das jeweils erste Bit von $s_0(t)$ und $s_3(t)$ stimmen überein – und dann über zwei Bitdauern abfällt.



Die richtigen Ergebnisse lauten somit:

$$I_0/E_B = -1, \quad I_2/E_B = +1, \quad I_4/E_B = -3, \quad I_6/E_B = -1.$$

b) Bei Vorhandensein von (Rausch-) Störungen nehmen die Funktionen $i_i(t)$ nicht mehr linear zu bzw. ab, sondern haben einen Verlauf wie in der oberen rechten Grafik dargestellt. Solange $I_3 > I_{i \neq 3}$ ist, entscheidet der Korrelationsempfänger richtig. Bei Vorhandensein von Störungen gilt stets $I_0 \neq I_6$ im Gegensatz zum störungsfreien Baumdiagramm. Richtig ist also nur der zweite Lösungsvorschlag.

c) Auch hier ist nur die zweite Aussage zutreffend. Da nun die möglichen Sendesignale $s_i(t)$ nicht mehr aus horizontalen Abschnitten zusammengesetzt werden können, besteht auch das Baumdiagramm ohne Störungen nicht aus Geradenstücken. Da die Energien E_i unterschiedlich sind – dies erkennt man zum Beispiel durch den Vergleich der Signale $s_0(t)$ und $s_2(t)$ – müssen für die Entscheidung unbedingt die korrigierten Größen W_i herangezogen werden. Die Verwendung der reinen Korrelationswerte I_i kann bereits ohne Störungen zu Fehlentscheidungen führen.

d) Im Fall ohne Impulsinterferenzen (blaue Rechtecksignale) sind alle Signale auf den Bereich $0 \dots 3T$ begrenzt. Außerhalb stellt das Empfangssignal $r(t)$ reines Rauschen dar. Deshalb genügt in diesem Fall auch die Integration über den Bereich $0 \dots 3T$. Richtig ist Antwort 1.

Demgegenüber unterscheiden sich bei Berücksichtigung von Impulsinterferenzen (rote Signale) die Integranden $s_3(t) \cdot s_i(t)$ auch außerhalb dieses Bereichs. Wählt man $t_1 = -T$ und $t_2 = +4T$, so wird deshalb die Fehlerwahrscheinlichkeit des Korrelationsempfängers gegenüber dem Integrationsbereich $0 \dots 3T$ weiter verringert.

Musterlösung zur Aufgabe A3.11

a) Richtig sind die beiden ersten Lösungsvorschläge. Das Signal $m(t)$ nach dem Matched-Filter $H_{MF}(f)$ weist das größtmögliche Signal-zu-Störleistungsverhältnis auf. Die Störanteile der Folge $\langle m_\nu \rangle$ sind aber aufgrund der spektralen Formung (stark) korreliert. Aufgabe des zeitdiskreten Dekorrelationsfilters mit dem Frequenzgang $H_{DF}(f)$ ist es, diese Bindungen aufzulösen, weshalb für $H_{DF}(f)$ auch der Name „Whitening-Filter“ verwendet wird. Dies ist allerdings nur auf Kosten einer erhöhten Störleistung möglich \Rightarrow der letzte Lösungsvorschlag trifft nicht zu.

b) Die beiden bei $\underline{\nu = 1}$ ankommenden Pfeile sind jeweils blau gezeichnet und kennzeichnen das Symbol $a_1 = 0$. Somit ist bereits zu diesem Zeitpunkt das Ausgangssymbol a_1 festgelegt. Ebenso stehen die Symbole $a_3 = 1$ und $a_5 = 0$ bereits zu den Zeitpunkten $\underline{\nu = 3}$ bzw. $\underline{\nu = 5}$ fest.

Dagegen ist zum Zeitpunkt $\nu = 2$ eine Entscheidung bezüglich des Symbols a_2 nicht möglich. Unter der Hypothese, dass das nachfolgende Symbol $a_3 = 0$ sein wird, würde sich Symbol $a_2 = 1$ ergeben (bei „0“ kommt ein roter Pfad an, also von „1“ kommend). Dagegen führt die Hypothese $a_3 = 1$ zum Ergebnis $a_2 = 0$ (der bei „1“ ankommende Pfad ist blau).

c) Aus den durchgehenden Pfaden bei $\nu = 5$ ist ersichtlich:

$$a_1 \underline{=} 0, \quad a_2 \underline{=} 0, \quad a_3 \underline{=} 1, \quad a_4 \underline{=} 0, \quad a_5 \underline{=} 0.$$

d) Richtig ist nur die zweite Aussage: Da die Quellensymbole „0“ und „1“ als gleichwahrscheinlich vorausgesetzt wurden, ist der ML-Empfänger (Viterbi) identisch mit dem MAP-Empfänger.

Ein Schwellenwertentscheider – der zu jedem Takt eine symbolweise Entscheidung trifft – hat nur dann die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit wie der Viterbi-Empfänger, wenn es keine Impulsinterferenzen gibt. Dies ist hier offensichtlich nicht der Fall, sonst müsste zu jedem Zeitpunkt ν eine endgültige Entscheidung getroffen werden können.

Die erste Aussage trifft ebenfalls nicht zu. Das würde nämlich bedeuten, dass der Viterbi-Empfänger die Fehlerwahrscheinlichkeit 0 haben kann. Dies ist aus informationstheoretischen Gründen nicht möglich.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.11

- a) Aus den Gleichungen auf der Angabenseite erkennt man $d_0 = -0.4$ und $d_1 = -0.8$.
- b) Die Fehlergrößen $\varepsilon_0(i)$ beinhalten den Grundimpulswert g_{-1} , über den der Zusammenhang zwischen dem Amplitudenkoeffizienten a_1 und dem Detektionsabstastwert d_0 hergestellt wird (g_0 ist in diesen Gleichungen nicht enthalten). Man erkennt $g_{-1} = 0.4$. Aus den Gleichungen für $v = 1$ ist der Hauptwert $g_0 = 0.6$ ablesbar.
- c) Die möglichen Nutzabstastwerte sind $\pm g_0 \pm g_{-1} = \pm 0.6 \pm 0.4$, also ± 0.2 und ± 1.0 . Bei unipolarer Signalisierung würden sich die Werte 0, 0.4, 0.6 und 1 ergeben. Der Zusammenhang zwischen bipolaren Werten b_i und den unipolaren Äquivalenten u_i lautet allgemein:

$$b_i = 2 \cdot u_i - 1.$$

- d) Die Fehlergrößen ergeben sich für $v = 2$ unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus c) wie folgt:

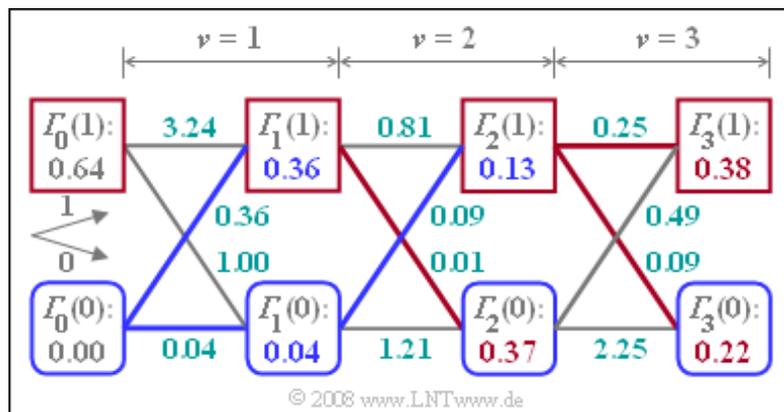
$$\begin{aligned} \varepsilon_2(+1, +1) &= [0.1 - 1.0]^2 = 0.81, & \varepsilon_2(-1, +1) &= [0.1 + 0.2]^2 = 0.09, \\ \varepsilon_2(+1, -1) &= [0.1 - 0.2]^2 = 0.01, & \varepsilon_2(-1, -1) &= [0.1 + 1.0]^2 = 1.21. \end{aligned}$$

Damit lauten die minimalen Gesamtfehlergrößen:

$$\begin{aligned} \Gamma_2(+1) &= \text{Min} [\Gamma_1(+1) + \varepsilon_2(+1, +1), \Gamma_1(-1) + \varepsilon_2(-1, +1)] = \\ &= \text{Min} [0.36 + 0.81, 0.04 + 0.09] = \underline{0.13}, \\ \Gamma_2(-1) &= \text{Min} [\Gamma_1(+1) + \varepsilon_2(+1, -1), \Gamma_1(-1) + \varepsilon_2(-1, -1)] = \\ &= \text{Min} [0.36 + 0.01, 0.04 + 1.21] = \underline{0.37}. \end{aligned}$$

$\Gamma_2(+1) = 0.13$ ist die minimale Gesamtfehlergröße unter der Hypothese, dass das nachfolgende Symbol $a_3 = +1$ sein wird. Unter dieser Annahme ist $a_2 = -1$ wahrscheinlicher als $a_2 = +1$, wie aus dem nachfolgenden Trellisdiagramm hervorgeht (der ankommende Pfad ist blau).

Hinweis: In nebenstehender Grafik ist der Zustand „1“ als „+1“ und „0“ als „-1“ zu interpretieren.



Eine durchaus realistische Alternative zu der Kombination „ $a_2 = -1, a_3 = +1$ “

ist „ $a_2 = +1, a_3 = -1$ “, die zur minimalen Gesamtfehlergröße $\Gamma_2(-1) = 0.37$ führen. Hier ist der ankommende Pfad rot.

- e) Nun gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(+1, +1) &= [0.5 - 1.0]^2 = 0.25, & \varepsilon_3(-1, +1) &= [0.5 + 0.2]^2 = 0.49, \\ \varepsilon_3(+1, -1) &= [0.5 - 0.2]^2 = 0.09, & \varepsilon_3(-1, -1) &= [0.5 + 1.0]^2 = 2.25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Gamma_3(+1) &= \text{Min} [0.13 + 0.25, 0.37 + 0.49] \underline{=} 0.38, \\ \Gamma_3(-1) &= \text{Min} [0.13 + 0.09, 0.37 + 2.25] \underline{=} 0.22.\end{aligned}$$

Bei beiden Gleichungen ist der jeweils erste Term der kleinere, wobei jeweils $\Gamma_2(+1) = 0.13$ enthalten ist. Deshalb wird der Viterbi-Empfänger mit Sicherheit $a_3 = +1$ ausgegeben, ganz egal, welche Informationen er zu späteren Zeitpunkten ($v > 3$) noch bekommen wird.

Verfolgt man den durchgehenden Pfad im Trellisdiagramm, so sind durch diese Festlegung bei $v = 3$ auch die früheren Amplitudenkoeffizienten fix: $a_1 = a_2 = -1$.

Musterlösung zur Aufgabe A3.12

a) Die erste Fehlergröße wird wie folgt berechnet:

$$\varepsilon_2(010) = [d_0 - 0 \cdot g_0 - 1 \cdot g_{-1} - 0 \cdot g_{-2}]^2 = [0.2 - 0.3]^2 = \underline{0.01}.$$

Entsprechend gilt für die weiteren Fehlergrößen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_2(011) &= [0.2 - 0.3 - 0.2]^2 = \underline{0.09}, \\ \varepsilon_2(110) &= [0.2 - 0.5 - 0.3]^2 = \underline{0.36}, \\ \varepsilon_2(111) &= [0.2 - 0.5 - 0.3 - 0.2]^2 = \underline{0.64}.\end{aligned}$$

b) Die Aufgabe ist, jeweils den minimalen von zwei Vergleichswerten zu finden:

$$\begin{aligned}\Gamma_2(10) &= \text{Min}[\Gamma_1(01) + \varepsilon_2(010), \Gamma_1(11) + \varepsilon_2(110)] = \\ &= \text{Min}[0.2 + 0.01, 1.2 + 0.36] = \underline{0.21}, \\ \Gamma_2(11) &= \text{Min}[\Gamma_1(01) + \varepsilon_2(011), \Gamma_1(11) + \varepsilon_2(111)] = \\ &= \text{Min}[0.2 + 0.09, 1.2 + 0.64] = \underline{0.29}.\end{aligned}$$

c) Richtig sind der erste und der letzte Lösungsvorschlag. Die Folge **1011010** erkennt man aus dem durchgehenden Pfad:

Rot – Blau – Rot – Rot – Blau – Rot – Blau.

Dagegen kann über das Symbol a_8 zum Zeitpunkt $v = 8$ noch keine endgültige Aussage gemacht werden: Nur unter der Hypothese $a_9 = 1$ und $a_{10} = 1$ würde man sich für $a_8 = 0$ entscheiden, bei anderen Hypothesen für $a_8 = 1$.

Musterlösung zur Aufgabe A3.13

a) Ohne Impulsinterferenzen bringen der DFE- und der ML-Empfänger keine Verbesserung gegenüber der einfachen Schwellenwertentscheidung:

$$p_{DFE} = p_{ML} = p_{SE} \approx \underline{2,87 \cdot 10^{-7}}.$$

b) Mit $g_0 = 0.6$, $g_{-1} = 0.1$ und $g_1 = 0.3$ erhält man näherungsweise:

$$p_{SE} \approx 1/4 \cdot Q\left(\frac{0.6 - 0.1 - 0.3}{0.2}\right) = 1/4 \cdot Q(1) \approx \underline{0.04},$$

$$p_{DFE} \approx 1/2 \cdot Q\left(\frac{0.6 - 0.1}{0.2}\right) = 1/2 \cdot Q(2.5) \approx \underline{3,1 \cdot 10^{-3}},$$

$$p_{ML} \approx Q\left(\frac{0.6}{0.2}\right) = Q(3) \approx \underline{1,35 \cdot 10^{-3}}.$$

c) Die Fehlerwahrscheinlichkeiten lauten mit $g_0 = 0.4$ und $g_1 = g_{-1} = 0.3$:

$$p_{SE} \approx 1/4 \cdot Q(0) \approx \underline{0.125} \Rightarrow \text{geschlossenes Auge},$$

$$p_{DFE} \approx 1/2 \cdot Q\left(\frac{0.4 - 0.3}{0.2}\right) = 1/2 \cdot Q(0.5) \approx \underline{0.15},$$

$$p_{ML} \approx Q\left(\frac{0.4}{0.2}\right) = Q(2) \approx \underline{0.0227}.$$

Interessant – und nicht etwa ein Rechenfehler – ist, dass die DFE schlechter ist als der herkömmliche Schwellenwertentscheider, wenn die Fehlerwahrscheinlichkeit 10% oder mehr beträgt (siehe dazu auch die Musterlösung zur Teilaufgabe d).

d) Nun ergibt sich auch für den DFE-Empfänger ein geschlossenes Auge. Die Fehlerwahrscheinlichkeit p_{DFE} ist größer als p_{SE} , da nun die ungünstigste Symbolfolge häufiger auftritt. Nach der angegebenen einfachen Näherung gilt:

$$p_{SE} = 1/4 \cdot Q(0) = 0.125, \quad p_{DFE} = 1/2 \cdot Q(0) \approx \underline{0.250}.$$

Bei exakter Rechnung erhält man dagegen:

$$p_{SE} = 1/4 \cdot Q\left(\frac{0.3 - 0.4 - 0.3}{0.2}\right) + 1/4 \cdot Q\left(\frac{0.3 - 0.4 + 0.3}{0.2}\right) +$$

$$+ 1/4 \cdot Q\left(\frac{0.3 + 0.4 - 0.3}{0.2}\right) + 1/4 \cdot Q\left(\frac{0.3 + 0.4 + 0.3}{0.2}\right) =$$

$$= 1/4 \cdot [Q(-2) + Q(1) + Q(2) + Q(5)] = 1/4 \cdot [1 + Q(1) + Q(5)].$$

Wegen $Q(-2) + Q(2) = 1$ und $Q(5) \approx 0$ erhält man daraus $p_{SE} \approx 25.5\%$.

Entsprechend gilt für den DFE-Empfänger:

$$p_{DFE} = 1/2 \cdot Q\left(\frac{0.3 - 0.4}{0.2}\right) + 1/2 \cdot Q\left(\frac{0.3 + 0.4}{0.2}\right) =$$

$$= 1/2 \cdot [Q(-0.5) + Q(3.5)] \approx \frac{1 - Q(0.5)}{2} \approx \underline{0.35}.$$

Dagegen beträgt die Fehlerwahrscheinlichkeit p_{ML} eines Maximum-Likelihood-Empfängers weiterhin $Q(2) \approx 2.27\%$. Die Reihenfolge der Detektionsgrundimpulsweite ist für die Fehlerwahrscheinlichkeit des Viterbi-Empfängers (nahezu) nicht von Bedeutung.