

Musterlösung zur Aufgabe A4.1

a) Jede orthonormale Basisfunktion soll die Energie 1 aufweisen, das heißt, es muss gelten:

$$\|\varphi_j(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j(t)^2 dt = 1.$$

Damit diese Bedingung zu erfüllen ist, muss die Basisfunktion die Einheit $s^{-0.5}$ besitzen. Weiterhin ist die Gleichung

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N s_{ij} \cdot \varphi_j(t)$$

zu berücksichtigen. Die Signale selbst weisen wie A die Einheit $W^{0.5}$ auf. Wegen der Einheit $s^{-0.5}$ von $\varphi_j(t)$ ist diese Gleichung nur dann mit der richtigen Dimension zu erfüllen, wenn die Koeffizienten s_{ij} mit der Einheit $(Ws)^{0.5}$ angegeben werden. Richtig sind also die Lösungsvorschläge 2 und 4.

b) Die Energie des Signals $s_1(t)$ ist gleich $E_1 = 2$. Daraus folgt für die Norm, für die Basisfunktion $\varphi_1(t)$ sowie für den Koeffizienten s_{11} :

$$\|s_1(t)\| = \sqrt{2}, \quad \varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\|s_1(t)\|}, \quad s_{11} = \sqrt{E_1} = \sqrt{2} \approx \underline{1.414}.$$

Die weiteren Koeffizienten sind $s_{12} = s_{13} = 0$, da die zugehörigen Basisfunktionen bisher noch gar nicht gefunden wurden, während $\varphi_1(t)$ formgleich mit $s_1(t)$ ist.

c) Da nach Berücksichtigung von $s_2(t)$ höchstens zwei Basisfunktionen gefunden sind, gilt mit Sicherheit $s_{23} = 0$. Dagegen erhält man für den Koeffizienten

$$s_{21} = \langle s_2(t), \varphi_1(t) \rangle = 1 \cdot 0.707 + 0 \cdot 0.707 = \underline{0.707},$$

für die Hilfsfunktion $\theta_2(t)$:

$$\theta_2(t) = s_2(t) - s_{21} \cdot \varphi_1(t) = \begin{cases} 1 - 0.707 \cdot 0.707 = 0.5 & 0 \leq t < 1 \\ 0 - 0.707 \cdot (-0.707) = 0.5 & 1 \leq t < 2 \end{cases},$$

für die zweite Basisfunktion:

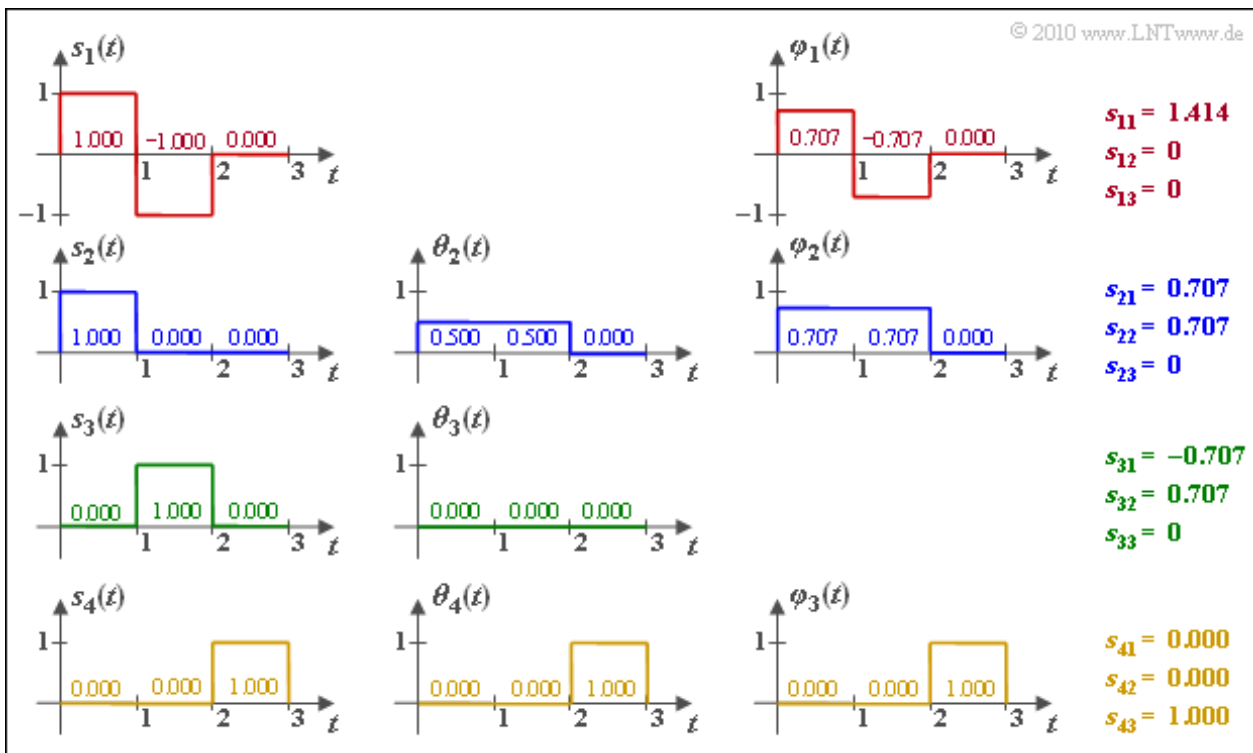
$$\varphi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\|\theta_2(t)\|}, \quad \|\theta_2(t)\| = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = \sqrt{0.5} \approx 0.707$$

$$\Rightarrow \varphi_2(t) = \begin{cases} 0.5/0.707 = 0.707 & 0 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t < 3 \end{cases},$$

und schließlich für den zweiten Koeffizienten:

$$s_{22} = \langle s_2(t), \varphi_2(t) \rangle = 1 \cdot 0.707 + 0 \cdot 0.707 = \underline{0.707}.$$

Die Berechnungen sind in der nachfolgenden Grafik verdeutlicht.



d) Man erkennt sofort, dass $s_3(t)$ sich als Linearkombination aus $s_1(t)$ und $s_2(t)$ ausdrücken lässt.

$$\begin{aligned}
 s_3(t) = -s_1(t) + s_2(t) &\Rightarrow s_{31} = -s_{11} + s_{21} = -1.414 + 0.707 = \underline{-0.707}, \\
 &s_{32} = -s_{12} + s_{22} = 0 + 0.707 = \underline{0.707}, \\
 &s_{33} = -s_{13} + s_{23} = 0 + 0 = \underline{0}.
 \end{aligned}$$

e) Der Bereich $2 \leq t \leq 3$ wird weder von $\varphi_1(t)$ noch von $\varphi_2(t)$ abgedeckt. Deshalb liefert $s_4(t)$ die neue Basisfunktion $\varphi_3(t)$. Da außerdem $s_4(t)$ nur Anteile im Bereich $2 \leq t \leq 3$ aufweist und $\|s_4(t)\| = 1$ ist, ergibt sich $\varphi_3(t) = s_4(t)$ sowie

$$s_{41} \equiv \underline{0}, \quad s_{42} \equiv \underline{0}, \quad s_{43} \equiv \underline{1}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.1

a) Der einzige Unterschied zur Aufgabe A4.1 ist die unterschiedliche Nummerierung der Signale $s_i(t)$. Damit ist offensichtlich, dass auch hier $N=3$ gelten muss.

b) Die 2-Norm gibt die Wurzel aus der Signalenergie an und ist vergleichbar mit dem Effektivwert bei leistungsbegrenzten Signalen. Die ersten drei Signale haben alle die 2-Norm

$$\|s_1(t)\| = \|s_2(t)\| = \|s_3(t)\| = \sqrt{A^2 \cdot T} = 10^{-3} \sqrt{W_S}.$$

Die Norm des letzten Signals ist um den Faktor „Wurzel aus 2“ größer:

$$\|s_4(t)\| = 1.414 \cdot 10^{-3} \sqrt{W_S}.$$

c) Die erste und die letzte Aussage sind zutreffend im Gegensatz zu den Aussagen 2 und 3:

- Es wäre völlig unlogisch, wenn die gefundenen Basisfunktionen bei anderer Sortierung der Signale $s_i(t)$ nicht mehr gelten sollten.
- Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert nur einen möglichen Basisfunktionssatz $\{\phi_j(t)\}$. Bei anderer Sortierung ergibt sich (möglicherweise) ein anderer. Die Anzahl der Permutationen von $M = 4$ Signalen ist $4! = 24$. Mehr Basisfunktionssätze kann es auf keinen Fall geben. Daraus folgt: der Lösungsvorschlag 2 ist falsch.
- Wahrscheinlich gibt es (wegen $N = 3$) aber nur $3! = 6$ mögliche Basisfunktionssätze. Wie aus der **Musterlösung** zur Aufgabe A4.1 ersichtlich ist, werden sich mit der Reihenfolge $s_1(t), s_2(t), s_4(t), s_3(t)$ die gleichen Basisfunktionen ergeben wie mit $s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t)$. Dies ist aber nur eine Vermutung der Autoren; wir haben es nicht überprüft.
- Die Aussage 3 kann allein schon wegen den unterschiedlichen Einheiten von $s_i(t)$ und $\phi_j(t)$ nicht stimmen. Die Signale weisen wie A die Einheit „Wurzel aus Watt“ auf, die Basisfunktionen die Einheit „1 durch Wurzel aus Sekunde“.
- Richtig ist somit die letzte Lösungsalternative, wobei für K gilt:

$$K = \|s_1(t)\| = \|s_2(t)\| = \|s_3(t)\| = 10^{-3} \sqrt{W_S}.$$

d) Aus dem Vergleich der Diagramme auf der Angabenseite erkennt man:

$$s_4(t) = s_1(t) - s_2(t) = K \cdot \varphi_1(t) - K \cdot \varphi_2(t).$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} s_4(t) &= s_{41} \cdot \varphi_1(t) + s_{42} \cdot \varphi_2(t) + s_{43} \cdot \varphi_3(t) \\ \Rightarrow s_{41} &= K = 10^{-3} \sqrt{W_S}, \quad s_{42} = -K = -10^{-3} \sqrt{W_S}, \quad s_{43} = 0. \end{aligned}$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.2

a) Die Energie kann nach folgender Gleichung berechnet werden:

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^T A^2 \cdot \cos^2(2\pi f_T t) dt = \\ &= \frac{A^2 \cdot T}{2} + \frac{A^2}{2} \int_0^T \cos(4\pi f_T t) dt = \frac{A^2 \cdot T}{2} = E. \end{aligned}$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass T ein geradzahliges Vielfaches von $1/f_T$ ist, so dass das zweite Integral verschwindet. Weiter gilt:

$$\|s_1(t)\| = \sqrt{E_1} = \sqrt{E} = \underline{1 \cdot E^{0.5}}.$$

b) Die Basisfunktion $\varphi_1(t)$ ist formgleich mit $s_1(t)$, wobei gilt:

$$\varphi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\|s_1(t)\|} = \frac{A \cdot \cos(2\pi f_T t)}{\sqrt{E}} = \frac{A \cdot \cos(2\pi f_T t)}{\sqrt{1/2 \cdot A^2 \cdot T}} = \sqrt{2/T} \cdot \cos(2\pi f_T t).$$

Richtig ist demnach der letzte Lösungsvorschlag.

c) Entsprechend der unter b) angegebenen Gleichung gilt

$$s_1(t) = \|s_1(t)\| \cdot \varphi_1(t) = \sqrt{E} \cdot \varphi_1(t),$$

also der Lösungsvorschlag 1.

d) Mit dem Signal $s_2(t)$ entsprechend der Angabe, der Basisfunktion $\varphi_1(t)$ gemäß Teilaufgabe b) sowie der angegebenen trigonometrischen Beziehung erhält man:

$$\begin{aligned} s_{21} &= \langle s_2(t), \varphi_1(t) \rangle = \int_0^T 2A \cdot \cos(2\pi f_T t + \pi/4) \cdot \sqrt{2/T} \cdot \cos(2\pi f_T t) dt = \\ &= \sqrt{\frac{8A^2}{T}} \cdot \int_0^T \cos(\pi/4) \cdot \cos^2(2\pi f_T t) dt - \\ &\quad - \sqrt{\frac{8A^2}{T}} \cdot \int_0^T \sin(\pi/4) \cdot \sin(2\pi f_T t) \cdot \cos(2\pi f_T t) dt. \end{aligned}$$

Der zweite Anteil ergibt den Wert 0 (Orthogonalität). Der erste Anteil liefert:

$$s_{21} = \sqrt{\frac{8A^2}{T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{T}{2} = \sqrt{A^2 \cdot T} = \sqrt{2E} = \underline{1.414 \cdot E^{0.5}}.$$

e) Entsprechend dem Gram-Schmidt-Verfahren erhält man

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= s_2(t) - s_{21} \cdot \varphi_1(t) = \\ &= 2A \cdot \cos(2\pi f_T t + \pi/4) - \sqrt{A^2 \cdot T} \cdot \sqrt{2/T} \cdot \cos(2\pi f_T t) = \\ &= 2A \cdot \cos(\pi/4) \cdot \cos(2\pi f_T t) - 2A \cdot \sin(\pi/4) \cdot \sin(2\pi f_T t) - \\ &\quad - \sqrt{2} \cdot A \cdot \cos(2\pi f_T t). \end{aligned}$$

Mit $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 2^{-0.5}$ folgt daraus:

$$\theta_2(t) = -\sqrt{2} \cdot A \cdot \sin(2\pi f_T t).$$

Richtig ist demnach der zweite Lösungsvorschlag.

f) Analog zur Teilaufgabe b) ergibt sich die orthonormale Basisfunktion $\varphi_2(t)$ zu

$$\varphi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{||\theta_2(t)||} = -\sqrt{2/T} \cdot \sin(2\pi f_T t).$$

Damit kann das Signal $s_2(t)$ wie folgt dargestellt werden (s_{21} entsprechend Teilaufgabe d)):

$$s_2(t) = s_{21} \cdot \varphi_1(t) + s_{22} \cdot \varphi_2(t), \quad s_{21} = \underline{1,414 \cdot E^{0.5}},$$
$$s_{22} = \frac{\theta_2(t)}{\varphi_2(t)} = \frac{-\sqrt{2} \cdot A \cdot \sin(2\pi f_T t)}{-\sqrt{2/T} \cdot \sin(2\pi f_T t)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1/2 \cdot A^2 \cdot T} = \underline{1,414 \cdot E^{0.5}}.$$

g) Wir betrachten sehr viele energiebegrenzte Signale ($M \gg 2$) folgender Form:

$$s_i(t) = \begin{cases} A_i \cdot \cos(2\pi f_T t + \phi_i) & 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Laufvariable kann dabei die Werte $i = 1, 2, \dots, M$ annehmen. Dann gilt:

- Alle M Signale lassen sich durch nur $N = 2$ Basisfunktionen vollständig beschreiben:

$$s_i(t) = s_{i1} \cdot \varphi_1(t) + s_{i2} \cdot \varphi_2(t).$$

- Geht man nach dem Gram-Schmidt-Verfahren vor, so erhält man für die beiden Basisfunktionen:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \cdot \cos(2\pi f_T t + \phi_1), \quad \varphi_2(t) = \sqrt{2/T} \cdot \cos(2\pi f_T t + \phi_1 \pm \pi/2).$$

- Das Vorzeichen im Argument der zweiten Cosinusfunktion ($\pm\pi/2$) ist nicht eindeutig. Dann hängt auch das Vorzeichen von s_{i2} davon ab, ob bei $\varphi_2(t)$ das Pluszeichen oder das Minuszeichen verwendet wurde.
- Mögliche Basisfunktionen, die dann zu anderen Koeffizienten führen, sind aber auch:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \cdot \cos(2\pi f_T t), \quad \varphi_2(t) \pm \sqrt{2/T} \cdot \sin(2\pi f_T t).$$

Richtig sind also die Lösungsvorschläge 2 und 3.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.2

a) Es ist

$$s_0(t) = A \cdot \cos(2\pi f_T t) = s_{01} \cdot \varphi_1(t) + s_{02} \cdot \varphi_2(t).$$

Da dieses Signal keinen Sinusanteil aufweist, ist $s_{02} = 0$. Weiter gilt mit der angegebenen Abkürzung:

$$A = s_{01} \cdot \sqrt{2/T} \Rightarrow s_{01} = \sqrt{1/2 \cdot A^2 \cdot T} = \sqrt{E} \underline{\underline{= 1 \cdot E^{0.5}}}.$$

b) Das Signal $s_2(t)$ lautet mit $i = 2$ (beachten Sie, dass die zweite Basisfunktion minus-sinusförmig ist):

$$s_2(t) = A \cdot \cos(2\pi f_T t + \pi/2) = -A \cdot \sin(2\pi f_T t)$$

$$\Rightarrow s_{21} \underline{\underline{= 0}}, \quad s_{22} = \sqrt{E} \underline{\underline{= 1 \cdot E^{0.5}}}.$$

c) Entsprechend den Musterlösungen zu a) und b) gilt nun:

$$s_{51} = s_{52} = -\sqrt{E/2} \underline{\underline{= -0.707 \cdot E^{0.5}}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s_5(t) &= -A/\sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f_T t) - A/\sqrt{2} \cdot \sin(2\pi f_T t) = \\ &= A \cdot \cos(2\pi f_T t + \phi_5) \text{ mit } \phi_5 = -0.75 \cdot \pi \text{ bzw. } \phi_5 = 1.25 \cdot \pi. \end{aligned}$$

d) Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 3. Dabei gilt folgender Zusammenhang:

$$\xi_1(t) = \varphi_1(t) + j \cdot \psi_1(t).$$

e) Richtig sind hier die Alternativen 2 und 3. Die Basisfunktion muss energienormiert sein und $\psi_1(t)$ ist wie $\varphi_1(t)$ eine reelle, nicht etwa eine imaginäre Funktion:

$$\varphi_1(t) = \psi_1(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

f) Aus dem Tiefpass-Signal $s_{\text{TP0}}(t)$ kann auch das Bandpass-Signal $s_0(t)$ berechnet werden. Im Bereich $0 \leq t \leq T$ gilt mit dem Ergebnis aus e):

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \text{Re}[s_{\text{TP0}}(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_T t}] = \text{Re}[\sqrt{E} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot e^{j \cdot 2\pi f_T t}] = \\ &= \sqrt{E/T} \cdot \cos(2\pi f_T t), \end{aligned}$$

also das gleiche Ergebnis wie in der Teilaufgabe a). Daraus folgt: Die Energie E bezieht sich auch bei Betrachtung im äquivalenten Tiefpass-Bereich auf das Bandpass-Signal.

Entsprechend gilt für das mit blauem Punkt markierte Signal $s_2(t)$ im interessierenden Bereich.

$$\begin{aligned} s_2(t) &= \text{Re}[j \cdot \sqrt{E/T} \cdot e^{j \cdot 2\pi f_T t}] = \\ &= \text{Re}[j \cdot \sqrt{E/T} \cdot \cos(2\pi f_T t) - \sqrt{E/T} \cdot \sin(2\pi f_T t)] = \\ &= -\sqrt{E/T} \cdot \sin(2\pi f_T t). \end{aligned}$$

Schließlich kann für das (grüne) Signal $s_5(t)$ im Bereich $0 \leq t < T$ geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
s_5(t) &= \operatorname{Re}\left[\frac{-1-j}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{E/T} \cdot e^{j \cdot 2\pi f_T t}\right] = \dots = \\
&= -\sqrt{\frac{E}{2T}} \cdot \cos(2\pi f_T t) + \sqrt{\frac{E}{2T}} \cdot \sin(2\pi f_T t) = \\
&= \sqrt{E/T} \cdot \cos(2\pi f_T t + 1.25 \cdot \pi).
\end{aligned}$$

Auch diese Ergebnisse stimmen mit denen der Teilaufgaben b) bzw. c) überein. Zutreffend ist also der Lösungsvorschlag 2.

Musterlösung zur Aufgabe A4.3

a) Richtig ist der Lösungsvorschlag 2, der die unterschiedlichen Frequenzen und die Begrenzung auf den Bereich $0 \leq t < T$ berücksichtigt. Die Signale $s_i(t)$ gemäß Vorschlag 3 unterscheiden sich dagegen nicht bezüglich der Frequenz, sondern weisen unterschiedliche Phasenlagen auf.

b) Die energiebegrenzten Signale $s_i(t) = A \cdot \cos(2\pi i \cdot t/T)$ sind alle zueinander orthogonal, das heißt, das innere Produkt zweier Signale $s_i(t)$ und $s_k(t)$ mit $i \neq k$ ist stets 0:

$$\begin{aligned} \langle s_i(t), s_k(t) \rangle &= A^2 \cdot \int_0^T \cos(2\pi i \cdot t/T) \cdot \cos(2\pi k \cdot t/T) dt = \\ &= \frac{A^2}{2} \cdot \int_0^T \cos(2\pi(i-k)t/T) dt + \frac{A^2}{2} \cdot \int_0^T \cos(2\pi(i+k)t/T) dt. \end{aligned}$$

Mit $i \in \{0, \dots, 4\}$ und $k \in \{0, \dots, 4\}$ sowie $i \neq j$ ist sowohl $i - k$ ganzzahlig ungleich 0, ebenso die Summe $i + k$. Dadurch liefern beide Integrale das Ergebnis 0:

$$\langle s_i(t), s_k(t) \rangle = 0 \Rightarrow \underline{N = M = 5}.$$

c) Die Energie des innerhalb T konstanten Signals $s_0(t)$ ist gleich

$$\begin{aligned} E_0 &= \|s_0(t)\|^2 = A^2 \cdot T \Rightarrow \|s_0(t)\| = A \cdot \sqrt{T} \\ \Rightarrow \varphi_0(t) &= \frac{s_0(t)}{\|s_0(t)\|} = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Richtig ist also der Lösungsvorschlag 2.

d) Richtig ist hier der letzte Lösungsvorschlag wegen

$$\begin{aligned} E_1 &= \|s_1(t)\|^2 = \frac{A^2 \cdot T}{2} \Rightarrow \|s_1(t)\| = A \cdot \sqrt{T/2} \\ \Rightarrow \varphi_1(t) &= \frac{s_1(t)}{\|s_1(t)\|} = \begin{cases} \sqrt{2/T} \cdot \cos(2\pi t/T) & 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.4

a) Die gesuchten empfängerseitigen Auftretswahrscheinlichkeiten sind

$$\begin{aligned}\Pr(r = +1) &= \Pr(s_0) \cdot \Pr(r = +1 | s = +1) = 0.75 \cdot 0.8 = \underline{0.6}, \\ \Pr(r = -1) &= \Pr(s_1) \cdot \Pr(r = -1 | s = -1) = 0.25 \cdot 0.6 = \underline{0.15}, \\ \Pr(r = 0) &= 1 - \Pr(r = +1) - \Pr(r = -1) = 1 - 0.6 - 0.15 = \underline{0.25}.\end{aligned}$$

Für die letzte Wahrscheinlichkeit gilt auch:

$$\Pr(r = 0) = 0.75 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0.4 = 0.25.$$

b) Für die erste gesuchte Rückschlusswahrscheinlichkeit gilt:

$$\Pr(s_0 | r = +1) = \frac{\Pr(r = +1 | s_0) \cdot \Pr(s_0)}{\Pr(r = +1)} = \frac{0.8 \cdot 0.75}{0.6} = \underline{1}.$$

Entsprechend erhält man für die weiteren Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}\Pr(s_1 | r = +1) &= 1 - \Pr(s_0 | r = +1) = \underline{0}, \\ \Pr(s_0 | r = -1) &= 0, \quad \Pr(s_1 | r = -1) = \underline{1}, \\ \Pr(s_0 | r = 0) &= \frac{\Pr(r = 0 | s_0) \cdot \Pr(s_0)}{\Pr(r = 0)} = \frac{0.2 \cdot 0.75}{0.25} = \underline{0.6}, \\ \Pr(s_1 | r = 0) &= 1 - \Pr(s_0 | r = 0) = \underline{0.4}.\end{aligned}$$

c) Es gelte $r = +1$. Dann entscheidet sich

- der MAP-Empfänger für s_0 , da

$$\Pr(s_0 | r = +1) = 1 > \Pr(s_1 | r = +1) = 0,$$

- der ML-Empfänger ebenfalls für s_0 , da

$$\Pr(r = +1 | s_0) = 0.8 > \Pr(r = +1 | s_1) = 0.$$

Richtig ist also NEIN.

d) Zum gleichen Ergebnis NEIN kommt man unter der Voraussetzung „ $r = -1$ “, da keine Verbindung zwischen s_0 und „ $r = -1$ “ besteht.

e) Der MAP-Empfänger entscheidet sich für das Ereignis s_0 , da

$$\Pr(s_0 | r = 0) = 0.6 > \Pr(s_1 | r = 0) = 0.4.$$

Dagegen wird sich der ML-Empfänger für s_1 entscheiden, da

$$\Pr(r = 0 | s_1) = 0.4 > \Pr(r = 0 | s_0) = 0.2.$$

Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1 und 4.

f) Der Maximum-Likelihood-Empfänger

- entscheidet sich nur für s_0 , wenn $r = +1$ ist,
- macht also keinen Fehler, wenn s_1 gesendet wurde,
- macht nur einen Fehler bei der Kombination „ s_0 “ und „ $r = 0$ “:

$$\Pr(\text{Symbolfehler}) = \Pr(\mathcal{E}) = 0.75 \cdot 0.2 = \underline{0.15}.$$

g) Der MAP-Empfänger entscheidet sich dagegen bei „ $r = 0$ “ für s_0 . Einen Symbolfehler gibt es also nur in der Kombination „ s_1 “ und „ $r = 0$ “. Daraus folgt:

$$\Pr(\text{Symbolfehler}) = \Pr(\mathcal{E}) = 0.25 \cdot 0.4 = \underline{0.1}.$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit ist hier geringer als beim ML-Empfänger, da nun auch die unterschiedlichen Apriori-Wahrscheinlichkeiten $\Pr(s_0)$ und $\Pr(s_1)$ berücksichtigt werden.

Musterlösung zur Aufgabe A4.5

a) Richtig ist die letzte Lösungsalternative. Im allgemeinen führt der MAP-Empfänger zu einer kleineren Fehlerwahrscheinlichkeit. Sind aber die Auftretswahrscheinlichkeiten $\Pr(m = m_0) = \Pr(m = m_1) = 0.5$ gleich, so liefern beide Empfänger das gleiche Ergebnis.

b) Mit $K_2 = 0$ und $K_1 = 1$ ergibt sich

$$r = r_1 = s + n_1.$$

Bei bipolarem (antipodischem) Sendesignal und AWGN-Rauschen ist die Fehlerwahrscheinlichkeit des optimalen Empfängers (egal, ob als Korrelations- oder Matched-Filter-Empfänger realisiert) gleich

$$p_S = \Pr(\text{Symbolfehler}) = Q\left(\sqrt{E_s/\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{2E_s/N_0}\right).$$

Mit $E_s = 8 \cdot 10^{-6}$ Ws und $N_0 = 10^{-6}$ W/Hz erhält man weiter:

$$p_S = \Pr(\text{Symbolfehler}) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \text{ Ws}}{10^{-6} \text{ W/Hz}}}\right) = Q(4) \approx 0.317 \cdot 10^{-4}.$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von K_1 , da durch eine Verstärkung oder Dämpfung die Nutzleistung in gleicher Weise verändert wird wie die Rauschleistung.

c) Mit $K_1 = 0$ und $K_2 = 1$ gilt für die Entscheidungsgröße:

$$r = r_2 = n_1 + n_2.$$

Diese beinhaltet keine Information über das Nutzsignal, sondern nur Rauschen, und es gilt unabhängig von K_2 :

$$p_S = \Pr(\text{Symbolfehler}) = Q(0) \approx 0.5.$$

d) Die Entscheidungsregel des optimalen Empfängers (egal, ob als MAP oder als ML realisiert) lautet wegen $\Pr(m = m_0) = \Pr(m = m_1)$:

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \arg \max_i [p_{m|r_1, r_2}(m_i | \rho_1, \rho_2)] = \\ &= \arg \max_i [p_{r_1, r_2|m}(\rho_1, \rho_2 | m_i) \cdot \Pr(m = m_i)] = \\ &= \arg \max_i [p_{r_1, r_2|s}(\rho_1, \rho_2 | s_i)]. \end{aligned}$$

Diese Verbundwahrscheinlichkeitsdichte kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\hat{m} = \arg \max_i [p_{r_1|s}(\rho_1 | s_i) \cdot p_{r_2|r_1, s}(\rho_2 | \rho_1, s_i)].$$

Da nun auch der zweite Multiplikand von der Nachricht (s_i) abhängt, sollte r_2 auf jeden Fall in den Entscheidungsprozess eingebunden werden. Richtig ist also: JA.

e) Bei AWGN-Rauschen mit der Varianz σ^2 ergeben sich für die beiden in der letzten Teilaufgabe eingeführten Verbunddichten und deren Produkt P :

$$\begin{aligned}
p_{r_1 | s}(\rho_1 | s_i) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left[-\frac{(\rho_1 - s_i)^2}{2\sigma^2} \right], \\
p_{r_2 | r_1, s}(\rho_2 | \rho_1, s_i) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left[-\frac{(\rho_2 - (\rho_1 - s_i))^2}{2\sigma^2} \right] \\
\Rightarrow P &= \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \{(\rho_1 - s_i)^2 + (\rho_2 - (\rho_1 - s_i))^2\} \right].
\end{aligned}$$

Gesucht wird dasjenige Argument, das dieses Produkt P maximiert, was gleichzeitig bedeutet, dass der Ausdruck in den geschweiften Klammern den kleinstmöglichen Wert annehmen soll:

$$\begin{aligned}
\mu = \hat{m} &= \arg \max_i P = \arg \min_i \{(\rho_1 - s_i)^2 + (\rho_2 - (\rho_1 - s_i))^2\} = \\
&= \arg \min_i \{\rho_1^2 - 2\rho_1 s_i + s_i^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 + 2\rho_2 s_i + \rho_1^2 - 2\rho_1 s_i + s_i^2\}.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet μ den Schätzwert der Nachricht. Bei dieser Minimierung kann nun auf alle Terme verzichtet werden, die nicht von der Nachricht s_i abhängen. Ebenso unberücksichtigt bleiben die Terme mit s_i^2 , da $s_0^2 = s_1^2$ gilt. Somit erhält man die deutlich einfachere Entscheidungsregel:

$$\mu = \arg \min_i \{-4\rho_1 s_i + 2\rho_2 s_i\} = \arg \min_i \{(\rho_2 - 2\rho_1) \cdot s_i\}.$$

Richtig ist also schon mal der Lösungsvorschlag 2. Aber nach Multiplikation mit $-1/2$ erhält man auch die zuletzt genannte Entscheidungsregel:

$$\mu = \arg \max_i \{(\rho_1 - \rho_2/2) \cdot s_i\}.$$

Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 2 und 3.

f) Setzt man die Konstanten $K_1 = 1$ und $K_2 = -1/2$, so lautet die optimale Entscheidungsregel mit der Realisierung $\rho = \rho_1 - \rho_2/2$:

$$\mu = \begin{cases} m_0 & \text{für } \rho > 0, \\ m_1 & \text{für } \rho < 0. \end{cases}$$

Da $\rho = 0$ nur mit der Wahrscheinlichkeit 0 auftritt, ist es im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung egal, ob man diesem Ereignis „ $\rho = 0$ “ die Nachricht $\mu = m_0$ oder $\mu = m_1$ zuordnet.

g) Mit $K_2 = -1/2$ erhält man für den Eingangswert des Entscheiders:

$$r = r_1 - r_2/2 = s + n_1 - (n_1 + n_2)/2 = s + n \Rightarrow n = \frac{n_1 - n_2}{2}.$$

Die Varianz dieser Zufallsgröße ist

$$\sigma_n^2 = 1/4 \cdot [\sigma^2 + \sigma^2] = \sigma^2/2 = N_0/4.$$

Daraus ergibt sich für die Fehlerwahrscheinlichkeit analog zur Teilaufgabe b):

$$\Pr(\text{Symbolfehler}) = Q \left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0/4}} \right) = Q(4 \cdot \sqrt{2}) = 1/2 \cdot \operatorname{erfc}(4) = \underline{\underline{0.771 \cdot 10^{-8}}}.$$

Durch Berücksichtigung von r_2 lässt sich also die Fehlerwahrscheinlichkeit von $0.317 \cdot 10^{-4}$ auf den deutlich kleineren Wert $0.771 \cdot 10^{-8}$ absenken, obwohl die Entscheidungskomponente r_2 nur Rauschen beinhaltet. Dieses Rauschen r_2 erlaubt aber eine Schätzung der Rauschkomponente n_1 von r_1 .

Halbiert man die Sendeenergie von $8 \cdot 10^{-6}$ Js auf $4 \cdot 10^{-6}$ Js, so ergibt sich hier immer noch die Fehlerwahrscheinlichkeit $0.317 \cdot 10^{-4}$, wie in der Teilaufgabe b) berechnet.. Bei alleiniger Auswertung von r_1 würde die Fehlerwahrscheinlichkeit dagegen $0.234 \cdot 10^{-2}$ betragen.

Musterlösung zur Aufgabe A4.6

a) Mit $\Pr(m_0) = \Pr(m_1) = 0.5$ lautet die Gleichung der Begrenzungsgeraden zwischen den beiden Entscheidungsgebieten I_0 und I_1 :

$$\|\mathbf{s}_1\|^2 - \|\mathbf{s}_0\|^2 = 2 \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0).$$

Mit den gegebenen Vektorwerten, also den Zahlenwerten

$$\|\mathbf{s}_1\|^2 = 4^2 + 1^2 = 17, \quad \|\mathbf{s}_0\|^2 = 1^2 + 5^2 = 26, \quad \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0 = (3, -4)$$

erhält man folgende Gleichung für die Entscheidungsgrenze:

$$3 \cdot \rho_1 - 4 \cdot \rho_2 = (17 - 26)/2 = -9/2 \Rightarrow \rho_2 = 3/4 \cdot \rho_1 + 9/8.$$

Die Entscheidungsgrenze liegt in der Mitte zwischen \mathbf{s}_0 und \mathbf{s}_1 und verläuft um 90° gedreht gegenüber der Verbindungslinie zwischen den beiden Symbolen. Sie geht durch den Punkt (2.5, 3). Richtig ist also der erste Lösungsvorschlag.

Der Vorschlag 2 beschreibt dagegen die Verbindungsgerade selbst und $\rho_2 = 3$ ist eine Horizontale.

b) Das Entscheidungsgebiet I_1 sollte natürlich den Punkt \mathbf{s}_1 beinhalten \Rightarrow Gebiet unterhalb der Entscheidungsgeraden. Punkt $A = (1.5, 2)$ gehört zu diesem Entscheidungsgebiet, wie aus der Grafik hervorgeht. Rechnerisch lässt sich dies zeigen,

da die Entscheidungsgerade zum Beispiel durch den Punkt (1.5, 2.25) geht und somit (1.5, 2) unterhalb der Entscheidungsgeraden liegt. Richtig ist also der Lösungsvorschlag 2.

c) Die Entscheidungsgerade geht auch durch den Punkt (3, 3.375). $B = (3, 3.5)$ liegt oberhalb und gehört somit zum Entscheidungsgebiet I_0 entsprechend dem Lösungsvorschlag 1.

d) Entsprechend der Gleichung auf dem Angabenblatt und den Berechnungen zur Teilaufgabe a) gilt nun:

$$\|\mathbf{s}_1\|^2 - \|\mathbf{s}_0\|^2 + 2 \cdot \sigma_n^2 \cdot \ln \frac{\Pr(m_0)}{\Pr(m_1)} = 2 \cdot \boldsymbol{\rho}^T \cdot (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0).$$

Mit $\|\mathbf{s}_1\|^2 = 17$, $\|\mathbf{s}_0\|^2 = 26$, $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0 = (3, -4)$ erhält man:

$$\rho_2 = 3/4 \cdot \rho_1 + 9/8 - K/8.$$

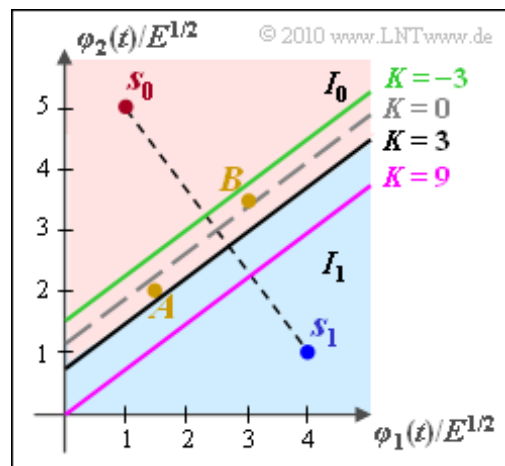
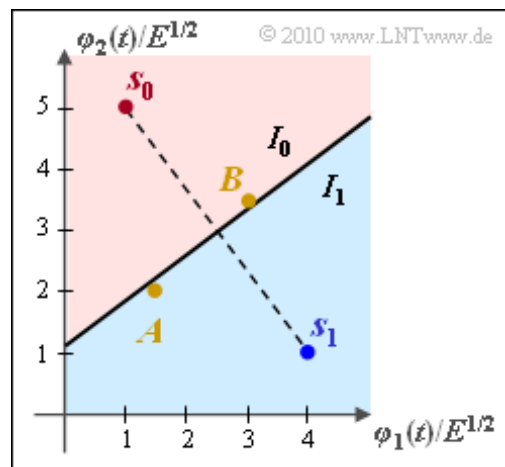
Hierbei ist folgende Abkürzung verwendet:

$$K = 2 \cdot \sigma_n^2 \cdot \ln \frac{\Pr(m_0)}{\Pr(m_1)} = 2 \cdot 1^2 \cdot 1.5 = 3.$$

Daraus folgt weiter:

$$\rho_2 = 3/4 \cdot \rho_1 + 9/8 - 3/8 = 3/4 \cdot \rho_1 + 3/4.$$

Die Entscheidungsgerade ist um $3/8$ nach unten verschoben (schwarze Kurve, mit „ $K = 3$ “ bezeichnet in der Grafik). Richtig ist also der Lösungsvorschlag 2.



Die erste Gleichung beschreibt die optimale Entscheidungsgrenze für gleichwahrscheinliche Symbole ($K = 0$, grau gestrichelt). Die dritte Gleichung gilt für $K = -3$. Diese ergibt sich mit $\sigma_n^2 = 1$ für die Symbolwahrscheinlichkeiten $\Pr(m_1) \approx 0.817$ und $\Pr(m_0) \approx 0.138$ (grüne Kurve). Die violette Gerade ergibt sich mit $K = 9$, also zum Beispiel bei gleichen Wahrscheinlichkeiten wie für die schwarze Kurve, aber nun mit der Varianz $\sigma_n^2 = 3$.

e) Bereits aus obiger Grafik erkennt man, dass nun sowohl **A** als auch **B** zur Entscheidungsregion I_0 gehören. Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1 und 3.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.6

a) Die drei erstgenannten Voraussetzungen müssen auf jeden Fall erfüllt sein. Die Gleichung gilt dann unabhängig von den Auftretswahrscheinlichkeiten. Im Fall $\Pr(\mathbf{s} = \mathbf{s}_0) \neq \Pr(\mathbf{s} = \mathbf{s}_1)$ kann durch eine Verschiebung der Entscheidungsschwelle eine kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit erzielt werden.

b) Der Rauscheffektivwert σ_n und damit auch die Signalenergie $E = \sigma_n^2$ sind für alle drei betrachteten Varianten gleich. Gleiches gilt für die Distanz der Signalaumpunkte. Für die Variante A gilt zum Beispiel:

$$d = \sqrt{\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0\|^2} = \sqrt{E \cdot (4 - 1)^2 + E \cdot (1 - 5)^2} = 5 \cdot \sqrt{E}.$$

Durch die Verschiebung des Koordinatensystems ändert sich am Abstand zwischen \mathbf{s}_0 und \mathbf{s}_1 nichts (Variante B), und auch bei Variante C (nach Drehung) ergibt sich der gleiche Abstand.

Richtig ist also der Lösungsvorschlag 4. Durch eine Drehung des Koordinatensystems kann man bei einem Binärsystem ($M = 2$) stets mit einer Basisfunktion ($N = 1$) auskommen. Da das zweidimensionale Rauschen zirkulär symmetrisch ist \Rightarrow gleiche Streuung σ_n in alle Richtungen, kann auch der Rauschterm wie in **Kapitel 1.2** eindimensional beschrieben werden.

c) Für alle hier betrachteten Varianten, also auch für die Variante A, gilt:

$$p_s = \Pr(\mathcal{E}) = Q\left(\frac{d/2}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{5/2 \cdot \sqrt{E}}{\sigma_n}\right) = Q(2.5).$$

Mit der angegebenen Näherung erhält man

$$p_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2.5} \cdot e^{-2.5^2/2} \approx \underline{0.7 \cdot 10^{-2}}.$$

d) Bei der Variante C ergibt sich für die mittlere Energie pro Symbol:

$$\begin{aligned} E_s &= \Pr(\mathbf{s} = \mathbf{s}_0) \cdot (-2.5 \cdot \sqrt{E})^2 + \Pr(\mathbf{s} = \mathbf{s}_1) \cdot (+2.5 \cdot \sqrt{E})^2 = \\ &= [\Pr(\mathbf{s} = \mathbf{s}_0) + \Pr(\mathbf{s} = \mathbf{s}_1)] \cdot 6.25 \cdot E = 6.25 \cdot E \\ \Rightarrow E &= \frac{E_s}{6.25} \Rightarrow \sqrt{E} = \frac{\sqrt{E_s}}{2.5}. \end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis in die unter c) gefundene Gleichung ein, so erhält man mit $\sigma_n^2 = N_0/2$:

$$\begin{aligned} p_s &= Q\left(\frac{2.5 \cdot \sqrt{E}}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E_s}}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2 \cdot E_s}}{N_0}\right) = \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 6.25 \cdot 10^{-6} \text{ Ws}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ W/Hz}}}\right) = Q(2.5) \approx \underline{0.7 \cdot 10^{-2}}. \end{aligned}$$

e) Durch die Drehung des Koordinatensystems ändert sich nichts an den Energieverhältnissen. Aus diesem Grund erhält man wieder $p_s \approx 0.007$.

f) Bei der Variante A ist die mittlere Energie pro Symbol

$$E_s = 1/2 \cdot [(1^2 + 5^2) \cdot E + (4^2 + 1^2) \cdot E] = 21.5 \cdot E.$$

Der Abstand von der Schwelle, die bei gleichwahrscheinlichen Symbolen in der Mitte zwischen \mathbf{s}_0 und \mathbf{s}_1 liegen sollte, ist wie bei den anderen Varianten $d/2 = 2.5 \cdot E^{1/2}$. Mit $\sigma_n^2 = N_0/2$ erhält man somit die Bestimmungsgleichung:

$$p_S = Q\left(\frac{2.5 \cdot \sqrt{E}}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q(2.5) \approx 0.7 \cdot 10^{-2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2E}{N_0}} = 1 \Rightarrow \frac{E}{N_0} = 0.5 \Rightarrow \frac{E_S}{21.5 \cdot N_0} = 0.5$$

$$\Rightarrow E_S = 0.5 \cdot 21.5 \cdot N_0 \underline{\underline{= 21.5 \cdot 10^{-6} \text{ W}_S}}$$

Das bedeutet: Bei der Variante A ist gegenüber den beiden anderen Systemen eine um den Faktor 3.44 größere mittlere Symbolenergie E_S erforderlich, um die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit $p_S = 0.007$ zu erzielen. Das heißt: Diese Signalraumkonstellation ist sehr ungünstig. Es ergibt sich ein sehr großes E_S , ohne dass gleichzeitig der Abstand d vergrößert wird.

Mit $E_S = 6.25 \cdot 10^{-6} \text{ W}_S$ würde sich dagegen $p_S = Q(2.5/3.44^{1/2}) \approx Q(1.35) \approx 9\%$ ergeben. Das heißt: Die Fehlerwahrscheinlichkeit würde um mehr als eine Zehnerpotenz größer.

Musterlösung zur Aufgabe A4.7

a) Die Höhen der beiden gezeichneten Dichtefunktionen – unter Berücksichtigung von $\Pr(m_0)$ und $\Pr(m_1)$ – sind proportional zu diesen Auftretswahrscheinlichkeiten $\Pr(m_0)$ und $\Pr(m_1)$. Aus

$$\Pr(m_1) = 2 \cdot \Pr(m_0), \quad \Pr(m_0) + \Pr(m_1) = 1$$

folgt direkt $\Pr(m_0) = 1/3 \approx 0.333$ und $\Pr(m_1) = 2/3 \approx 0.667$.

b) Mit der Entscheidungsgrenze $G = 0$ gilt unabhängig von den Auftretswahrscheinlichkeiten:

$$p_S = Q\left(\frac{d/2}{\sigma_n}\right).$$

Mit $d = 2 \cdot E_S^{1/2}$ und $\sigma_n = E_S^{1/2}/3$ ergibt sich hierfür:

$$p_S = Q(3) \approx 0.135 \cdot 10^{-2}.$$

c) Entsprechend der Angabe gilt für den „normierten Schwellenwert“:

$$\gamma = \frac{G_{\text{opt}}}{E_S^{1/2}} = 2 \cdot \frac{\sigma_n^2}{d^2} \cdot \ln \frac{\Pr(m_1)}{\Pr(m_0)} = \frac{2 \cdot E_S/9}{4 \cdot E_S} \cdot \ln \frac{2/3}{1/3} \approx 0.04.$$

Damit ist $G_{\text{opt}} = \gamma \cdot E_S^{1/2} = 0.04 \cdot E_S^{1/2}$. Die optimale Entscheidungsgrenze ist demnach nach rechts (hin zum unwahrscheinlicheren Symbol s_0) verschoben, da $\Pr(m_0) < \Pr(m_1)$.

d) Mit dieser optimalen Entscheidungsgrenze ergibt sich eine gegenüber der Teilaufgabe b) geringfügig kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} p_S &= 2/3 \cdot Q(3 \cdot 1.04) + 1/3 \cdot Q(3 \cdot 0.96) = \\ &= 2/3 \cdot 0.090 \cdot 10^{-2} + 1/3 \cdot 0.199 \cdot 10^{-2} \approx 0.126 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

e) Mit der Entscheidungsgrenze in der Mitte zwischen den Symbolen ($G = 0$) ergibt sich analog zur Teilaufgabe b) mit der nun größeren Rauschvarianz:

$$p_S = Q\left(\frac{d/2}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{E^{1/2}}{E^{1/2}}\right) = Q(1) \approx 0.159.$$

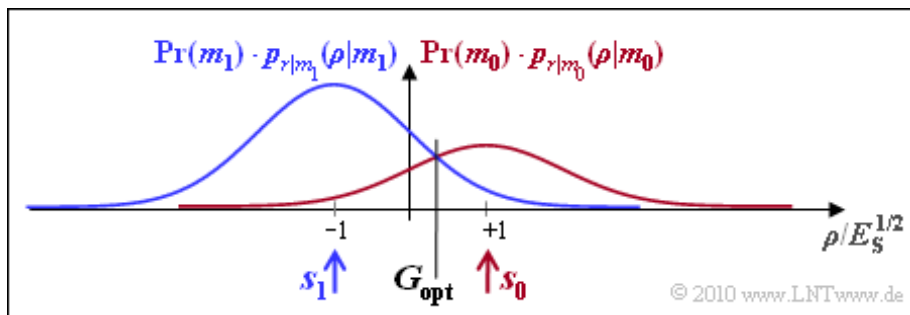
Die Kenngröße γ (normierte bestmögliche Verschiebung der Entscheidungsgrenze) ergibt sich zu

$$\gamma = 2 \cdot \frac{\sigma_n^2}{d^2} \cdot \ln \frac{\Pr(m_1)}{\Pr(m_0)} = \frac{2 \cdot E_S}{4 \cdot E_S} \cdot \ln \frac{2/3}{1/3} = \frac{\ln 2}{2} \approx 0.35 \Rightarrow G_{\text{opt}} = 0.35 \cdot E_S^{1/2}.$$

Das häufigere Symbol wird nun seltener verfälscht \Rightarrow die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit wird geringer:

$$p_S = 2/3 \cdot Q(1.35) + 1/3 \cdot Q(0.65) = 2/3 \cdot 0.0885 + 1/3 \cdot 0.258 \approx 0.145.$$

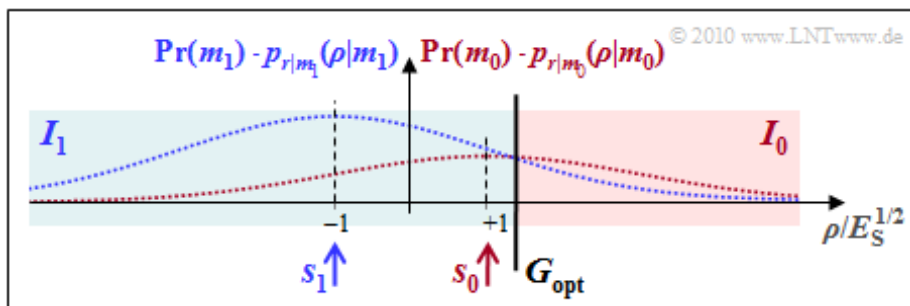
Die Abbildung macht deutlich, dass die optimale Entscheidungsgrenze auch grafisch als Schnittpunkt der beiden (gewichteten) Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen ermittelt werden kann.



f) Alle Lösungsvorschläge dieser eher akademischen Teilaufgabe sind richtig. Mit dem Schwellenwert $G = 0$ ergibt sich $p_S = Q(0.5) \approx 0.309$. Die Kenngröße $\gamma = 1.4$ hat nun den vierfachen Wert gegenüber der Teilaufgabe e), so dass die optimale Entscheidungsgrenze nun bei $G_{\text{opt}} = 1.4 \cdot s_0$ liegt. Somit gehört der (ungestörte) Signalwert s_0 nicht zur Entscheidungsregion I_0 , sondern zu I_1 , gekennzeichnet durch $\rho < G_{\text{opt}}$. Nur mit einem (positiven) Rauschanteil ist I_0 ($\rho > G_{\text{opt}}$) überhaupt erst möglich. Für die Fehlerwahrscheinlichkeit gilt mit $G_{\text{opt}} = 1.4 \cdot s_0$:

$$\begin{aligned}
 p_S &= 2/3 \cdot Q(0.5 \cdot (1 + 1.4)) + 1/3 \cdot Q(0.5 \cdot (1 - 1.4)) = \\
 &= 2/3 \cdot Q(1.2) + 1/3 \cdot Q(-0.2) = 2/3 \cdot 0.115 + 1/3 \cdot [1 - 0.421] \approx 0.27.
 \end{aligned}$$

Die folgende Grafik verdeutlicht die hier gemachten Aussagen.



Musterlösung zur Aufgabe A4.8

a) Die Verbindungslinie zwischen den Signalpunkten $s_0 = (-1, 1)$ und $s_1 = (1, 2)$ hat die Steigung $1/2$ (siehe Grafik bei Teilfrage d). Die Entscheidungsgrenze schneidet die Verbindungslinie bei $(s_0 + s_1)/2 = (0, 1.5)$ und weist die Steigung 2 auf (Drehung der Verbindungslinie um 90°). Daraus folgt:

$$y = 1.5 - 2x.$$

Richtig ist also der Lösungsvorschlag 1.

b) Die Verbindungslinie zwischen $s_0 = (-1, 1)$ und $s_2 = (2, -1)$ besitzt die Steigung $-2/3$ und schneidet die Entscheidungsgrenze G_{02} (mit der Steigung $3/2$) bei $(0.5, 0)$. Daraus folgt:

$$y = 3/2 (x - 1/2) = -3/4 + 3/2 \cdot x.$$

Dies ist der Lösungsvorschlag 3.

c) Die Verbindungslinie zwischen $s_1 = (1, 2)$ und $s_2 = (2, -1)$ schneidet die Entscheidungsgrenze G_{12} bei $(1.5, 0.5)$ und besitzt die Steigung -3 . Demzufolge ist die Steigung von $G_{12} = 1/3$ und die Gleichung der Entscheidungsgrenze G_{12} lautet:

$$y - 1/2 = 1/3 \cdot (x - 3/2) = x/3 - 1/2 \Rightarrow y = x/3.$$

Hier ist der Lösungsvorschlag 2 zutreffend.

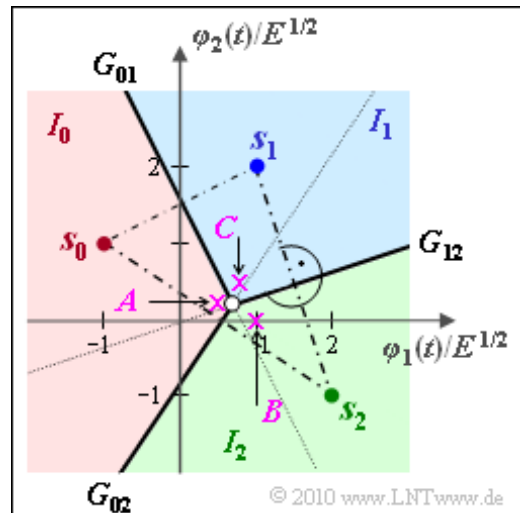
d) Die nachfolgende Grafik zeigt bereits, dass die Antwort JA ist. Der Schnittpunkt von G_{01} und G_{12} (weißer Kreis) liegt bei $(9/14, 3/14)$, wegen

$$\begin{aligned} 3/2 - 2x &= x/3 \Rightarrow 3/2 = 7/3 \cdot x \\ \Rightarrow y &= 3/14. \end{aligned}$$

Auch die Gerade G_{02} geht durch diesen Punkt:

$$\begin{aligned} y(x = 9/14) &= -3/4 + 3/2 \cdot x = \\ &= -3/4 + 3/2 \cdot 9/14 = \\ &= \frac{-21 + 27}{28} = 3/14. \end{aligned}$$

e) Gemäß der Grafik sind alle genannten Aussagen richtig.



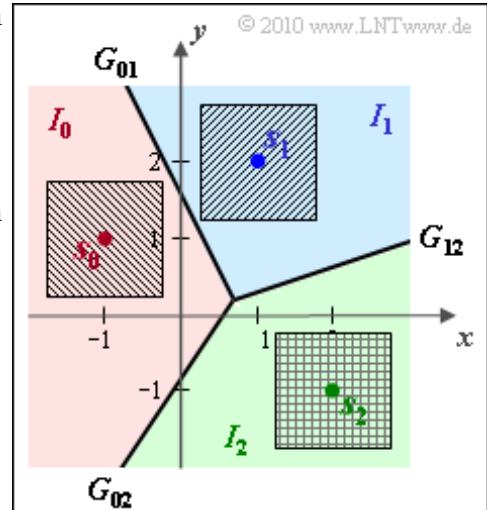
Musterlösung zur Aufgabe Z4.8

a) Das Volumen der 2D-WDF $p_n(x, y)$ muss 1 ergeben, das heißt:

$$2A \cdot 2A \cdot K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{4A^2}.$$

Mit $A = 0.75 \Rightarrow 2A = 3/2$ erhält man $K = 4/9 \approx 0.444$.

b) In nebenstehender Grafik ist die Rauschkomponente n durch Quadrate der Kantenlänge 1.5 um die 2D-Signalraumpunkte s_i eingezeichnet. Man erkennt, dass keine Entscheidungsgrenze durch Rauschkomponenten überschritten wird. Daraus folgt: Die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit p_S ist unter den hier gegebenen Voraussetzungen identisch 0.



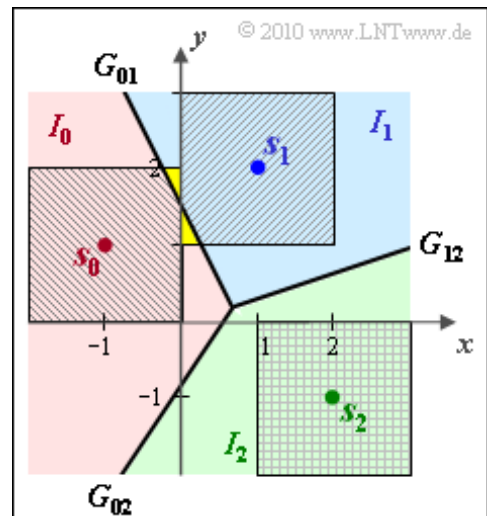
c) Richtig sind die Aussagen 2 und 4, wie aus der unteren Grafik abgelesen werden kann.

- Die Nachricht m_2 kann nicht verfälscht werden, da das Quadrat um s_2 vollständig im rechten unteren Quadranten und damit im Entscheidungsgebiet I_2 liegt.
- Ebenso wurde mit Sicherheit m_2 gesendet, wenn der Empfangswert im Entscheidungsgebiet I_2 liegt. Der Grund: Keines der Quadrate um s_0 und s_1 reicht bis in das Gebiet I_2 hinein.
- m_0 kann nur zu m_1 verfälscht werden. Die (bedingte) Verfälschungswahrscheinlichkeit ist gleich dem Verhältnis der Flächen des gelben Dreiecks (Fläche 1/16) und des Quadrats (Fläche 4):

$$\Pr(\mathcal{E} | m_0) = \frac{1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/4}{4} = 1/64.$$

- Aus Symmetriegründen gilt gleichermaßen:

$$\Pr(\mathcal{E} | m_1) = \Pr(\mathcal{E} | m_0) = 1/64.$$



d) Bei gleichwahrscheinlichen Symbolen erhält man für die (mittlere) Fehlerwahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} p_S = \Pr(\mathcal{E}) &= 1/3 \cdot [\Pr(\mathcal{E} | m_0) + \Pr(\mathcal{E} | m_1) + \Pr(\mathcal{E} | m_2)] = \\ &= 1/3 \cdot [1/64 + 1/64 + 0] = \frac{2}{3 \cdot 64} = 1/96 \approx \underline{0.0104}. \end{aligned}$$

e) Nun ergibt sich eine kleinere mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit, nämlich

$$p_S = \Pr(\mathcal{E}) = 1/4 \cdot 1/64 + 1/4 \cdot 1/64 + 1/2 \cdot 0 = 1/128 \approx \underline{0.0078}.$$

f) Richtig ist JA. Beispielsweise ergäbe sich durch I_1 : erster Quadrant, I_0 : zweiter Quadrant, $I_2: y < 0$ die Fehlerwahrscheinlichkeit 0. Das bedeutet, dass die vorgegebenen Grenzen nur bei zirkulär symmetrischer WDF des Rauschens optimal sind, zum Beispiel beim AWGN-Kanal.

Musterlösung zur Aufgabe A4.9

a) Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichten unter den Bedingungen m_0 bzw. m_1 lauten:

$$p_{r|m}(\rho_1, \rho_2|m_0) = 1/4 \cdot \exp[-|\rho_1 + 1| - |\rho_2 + 1|],$$
$$p_{r|m}(\rho_1, \rho_2|m_1) = 1/4 \cdot \exp[-|\rho_1 - 1| - |\rho_2 - 1|].$$

Bei gleichwahrscheinlichen Symbolen $\Rightarrow \Pr(m_0) = \Pr(m_1) = 0.5$ lautet die MAP-Entscheidungsregel:
Entscheide für das Symbol $m_0 \Leftrightarrow$ Signal s_0 , falls

$$p_{r|m}(\rho_1, \rho_2|m_0) > p_{r|m}(\rho_1, \rho_2|m_1)$$
$$\Rightarrow 1/4 \cdot \exp[-|\rho_1 + 1| - |\rho_2 + 1|] > 1/4 \cdot \exp[-|\rho_1 - 1| - |\rho_2 - 1|]$$
$$\Rightarrow |\rho_1 + 1| + |\rho_2 + 1| < |\rho_1 - 1| + |\rho_2 - 1|$$
$$\Rightarrow L(\rho_1, \rho_2) = |\rho_1 + 1| - |\rho_1 - 1| + |\rho_2 + 1| - |\rho_2 - 1| < 0.$$

Richtig sind demnach die Lösungsvorschläge 1 und 2.

b) Alle Aussagen treffen zu: Für $x \geq 1$ ist

$$|x + 1| - |x - 1| = x + 1 - x + 1 = 2.$$

Ebenso gilt für $x \leq -1$, zum Beispiel $x = -3$:

$$|x + 1| - |x - 1| = |-3 + 1| - |-3 - 1| = 2 - 4 = -2.$$

Dagegen gilt im mittleren Bereich $-1 \leq x \leq +1$:

$$|x + 1| - |x - 1| = x + 1 - 1 + x = 2x.$$

c) Das Ergebnis von Teilaufgabe a) lautete: Entscheide für das Symbol m_0 , falls

$$L(\rho_1, \rho_2) = |\rho_1 + 1| - |\rho_1 - 1| + |\rho_2 + 1| - |\rho_2 - 1| < 0.$$

Im betrachteten (inneren) Bereich $-1 \leq \rho_1 \leq +1, -1 \leq \rho_2 \leq +1$ gilt mit dem Ergebnis der Teilaufgabe b):

$$|\rho_1 + 1| - |\rho_1 - 1| = 2\rho_1, \quad |\rho_2 + 1| - |\rho_2 - 1| = 2\rho_2.$$

Setzt man dieses Ergebnis oben ein, so ist genau dann für m_0 zu entscheiden, falls

$$L(\rho_1, \rho_2) = 2 \cdot (\rho_1 + \rho_2) < 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 + \rho_2 < 0.$$

Richtig ist also der Lösungsvorschlag 1.

d) Für $\rho_1 > 1$ ist $|\rho_1 + 1| - |\rho_1 - 1| = 2$, während für $D_2 = |\rho_2 + 1| - |\rho_2 - 1|$ alle Werte zwischen -2 und $+2$ möglich sind. Die Entscheidungsgröße ist somit $L(\rho_1, \rho_2) = 2 + D_2 \geq 0$. In diesem Fall führt die Regel zu einer m_1 -Entscheidung. Richtig ist demnach hier der Lösungsvorschlag 2.

e) Nach ähnlicher Rechnung wie in der Teilaufgabe c) kommt man zum Ergebnis:

$$L(\rho_1, \rho_2) = -2 + D_2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Entscheidung auf } m_0,$$

was dem Lösungsvorschlag 1 entspricht.

f) Ähnlich der Teilaufgabe d) gilt hier:

$$D_1 = |\rho_1 + 1| - |\rho_1 - 1| \in \{-2, \dots, +2\} \Rightarrow L(\rho_1, \rho_2) = 2 + D_1 \geq 0.$$

Richtig ist also hier der Lösungsvorschlag 2: Entscheidung auf m_1 .

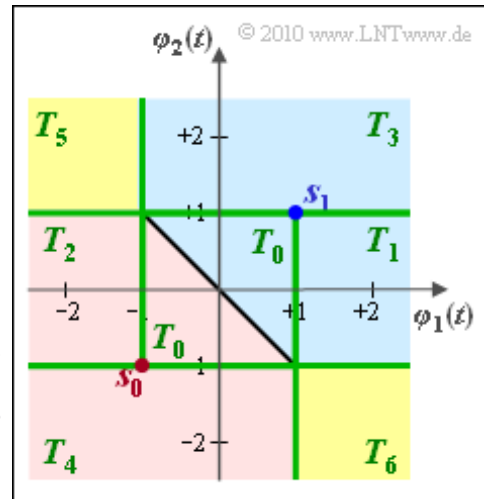
g) Nach ähnlicher Überlegung wie in der letzten Teilaufgabe kommt man zum Ergebnis:

$$L(\rho_1, \rho_2) = -2 + D_1 \leq 0 \Rightarrow \text{Entscheidung auf } m_0.$$

Dies entspricht dem Lösungsvorschlag 1.

h) Die Ergebnisse der Teilaufgaben c) bis g) sind in der folgenden Grafik zusammengefasst:

- **Teilgebiet T_0** : Entscheidung auf m_0 bzw. m_1 gemäß Aufgabe c).
- **Teilgebiet T_1** : Entscheidung auf m_1 gemäß Aufgabe d),
- **Teilgebiet T_2** : Entscheidung auf m_0 gemäß Aufgabe e),
- **Teilgebiet T_3** : Entscheidung auf m_1 gemäß Aufgabe f),
- **Teilgebiet T_4** : Entscheidung auf m_0 gemäß Aufgabe g),
- **Teilgebiet T_5** : Nach dem Ergebnis von Aufgabe e) sollte man auf m_0 entscheiden, nach Aufgabe f) auf m_1 . Das bedeutet: Bei Laplace-Rauschen ist es egal, ob man T_5 der Region I_0 oder I_1 zuordnet.
- **Teilgebiet T_6** : Auch dieses Gebiet kann man aufgrund der Ergebnisse von Aufgabe d) und g) sowohl der Region I_0 als auch der Region I_1 zuordnen.



Für die Teilgebiete T_0, \dots, T_4 gibt es eine feste Zuordnung zu den Entscheidungsregionen I_0 (rot) bzw. I_1 (blau). Dagegen können die beiden gelb markierten Bereiche T_5 und T_6 ohne Verlust an Optimalität sowohl I_0 als auch I_1 zugeordnet werden. Vergleicht man diese Grafik mit den Varianten **A**, **B** und **C** auf der Angabenseite, so erhält man als Ergebnis:

- Die Varianten **A** und **B** sind gleich gut und beide sind optimal. Die Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich in beiden Fällen zu $p_{\min} = e^{-2}$.
- Die Variante **C** ist nicht optimal; bezüglich der Teilgebiete T_1 und T_2 gibt es Fehlzuordnungen. Die Fehlerwahrscheinlichkeit ist demzufolge größer als p_{\min} . Richtig sind also die Vorschläge 1 und 2.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.9

a) Die Fläche unter der WDF muss 1 ergeben:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{n_1}(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} p_{n_1}(x) dx = 0.5$$

$$\Rightarrow K \cdot \int_0^{\infty} e^{-a \cdot x} dx = -K/a \cdot [e^{-a \cdot x}]_0^{\infty} = K/a = 0.5 \Rightarrow K = a/2.$$

Richtig ist demzufolge der Lösungsvorschlag 2.

b) Der lineare Mittelwert ist aufgrund der WDF-Symmetrie gleich 0. Damit ist die Varianz σ^2 tatsächlich – wie bereits in der Fragestellung angegeben – gleich dem quadratischen Mittelwert:

$$\sigma^2 = E[n_1^2] = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-a \cdot x} dx = a \cdot 2/a^3 = 2/a^2. \text{ Mit } a = 1: \underline{\sigma^2 = 2}.$$

c) Im ersten Quadranten ($x \geq 0, y \geq 0$) kann auf die Betragsbildung verzichtet werden. Dann gilt für die 2D-WDF:

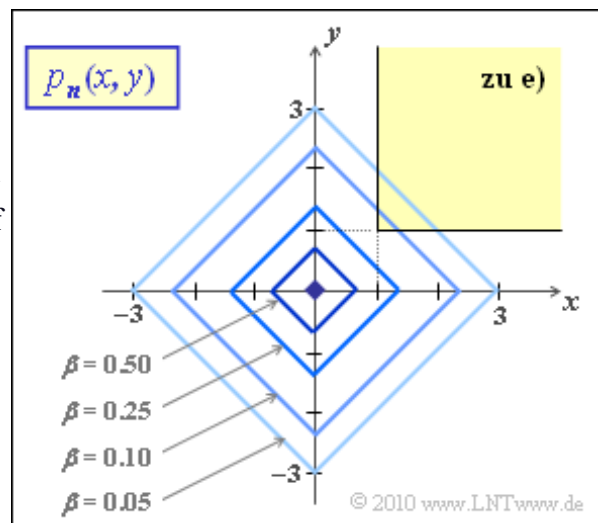
$$p_n(x, y) = a^2/4 \cdot e^{-a \cdot x} \cdot e^{-a \cdot y} = a^2/4 \cdot e^{-a \cdot (x+y)}.$$

Eine Höhenlinie mit dem Faktor β gegenüber dem Maximum hat dann den folgenden Verlauf ($0 < \beta < 1$):

$$e^{-a \cdot (x+y)} = \beta \Rightarrow x + y = \frac{\ln 1/\beta}{a}.$$

Die Grafik zeigt die Höhenlinien für $a = 1$ und einige Werte von β , die jeweils ein um 45° gedrehtes Quadrat ergeben \Rightarrow Vorschlag 1. Gleichzeitig weisen wir Sie auf das folgende Interaktionsmodul hin:

Zweidimensionale Laplaceverteilung



d) Das hier betrachtete Wahrscheinlichkeitsereignis entspricht genau dem dritten Quadranten der oben skizzierten Verbund-WDF. Aufgrund der Symmetrie ist diese Wahrscheinlichkeit gleich 1/4.

e) Dafür kann mit der Verbund-WDF geschrieben werden:

$$\Pr [(n_1 > 1) \cap (n_2 > 1)] = 1/4 \cdot \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} e^{-(x+y)} dx dy =$$

$$= 1/2 \cdot \int_1^{\infty} e^{-x} dx \cdot 1/2 \cdot \int_1^{\infty} e^{-y} dy = [\Pr(n_1 > 1)] \cdot [\Pr(n_2 > 1)].$$

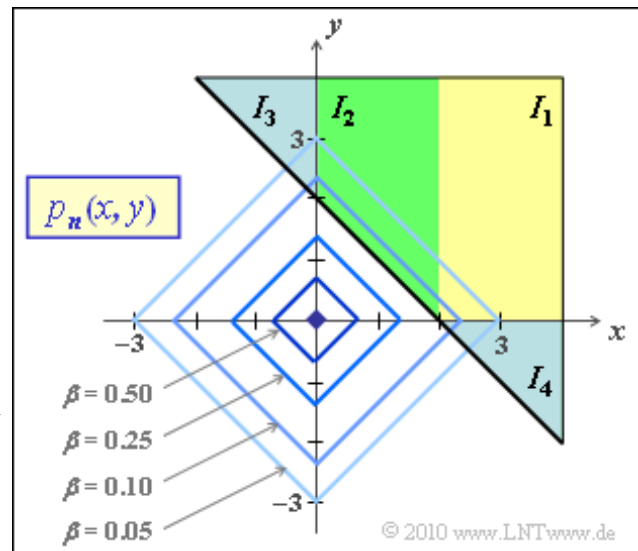
Hierbei ist die statistische Unabhängigkeit zwischen n_1 und n_2 sowie die Gleichheit $p_{n_1}(x) = p_{n_2}(y)$ berücksichtigt. Weiter gilt für $a = 1$:

$$\Pr(n_1 > 1) = 1/2 \cdot \int_1^{\infty} e^{-x} dx = 1/(2e) \approx 0.184$$

$$\Rightarrow \Pr[(n_1 > 1) \cap (n_2 > 1)] = 1/(4e^2) \approx 0.034.$$

f) Die hier betrachtete Region ist in der folgenden Grafik farbig markiert. Die Regionen erstrecken sich aber nach rechts und oben bis ins Unendliche. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \Pr[n_1 + n_2 > 2] &= \\ &= \frac{1}{4} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \int_{2-x}^{\infty} e^{-|y|} dy dx = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$



Aufgrund der Betragsbildung ist eine Aufspaltung in Teilintegrale vorzunehmen. Nach oben und rechts erstrecken sich alle Gebiete bis ins Unendliche. Aufgrund der Symmetrie gilt $I_4 = I_3$.

$$I_1 = 1/4 \cdot \int_2^{+\infty} e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y} dy dx = 1/4 \cdot \int_2^{+\infty} e^{-x} dx = 1/(4e^2),$$

$$I_2 = 1/4 \cdot \int_0^2 e^{-x} \int_{2-x}^{\infty} e^{-y} dy dx = 1/4 \cdot \int_0^2 e^{-x} \cdot e^{x-2} dx = 1/4 \cdot \int_0^2 e^{-2} dx = 1/(2e^2),$$

$$\begin{aligned} I_3 &= 1/4 \cdot \int_{-\infty}^0 e^x \int_{2-x}^{\infty} e^{-y} dy dx = 1/4 \cdot \int_{-\infty}^0 e^x \cdot e^{x-2} dx = \\ &= 1/4 \cdot \int_{-\infty}^0 e^{2x-2} dx = \frac{e^{-2}}{4} \cdot \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = 1/(8e^2), \end{aligned}$$

$$I_4 = 1/4 \cdot \int_{-\infty}^0 e^y \int_{2-y}^{\infty} e^{-x} dx dy = \dots = 1/(8e^2) = I_3.$$

Insgesamt ergibt sich somit:

$$\Pr[n_1 + n_2 > 2] = e^{-2} \cdot (1/4 + 1/2 + 1/8 + 1/8) = e^{-2} \approx 0.135.$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.10

a) Die Punkte s_1 und s_2 sind für alle Konfigurationen gleich. Die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn s_0 von s_1 und s_2 am weitesten entfernt liegt. Dies ist bei der Konfiguration C der Fall \Rightarrow Lösungsvorschlag 3.

b) Bei der Konfiguration A ist der Abstand zwischen allen Punkten gleich: $d_{01} = d_{02} = d_{12} = 2$. Deshalb muss zur Berechnung der *Union Bound* nicht über alle Symbole gemittelt werden, und es gilt, da zum Beispiel s_0 mit gleicher Wahrscheinlichkeit in das Symbol s_1 bzw. s_2 verfälscht wird:

$$\Pr(\mathcal{E}) \leq p_{\text{UB}} = 2 \cdot Q\left(\frac{d_{ik}/2}{\sigma_n}\right) = 2 \cdot Q(2) \approx 2 \cdot 0.023 = \underline{0.046}.$$

c) Hier unterscheiden sich die Verfälschungswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Symbole. Wurde s_0 gesendet, so gilt mit $d_{01} = d_{02} = 2^{0.5}$ und $\sigma = 0.5$:

$$p_{\text{UB}|s_0} = 2 \cdot Q\left(\frac{\sqrt{2}/2}{0.5}\right) = 2 \cdot Q(\sqrt{2}) = 2 \cdot 0.079 = 0.158.$$

Dagegen sind die beiden anderen bedingten Wahrscheinlichkeiten kleiner

$$\begin{aligned} p_{\text{UB}|s_1} = p_{\text{UB}|s_2} &= Q\left(\frac{2/2}{0.5}\right) + Q\left(\frac{\sqrt{2}/2}{0.5}\right) = \\ &= Q(2) + Q(\sqrt{2}) = 0.023 + 0.079 = 0.102. \end{aligned}$$

Durch Mittelung erhält man für die Union Bound unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Abstände:

$$\begin{aligned} p_{\text{UB}} &= 1/3 \cdot [p_{\text{UB}|s_0} + p_{\text{UB}|s_1} + p_{\text{UB}|s_2}] = \\ &= 1/3 \cdot [2 \cdot Q(\sqrt{2}) + 2 \cdot (Q(2) + Q(\sqrt{2}))] = 1/3 \cdot [4 \cdot Q(\sqrt{2}) + 2 \cdot Q(2)] = \\ &= 1/3 \cdot [4 \cdot 0.079 + 2 \cdot 0.023] \approx \underline{0.121} \geq \Pr(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

d) Diese Konfiguration wird durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} d_{01} = d_{02} &= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2.24, d_{12} = 2 \\ \Rightarrow p_{\text{UB}} &= 1/3 \cdot [4 \cdot Q(\sqrt{5}) + 2 \cdot Q(2)] = 1/3 \cdot [4 \cdot 0.013 + 2 \cdot 0.023] \approx \underline{0.032}. \end{aligned}$$

e) Es soll gelten:

$$\begin{aligned} p_{\text{UB}} = 2 \cdot Q(1/\sigma_n) &= 0.032 \Rightarrow Q(1/\sigma_n) = 0.016 \\ \Rightarrow 1/\sigma_n \approx 2.14 &\Rightarrow \sigma_n \approx \underline{0.467}. \end{aligned}$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.11

a) Sowohl OOK als auch BPSK sind binäre Modulationsverfahren:

$$\underline{b = 1, M = 2.}$$

b) Richtig ist der Lösungsvorschlag 2, erkennbar an der imaginären Basisfunktion $\varphi_2(t) = j \cdot \varphi_1(t)$. Bei Beschreibung im Bandpassbereich wären die Basisfunktionen cosinus- und (minus-)sinusförmig reell.

c) Die vorgegebene Gleichung lautet bei On-Off-Keying (OOK) mit $d = E^{1/2}$, $E_S = E/2$ (wobei gleichwahrscheinliche Symbole s_0 und s_1 vorausgesetzt sind) und $\sigma_n^2 = N_0/2$:

$$p_S = Q\left(\frac{d/2}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{E}/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E/2}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{E_S/N_0}\right).$$

Für $E_S/N_0 = 9 = 3^2$ ergibt sich somit:

$$p_S = Q(3) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} \cdot e^{-9/2} = \underline{0.148 \cdot 10^{-2}}.$$

Entsprechend gilt für $10 \cdot \lg(E_S/N_0) = 12 \text{ dB} \Rightarrow E_S/N_0 = 15.85$:

$$p_S = Q(\sqrt{15.85}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 15.85} \cdot e^{-15.85/2} = \underline{0.362 \cdot 10^{-4}}.$$

d) Im Unterschied zur Teilaufgabe c) gilt nun $d = 2 \cdot E^{1/2}$ und $E_S = E$, beides sogar unabhängig von den Auftretswahrscheinlichkeiten für s_0 und s_1 . Daraus folgt:

$$p_S = Q\left(\frac{\sqrt{E_S}}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{2E_S/N_0}\right).$$

Mit $E_S/N_0 = 9$ ergibt sich daraus der Zahlenwert

$$p_S = Q(\sqrt{18}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 18} \cdot e^{-18/2} = \underline{0.117 \cdot 10^{-5}},$$

und mit $10 \cdot \lg E_S/N_0 = 12 \text{ dB} \Rightarrow 2E_S/N_0 = 31.7$:

$$p_S = Q(\sqrt{31.7}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 31.7} \cdot e^{-31.7/2} = \underline{0.926 \cdot 10^{-8}}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.11

a) Aus $10 \cdot \lg E_S/N_0 = 10$ dB folgt $E_S/N_0 = 10$ und damit

$$p_S = Q(\sqrt{10}) \approx \frac{1}{\sqrt{20\pi}} \cdot e^{-5} = \underline{8.5 \cdot 10^{-4}}.$$

Der tatsächliche Wert gemäß dem Angabenblatt lautet $7.83 \cdot 10^{-4}$. Die angegebene Gleichung ist also tatsächlich eine obere Schranke für $Q(x)$. Der relative Fehler bei Verwendung dieser Näherung anstelle der exakten Funktion $Q(x)$ ist in diesem Fall kleiner als 10%.

b) Bei BPSK lautet die entsprechende Gleichung:

$$p_S = Q(\sqrt{20}) \approx \frac{1}{\sqrt{40\pi}} \cdot e^{-10} = \underline{4.05 \cdot 10^{-6}}.$$

Nun beträgt der relative Fehler bei Verwendung der Näherung nur noch 5%. Allgemein gilt: Je kleiner die Fehlerwahrscheinlichkeit ist, um so besser ist die Näherung.

c) Bei BPSK ist hierfür laut Angabe ein (logarithmierter) Wert von 9.6 dB erforderlich. Bei der OOK muss der logarithmierte Wert um etwa 3 dB erhöht werden $\Rightarrow 10 \cdot \lg E_S/N_0 \approx \underline{12.6 \text{ dB}}$.

Musterlösung zur Aufgabe A4.12

a) Der Quotient E_S/E ergibt sich als der mittlere quadratische Abstand der $M = 16$ Signalraumpunkte s_i vom Ursprung. Mit der gegebenen Signalraumkonstellation der 16-QAM erhält man:

$$\begin{aligned} E_S &= E/16 \cdot [4 \cdot (1^2 + 1^2) + 8 \cdot (1^2 + 3^2) + 4 \cdot (3^2 + 3^2)] = \\ &= E/16 \cdot [4 \cdot 2 + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 18] = 10 \cdot E = \underline{10^{-2} \text{ W}_S}. \end{aligned}$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man mit der im **Theorie** angegebenen Gleichung

$$E_S = \frac{2 \cdot (M - 1)}{3} \cdot E = \frac{2 \cdot 15}{3} \cdot E = 10E.$$

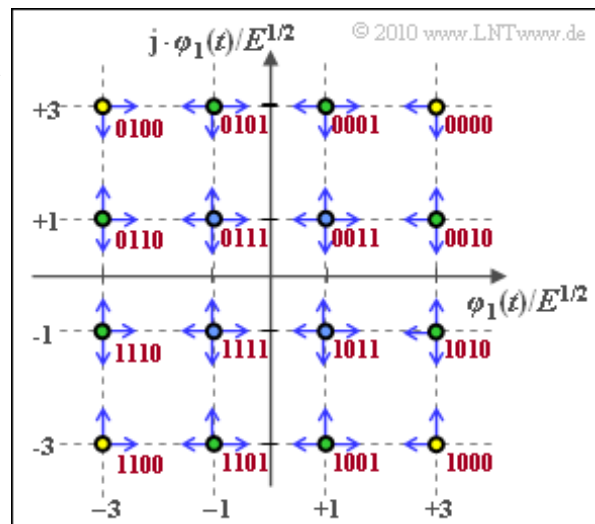
b) Jedes einzelne Symbol stellt vier Binärsymbole dar. Damit ist die mittlere Energie pro Bit:

$$E_B = \frac{E_S}{\log_2(M)} = 2.5 \cdot E = \underline{2.5 \cdot 10^{-3} \text{ W}_S}.$$

c) Die *Union Bound* ist eine obere Schranke für die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit. Sie berücksichtigt nur den Übergang zu benachbarten Entscheidungsregionen aufgrund von AWGN-Rauschen.

Aus der Grafik geht hervor, dass die Ecksymbole (gelb gefüllt) nur zu zwei anderen Symbolen hin verfälscht werden können und die restlichen Randsymbole (grüne Füllung) in drei Richtungen. Der „worst case“ sind die vier inneren Symbole (mit blauer Füllung) mit jeweils vier Verfälschungsmöglichkeiten. Daraus folgt:

$$p_S = \Pr(\mathcal{E}) \leq 4 \cdot p = \underline{0.016} = p_{UB}.$$



d) Zählt man die blauen Pfeile in obiger Grafik, so kommt man auf $4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 48$. Die mittlere Symbolfehlerwahrscheinlichkeit ist somit gleich

$$p_S = E/16 \cdot 48p = 3p = \underline{0.012}.$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man mit der im **Theorie** angegebenen Gleichung

$$p_S = 4p \cdot \left[1 - 1/\sqrt{M}\right] = 4p \cdot [1 - 1/4] = 3p.$$

Diese Gleichungen gelten nur dann exakt, wenn man wie hier diagonale Verfälschungen ausschließt.

e) Bei Graycodierung entsprechend der roten Beschriftung in der Grafik bewirkt jeder Symbolfehler genau einen Bitfehler. Da aber mit jedem Symbol $M = 4$ Binärsymbole übertragen werden, ist

$$p_B = \frac{p_S}{\log_2(M)} = \frac{0.012}{4} = \underline{0.003}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.13

a) Die „Union Bound“ ist eine obere Schranke für die mittlere Symbolfehlerwahrscheinlichkeit. Für letztere gilt:

$$\begin{aligned} p_S &= \Pr(\mathcal{E}) = \Pr(\mathcal{E} \mid \mathbf{s}_A \text{ gesendet}) = \\ &= \Pr(\mathbf{s}_B \cup \mathbf{s}_C \cup \mathbf{s}_D \text{ entschieden} \mid \mathbf{s}_A \text{ gesendet}). \end{aligned}$$

Dagegen gilt für die (verbesserte) „Union Bound“ im vorliegenden Beispiel:

$$\begin{aligned} p_{UB} &= \Pr(\mathbf{s}_B \cup \mathbf{s}_C \text{ entschieden} \mid \mathbf{s}_A \text{ gesendet}) + \\ &+ \Pr(\mathbf{s}_C \cup \mathbf{s}_D \text{ entschieden} \mid \mathbf{s}_A \text{ gesendet}) = 2p = \underline{0.2}. \end{aligned}$$

b) Die beiden Wahrscheinlichkeiten, aus der sich die „Union Bound“ additiv zusammensetzt, lassen sich geometrisch wie folgt deuten:

- $\Pr(\mathbf{s}_B \cup \mathbf{s}_C \mid \mathbf{s}_A)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Empfangspunkt in der linken Halbebene liegt \Rightarrow die AWGN-Rauschkomponente n_1 ist negativ und betragsmäßig größer als $E^{1/2}$.
- $\Pr(\mathbf{s}_C \cup \mathbf{s}_D \mid \mathbf{s}_A)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Empfangspunkt in der unteren Halbebene liegt \Rightarrow die AWGN-Rauschkomponente n_2 ist negativ und betragsmäßig größer als $E^{1/2}$.

Das bedeutet, dass die „Union Bound“ den dritten Quadranten zweimal berücksichtigt. Diesen Fehler kann man hier relativ einfach kompensieren:

$$\begin{aligned} p_S &= p_{UB} - \Pr(\mathbf{s}_C \text{ entschieden} \mid \mathbf{s}_A \text{ gesendet}) = \\ &= 2p - \Pr\left[(n_1 < -\sqrt{E}) \cap (n_2 < -\sqrt{E})\right] = 2p - p^2 = \underline{0.19}. \end{aligned}$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass die Rauschkomponenten n_1 und n_2 voneinander unabhängig sind.

c) Wie in der Teilaufgabe b) nachgewiesen, gelten für die einzelnen Verfälschungswahrscheinlichkeiten:

- Quadrant 2: $\Pr(\mathbf{s}_B \text{ empfangen} \mid \mathbf{s}_A \text{ gesendet}) = 0.09$,
- Quadrant 3: $\Pr(\mathbf{s}_C \text{ empfangen} \mid \mathbf{s}_A \text{ gesendet}) = 0.01$,
- Quadrant 4: $\Pr(\mathbf{s}_D \text{ empfangen} \mid \mathbf{s}_A \text{ gesendet}) = 0.09$.

Für die mittlere Bitfehlerwahrscheinlichkeit erhält man somit:

$$p_B = 1/2 \cdot [1 \cdot 0.09 + 2 \cdot 0.01 + 1 \cdot 0.09] = \underline{0.1} = p.$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass der Quadrant 2 und der Quadrant 4 jeweils nur zu einem Bitfehler führt, der Quadrant 3 dagegen zu zweien. Der Faktor 1/2 berücksichtigt wieder, dass jeweils ein Symbol zwei Binärzeichen (Bit) beinhaltet.

d) Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit ist nach der Lösung zur Teilaufgabe b) gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Rauschkomponenten gewisse Grenzen überschreiten:

$$p_B = \Pr(n_1 < -\sqrt{E}) = \Pr(n_2 < -\sqrt{E}).$$

Beim AWGN-Kanal lautet diese Wahrscheinlichkeit mit der Varianz $\sigma_n^2 = N_0/2$:

$$p_B = Q\left(\sqrt{E}/\sigma_n\right) = Q\left(\sqrt{2E/N_0}\right).$$

Die mittlere Energie pro Symbol kann am einfachsten durch Mittelung über die quadratischen Abstände der Signalraumpunkte vom Ursprung bestimmt werden und ergibt $E_S = 2E$. Die mittlere Energie pro Bit ist halb so groß: $E_B = E_S/2 = E$. Daraus folgt:

$$p_B = Q\left(\sqrt{2E_B/N_0}\right).$$

Richtig ist also der zweite Lösungsvorschlag. Zum gleichen Ergebnis kommt man auch, wenn man die 4-QAM wie im **Kapitel 4.2** des Buches „Modulationsverfahren“ als zwei orthogonale (das heißt: sich nicht störende) BPSK-Systeme über den gleichen Kanal betrachtet.

Musterlösung zur Aufgabe A4.14

a) Die Signalmenge kann im Bandpassbereich mit der angegebenen trigonometrischen Umformung wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} s_i(t) &= A \cdot \cos(2\pi f_T t + 2\pi/M \cdot i) = \\ &= A \cdot \cos(2\pi/M \cdot i) \cdot \cos(2\pi f_T t) - A \cdot \sin(2\pi/M \cdot i) \cdot \sin(2\pi f_T t). \end{aligned}$$

Die jeweils ersten Terme in dieser Differenz führen zum Signalraumpunkt s_i , die jeweils zweiten zu den Basisfunktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$. Hierbei ist zu beachten, dass diese jeweils energienormiert sein müssen:

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi_1(t)^2 dt &= \int_0^T [K \cdot \cos(2\pi f_T t)]^2 dt = 1 \\ \Rightarrow \frac{K^2 \cdot T}{2} = 1 &\Rightarrow K = \sqrt{2/T} \Rightarrow \varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \cdot \cos(2\pi f_T t). \end{aligned}$$

Mit gleichem Rechenweg kommt man zur zweiten Basisfunktion:

$$\varphi_2(t) = -\sqrt{2/T} \cdot \sin(2\pi f_T t).$$

Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 2 und 4.

b) Unter Verwendung der eben berechneten Basisfunktionen kann die Signalmenge $s_i(t)$ wie folgt dargestellt werden (wiederum begrenzt auf den Bereich $0 \leq t \leq T$):

$$s_i(t) = A \cdot \sqrt{T/2} \cdot \cos(2\pi \cdot i/M) \cdot \varphi_1(t) + A \cdot \sqrt{T/2} \cdot \sin(2\pi \cdot i/M) \cdot \varphi_2(t).$$

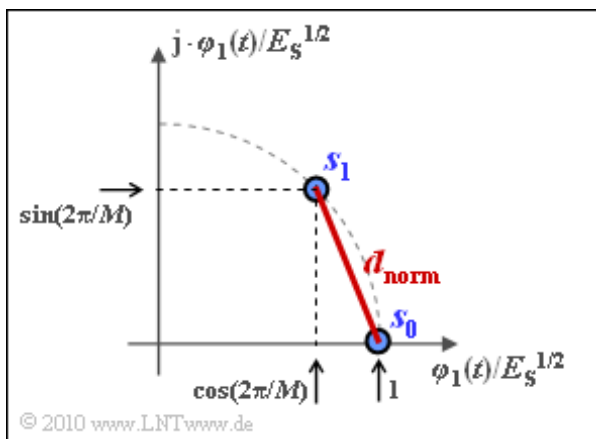
Mit der für alle M Punkte gleichen Energie $E = 0.5 \cdot A^2 \cdot T$, die gleichzeitig die mittlere Signalenergie pro Symbol (E_S) ist, lautet obige Gleichung

$$\begin{aligned} s_i(t) &= s_{i1} \cdot \varphi_1(t) + s_{Q_i} \cdot \varphi_2(t) \\ \Rightarrow s_{i1} &= \sqrt{E_S} \cdot \cos(2\pi \cdot i/M), \quad s_{Q_i} = \sqrt{E_S} \cdot \sin(2\pi \cdot i/M). \end{aligned}$$

Die in der Grafik auf der Angabenseite für $M = 8$ bzw. $M = 16$ skizzierten Signalraumpunkte lassen sich genau in dieser Weise darstellen. Richtig sind demzufolge die Lösungsvorschläge 1 und 4.

c) Da der Abstand von einem zum nächstgelegenen Punkt für alle i gleich ist, können wir d beispielsweise aus den Signalraumpunkten s_0 und s_1 berechnen. Betrachten Sie dabei die nachfolgende Skizze. Nach dem *Satz von Pythagoras* gilt:

$$\begin{aligned} d_{\text{norm}}^2 &= \sin^2\left(\frac{2\pi}{M}\right) + [1 - \cos\left(\frac{2\pi}{M}\right)]^2 = \\ &= 2 \cdot [1 - \cos\left(\frac{2\pi}{M}\right)] = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \\ \Rightarrow d_{\text{norm}} &= 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \\ \Rightarrow d &= 2\sqrt{E_S} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{M}\right). \end{aligned}$$



Daraus ergeben sich folgende Zahlenwerte:

$$M = 8: d = 0.765 \cdot \sqrt{E_S},$$

$$M = 16: d = 0.390 \cdot \sqrt{E_S}.$$

d) Mit dem Ergebnis aus c) erhält man mit der vorne angegebenen Gleichung:

$$p_S \leq p_{UB} = 2 \cdot Q \left[\sin(\pi/M) \cdot \sqrt{2E_S/N_0} \right].$$

Mit $E_S/N_0 = 50 \Rightarrow (2E_S/N_0)^{0.5} = 10$ folgt daraus:

$$M = 8: p_{UB} = 2 \cdot Q(10 \cdot 0.383) = 2 \cdot Q(3.83) \approx 1.4 \cdot 10^{-4},$$

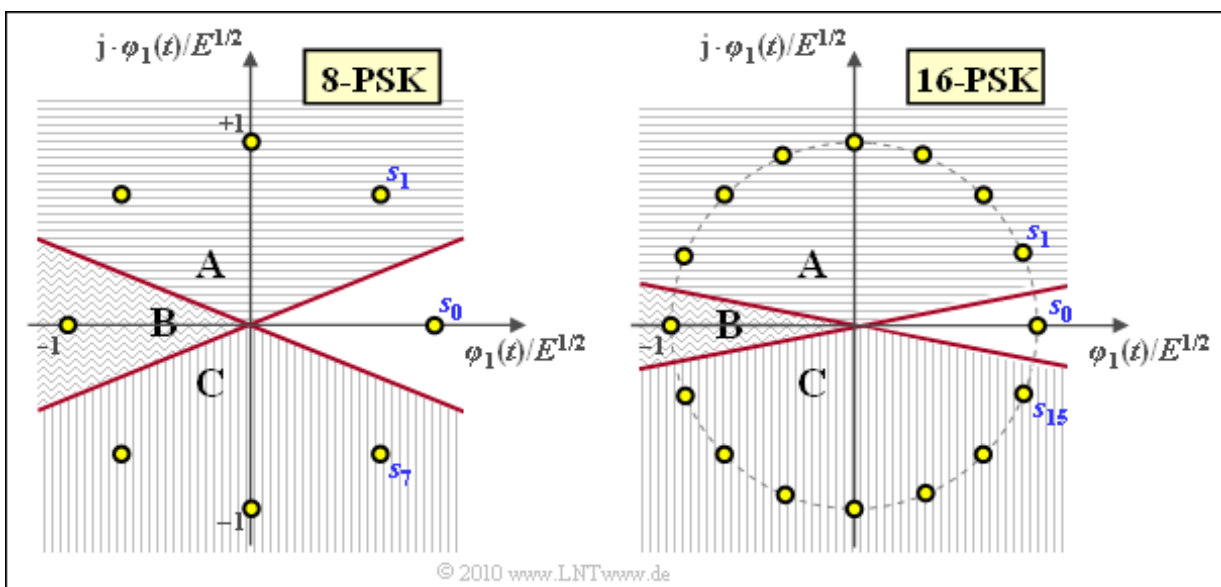
$$M = 16: p_{UB} = 2 \cdot Q(10 \cdot 0.195) = 2 \cdot Q(1.95) \approx 6 \cdot 10^{-2}.$$

Anzumerken ist, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit mit steigendem M immer größer wird, wenn man – wie hier – von einem konstanten E_S/N_0 ausgeht. Der günstigste Wert ergäbe sich für $M = 2$ (der Faktor 2 der Union Bound ist dann nämlich nicht notwendig) zu

$$M = 2: p_{UB} = p_S = Q(10) \approx 10^{-23}.$$

Mehrstufige PSK würde also keinen Sinn machen, wenn es nicht andere Gründe für deren Anwendung gäbe, worauf in der Teilaufgabe f) noch eingegangen wird.

e) Richtig ist JA. Die Grafik zeigt die Konstellation für 8-PSK und 16-PSK, jeweils gültig unter der Annahme, dass s_0 gesendet wurde. Die Höhenlinien der AWGN-WDF sind dann Kreise um s_0 .



Es gelten folgende Aussagen:

- Die tatsächliche Fehlerwahrscheinlichkeit p_S setzt sich aus den Anteilen **A**, **B** und **C** zusammen.
- Dagegen ergibt sich die „Union Bound“ (p_S) aus **A** + **B** (Verfälschung in das Symbol s_1) plus **B** + **C** (Verfälschung in das Symbol s_{M-1}).
- Damit gilt stets $p_S = p_{UB} - \mathbf{B}$. Der Anteil **B** ist aber um so kleiner, je größer M ist.

f) Zur Überprüfung gehen wir beispielsweise von $p_B = 10^{-4}$ aus. Daraus folgt für $M = 2$ und $M = 4$:

$$p_B = Q \left(\sqrt{2E_B/N_0} \right) = 10^{-4} \Rightarrow \sqrt{2E_B/N_0} \approx 3.72.$$

Dagegen gilt mit der angegebenen Gleichung für $M = 8$:

$$\begin{aligned}
 p_B &\leq \frac{2}{\log_2(M)} \cdot Q\left(\sqrt{\log_2(M)} \cdot \sin(\pi/M) \cdot \sqrt{2E_s/N_0}\right) = \\
 &= 2/3 \cdot Q\left(\sqrt{3} \cdot 0.383 \cdot 3.72\right) \approx 2/3 \cdot Q(2.46) \approx 0.46 \cdot 10^{-2}.
 \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man für $M = 16 \Rightarrow \text{ld}(M) = 4$:

$$p_B = 2/4 \cdot Q\left(\sqrt{4} \cdot 0.195 \cdot 3.72\right) \approx 1/2 \cdot Q(1.45) \approx 0.48 \cdot 10^{-1}.$$

Richtig sind also die Aussagen 1 und 4. Der wesentliche Vorteil einer höherstufigen PSK ist also nicht die niedrigere Bitfehlerrate, sondern der geringere Bedarf an der sehr teuren Ressource „Bandbreite“. Außerdem ist zu beachten, dass die Ergebnisse völlig anders sind, wenn ein (stark) verzerrender Kanal vorliegt, wie in der *Leitungsgebundenen Übertragungstechnik* üblich.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.14

a) Mit $M = 4$ lauten die Signalraumpunkte $\mathbf{s}_i = (s_{Ii}, s_{Qi})$ der digitalen Phasenmodulation ($i = 0, \dots, 3$):

$$\begin{aligned} s_{Ii} &= \cos(2\pi i/M + \phi_{\text{off}}), \\ s_{Qi} &= \sin(2\pi i/M + \phi_{\text{off}}). \end{aligned}$$

Mit $\phi_{\text{off}} = \pi/2$ (45°) ergeben sich genau die Signalraumpunkte der 4-QAM:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_0 &= (+\sqrt{2}, +\sqrt{2}), \quad \mathbf{s}_1 = (-\sqrt{2}, +\sqrt{2}), \\ \mathbf{s}_3 &= (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad \mathbf{s}_4 = (+\sqrt{2}, -\sqrt{2}). \end{aligned}$$

b) Für die 4-PSK ergibt sich mit der vorne angegebenen Gleichung

$$\begin{aligned} p_S \leq p_{UB} &= 2 \cdot Q \left[\sin(\pi/M) \cdot \sqrt{2E_S/N_0} \right] = \\ &= 2 \cdot Q \left[1/\sqrt{2} \cdot \sqrt{2E_S/N_0} \right] = 2 \cdot Q \left[\sqrt{E_S/N_0} \right]. \end{aligned}$$

Richtig ist also der Lösungsvorschlag 2.

c) Da die 4-QAM mit der 4-PSK identisch ist (hinsichtlich Fehlerwahrscheinlichkeit sogar unabhängig vom Phasenoffset), ist auch hier der Lösungsvorschlag 2 richtig. Der Lösungsvorschlag 1 gibt die Union Bound der M -QAM allgemein an, wobei $M = 4$ eingesetzt ist. Da es aber bei 4-QAM keine inneren Symbole gibt, ist diese Schranke zu pessimistisch. Die sich ergebende „Union Bound“ ist dann doppelt so groß wie die 4-PSK-Schranke.

d) Hier ist wiederum der zweite Lösungsvorschlag richtig. Bei Graycodierung führt jeder Symbolfehler zu einem Bitfehler, wenn man nur benachbarte Entscheidungsregionen betrachtet: $p_B \approx p_S/2$. Außerdem gilt $E_S = 2 E_B$. Daraus folgt:

$$p_B = \frac{p_S}{2} \leq Q \left[\sqrt{E_S/N_0} \right] = Q \left[\sqrt{2E_B/N_0} \right].$$

Wie in der Musterlösung zur **Aufgabe A4.13** hergeleitet, gilt sogar exakt

$$p_B = Q \left[\sqrt{2E_B/N_0} \right].$$

Bei dieser Herleitung wurde verwendet, dass die 4-QAM durch zwei orthogonale BPSK-Modulationen (mit Cosinus- bzw. Minus-Sinusträger) dargestellt werden kann. Somit ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit der 4-QAM und damit auch der 4-PSK in Abhängigkeit von E_B/N_0 die gleiche wie für BPSK.

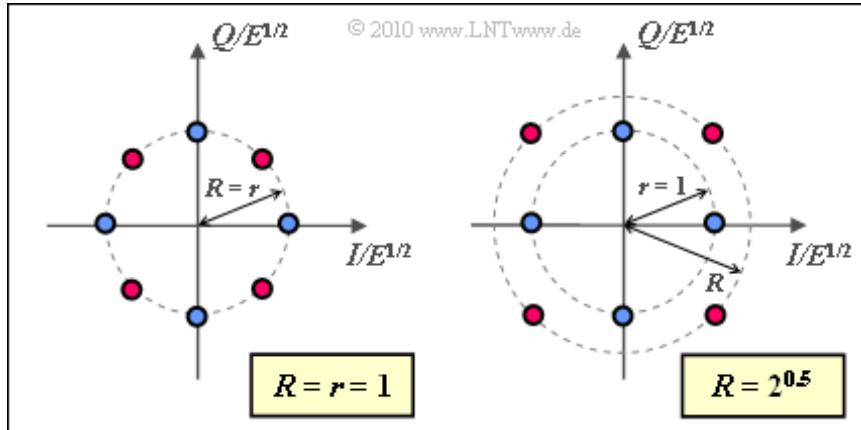
Alle Ergebnisse der Aufgabe können Sie mit folgendem Interaktionsmodul per Simulation überprüfen:

***M*-stufiges Phase Shift Keying und Union Bound**

Musterlösung zur Aufgabe A4.15

a) Wegen $M = 8 \Rightarrow b = 3$ gilt für die mittlere Signalenergie pro Bit $E_B = E_S/3$, wobei die mittlere Signalenergie pro Symbol (E_S) als der mittlere quadratische Abstand der Signalraumpunkte vom Ursprung zu berechnen ist. Mit $r = 1$ erhält man:

$$E_S = 1/8 \cdot (4 \cdot r^2 + 4 \cdot R^2) = (1 + R^2)/2 \Rightarrow E_B = E_S/3 = (1 + R^2)/6.$$



Insbesondere gilt:

- Für $R = 1$ ergibt sich eine 8-PSK und entsprechend $E_S = 1$ und $E_B \equiv 1/3$ (siehe linke Grafik).
- Die rechte Grafik zeigt die Signalraumkonstellation für „Wurzel aus 2“. In diesem Fall ist $E_B \equiv 1/2$.

Anzumerken ist, dass diese Energien eigentlich noch mit der Normierungsenergie zu multiplizieren sind.

b) Alle Aussagen treffen zu. Im gezeichneten Beispiel auf dem Angabenblatt mit $R = R_{\max}$ ist der Abstand zwischen zwei benachbarten blauen Punkten genau so groß wie der Abstand zwischen einem roten (äußeren) und einem blauen (inneren) Punkt. Für $R > R_{\max}$ ist der Abstand zwischen zwei blauen Punkten am geringsten. Für $R < R_{\min}$ tritt der minimale Abstand zwischen zwei roten Punkten auf.

c) Die Grafik verdeutlicht die geometrische Berechnung. Mit dem Satz von Pythagoras erhält man:

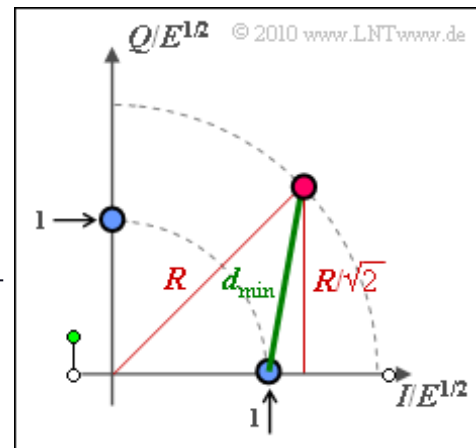
$$d_{\min}^2 = (R/\sqrt{2})^2 + (R/\sqrt{2} - 1)^2 = 1 - \sqrt{2} \cdot R + R^2$$

$$\Rightarrow d_{\min} = \sqrt{1 - \sqrt{2} \cdot R + R^2}.$$

Insbesondere gilt für $R = 1$ (8-PSK):

$$d_{\min} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0.765 (= 2 \cdot \sin(22.5^\circ)).$$

Dagegen ist für $R = \text{„Wurzel aus 2“}$ die minimale Distanz $d_{\min} \equiv 1$ (siehe rechte Grafik zur Teilaufgabe a).



d) Mit den Ergebnissen der Teilaufgaben a) und c) erhält man allgemein bzw. für $R = 1$ (8-PSK):

$$\eta = \frac{d_{\min}^2}{4 \cdot E_B} = \frac{1 - \sqrt{2} \cdot R + R^2}{4 \cdot (1 + R^2)/6} = \frac{3/2 \cdot (1 - \sqrt{2} \cdot R + R^2)}{1 + R^2}$$

$$\Rightarrow R = 1 : \eta = \frac{3/2 \cdot (2 - \sqrt{2})}{2} = 3/4 \cdot (2 - \sqrt{2}) \approx 0.439.$$

e) Für $R = R_{\min}$ ergibt sich folgender Wert:

$$\eta = \frac{3/2 \cdot (1 - \sqrt{2} \cdot R + R^2)}{1 + R^2} = 3/2 \cdot \left[1 - \frac{\sqrt{2} \cdot R}{1 + R^2} \right],$$

$$\sqrt{2} \cdot R = \sqrt{3} - 1, \quad 1 + R^2 = 3 - \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \eta = 3/2 \cdot \left[1 - \frac{\sqrt{3} - 1}{3 - \sqrt{3}} \right] \approx 0.634.$$

Für $R = R_{\max}$ ergibt sich genau der gleiche Wert.

Das (stets gewünschte) Maximum der Leistungseffizienz η ergibt sich beispielsweise für $R = R_{\max}$ – also für die Signalraumkonstellation entsprechend dem Angabenblatt. In diesem Fall sind alle Dreiecke aus zwei benachbarten roten Punkten und dem dazwischenliegenden blauen Punkt gleichseitig. Auch für $R = R_{\min}$ ergeben sich gleichseitige Dreiecke, jetzt aber jeweils gebildet durch zwei blaue und einen roten Punkt. In diesem Fall ist zwar die Kantenlänge d_{\min} deutlich kleiner, aber gleichzeitig ergibt sich auch ein kleineres E_B , so dass die Leistungseffizienz η den gleichen Wert besitzt.

Die vorher betrachteten Sonderfälle $R = 1$ (8-PSK, linke Grafik zur Teilaufgabe a) und $R = 2^{0.5}$ (rechte Grafik) weisen mit $\eta = 0.439$ bzw. $\eta = 0.5$ (gegenüber $\eta = 0.634$) ein merklich kleineres η auf.

Musterlösung zur Aufgabe A4.16

a) Durch Abzählen der Schwingungen innerhalb einer Symboldauer T kommt man zu den beiden Frequenzen $f_0 = 4.5/T$ und $f_1 = 3.5/T$. Daraus berechnen sich Trägerfrequenz und Frequenzhub zu

$$f_T = 1/2 \cdot (f_0 + f_1) = \underline{4 \cdot 1/T},$$
$$\Delta f_A = 1/2 \cdot (f_0 - f_1) = \underline{0.5 \cdot 1/T}.$$

b) Mit der angegebenen Gleichung gilt für den Modulationsindex:

$$h = 2 \cdot \Delta f_A \cdot T = 2 \cdot 0.5 \cdot 1/T \cdot T \Rightarrow \underline{h = 1}.$$

c) Das innere Produkt der TP-Signale lautet:

$$\begin{aligned} \langle s_{TP0}(t) \cdot s_{TP1}(t) \rangle &= \int_0^T s_{TP0}(t) \cdot s_{TP1}^*(t) dt = \\ &= \frac{E}{T} \cdot \int_0^T e^{j2\pi h \cdot t/T} dt = \frac{E}{j2\pi h} \cdot [e^{j2\pi h} - 1]. \end{aligned}$$

Orthogonalität bedeutet, dass dieses innere Produkt 0 sein muss:

$$\langle s_{TP0}(t) \cdot s_{TP1}(t) \rangle = \frac{E}{j2\pi h} \cdot [e^{j2\pi h} - 1] = 0 \Rightarrow h = 1, 2, 3, \dots$$

Richtig sind demzufolge die Lösungsvorschläge 3 und 4. Ist der Modulationsindex h ganzzahlig, so kann nichtkohärent demoduliert werden, ohne dass die Orthogonalität verletzt wird.

d) Für das innere Produkt der Bandpass-Signale kann nach den Erläuterungen auf der Angabenseite geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \langle s_{BP0}(t) \cdot s_{BP1}(t) \rangle &= \text{Re} [\langle s_{TP0}(t) \cdot s_{TP1}(t) \rangle] = \text{Re} \left[\frac{E}{j2\pi h} \cdot (e^{j2\pi h} - 1) \right] = \\ &= \text{Re} \left[\frac{E}{2\pi h} \cdot (\sin(2\pi h) - j \cdot [\cos(2\pi h) - 1]) \right] = \frac{E \cdot \sin(2\pi h)}{2\pi h}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist immer dann 0, wenn der Modulationsindex h ein ganzzahliges Vielfaches von 0.5 ist. Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1, 3 und 4.

e) Richtig ist hier nur der Lösungsvorschlag 2. Für kohärente Demodulation muss h ein Vielfaches von 0.5 sein. Ist nichtkohärente Demodulation möglich, wie zum Beispiel im hier betrachteten Fall ($h = 1$), so ist auch kohärente Demodulation anwendbar. Dagegen kann für $h = 0.5$ zwar kohärent demoduliert werden, aber eine nichtkohärente Demodulation (die auf die Hüllkurve angewiesen ist) versagt.

Musterlösung zur Aufgabe A4.17

a) Richtig ist Lösungsvorschlag 3. Die Energie ist gleich dem Wert $s_0 = C$ in der Signalraumkonstellation zum Quadrat, geteilt durch 2. Der Faktor 1/2 berücksichtigt hierbei, dass die Nachricht m_1 keinen Energiebeitrag liefert ($s_1 = 0$).

b) Die optimale Entscheidungsgrenze G liegt beim Schnittpunkt der beiden dargestellten Kurven. Der Faktor 1/2 berücksichtigt die gleichwahrscheinlichen Nachrichten m_0 und m_1 . Damit erhält man folgende Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} G/2 \cdot \exp[-G^2/2] &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{G^2 - 2C \cdot G + C^2}{2}\right] \\ \Rightarrow \sqrt{2\pi} \cdot G &= \exp[C \cdot G - C^2/2] \Rightarrow C \cdot G - \ln(\sqrt{2\pi} \cdot G) - C^2/2 = 0 \\ \Rightarrow G - 1/C \cdot \ln(G) &= C/2 + 1/(2C) \cdot \ln(\sqrt{2\pi}) = C/2 + 1/(2C) \cdot \ln(2\pi). \end{aligned}$$

Richtig ist hier also der Lösungsvorschlag 2.

c) Mit $C = 4$ lautet die unter b) angegebene Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} f(G) &= G - 1/C \cdot \ln(G) - C/2 - 1/(2C) \cdot \ln(2\pi) = \\ &= G - 0.25 \cdot \ln(G) - 2 - \ln(2\pi)/8 \approx G - 0.25 \cdot \ln(G) - 2.23 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur numerisch gelöst werden:

$$\begin{aligned} G = 2.0 : f(G) &= -0.403, \quad G = 3.0 : f(G) = 0.495, \quad G = 2.5 : f(G) = 0.041, \\ G = 2.4 : f(G) &= -0.049, \quad G = 2.46 : f(G) \approx 0. \end{aligned}$$

Die optimale Entscheidungsgrenze liegt demnach bei $G_{\text{opt}} \approx 2.46 \approx 2.5$.

d) Die Fehlerwahrscheinlichkeit setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

$$p_S = \Pr(\mathcal{E}) = 1/2 \cdot \Pr(\mathcal{E}|m = m_1) + 1/2 \cdot \Pr(\mathcal{E}|m = m_0).$$

Der erste Anteil (Verfälschung von m_1 nach m_0) ergibt sich aus der Überschreitung der Grenze G durch die Rayleighverteilung

$$\Pr(\mathcal{E}|m = m_1) = \int_G^\infty p_{y|m}(\eta|m_1) d\eta = e^{-G^2/2} = e^{-3.125} \approx 0.044.$$

Der zweite Anteil (Verfälschung von m_0 nach m_1) ergibt sich aus der Riceverteilung, die hier durch die Gaußverteilung angenähert ist:

$$\Pr(\mathcal{E}|m = m_0) = \int_0^G p_{y|m}(\eta|m_0) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^G e^{-(\eta-C)^2/2} d\eta.$$

Dieser Anteil lässt sich mit dem komplementären Gaußschen Fehlerintegral $Q(x)$ angeben:

$$\begin{aligned} \Pr(\mathcal{E}|m = m_0) &= \Pr(y < G - C) = \Pr(y > C - G) = \\ &= Q\left(\frac{C - G}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{4 - 2.5}{1}\right) = Q(1.5) \approx 0.0688. \end{aligned}$$

Damit erhält man insgesamt:

$$p_s = \Pr(\mathcal{E}) = 1/2 \cdot 0.0440 + 1/2 \cdot 0.0668 \approx \underline{5.54\%}.$$

Eine Systemsimulation hat ergeben, dass sich eine etwas kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt, wenn man anstelle der Gaußnäherung die tatsächliche Riceverteilung ansetzt. Dann gilt mit $G = 2.5$:

$$p_s = \Pr(\mathcal{E}) = 1/2 \cdot 0.0440 + 1/2 \cdot 0.0484 \approx \underline{4.62\%}.$$

Die Gaußnäherung liefert also eine obere Schranke für die tatsächliche Fehlerwahrscheinlichkeit.

e) Mit $C = 6$ lautet die unter c) angegebene Bestimmungsgleichung

$$f(G) = G - 1/C \cdot \ln(G) - C/2 - \frac{1}{2C} \cdot \ln(2\pi) \approx G - \ln(G)/6 - 3.153 = 0,$$

$$G = 3.0: f(G) = -0.336, \quad G = 3.50: f(G) = 0.138,$$

$$G = 3.3: f(G) = -0.052, \quad G = 3.35: f(G) \approx 0 \Rightarrow \underline{G_{\text{opt}} \approx 3.35}.$$

f) Analog zur Teilaufgabe d) erhält man mit $G = 3.5$:

$$\begin{aligned} p_s &= \Pr(\mathcal{E}) = 1/2 \cdot e^{-G^2/2} + 1/2 \cdot Q(C - G) = \\ &= 1/2 \cdot e^{-6.125} + 1/2 \cdot Q(2.5) = 1/2 \cdot 2.2 \cdot 10^{-3} + 1/2 \cdot 6.2 \cdot 10^{-3} = \underline{0.42\%}. \end{aligned}$$

Für $C = 6$ ergibt sich mit der hierfür optimalen Entscheidungsgrenze ($G_{\text{opt}} = 3.35$) eine etwa um den Faktor 10 kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit als mit $C = 4$:

$$p_s = 1/2 \cdot e^{-5.61} + 1/2 \cdot Q(2.65) = 1/2 \cdot 3.6 \cdot 10^{-3} + 1/2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 0.38\%.$$

Die tatsächliche Fehlerwahrscheinlichkeit bei Verwendung der Riceverteilung (keine Gaußnäherung) liefert einen etwas kleineren Wert: 0.33%.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.17

a) Die obere Grafik zeigt näherungsweise eine Gaußverteilung und gehört dementsprechend zur Riceverteilung. Richtig ist also der zweite Lösungsvorschlag.

b) Man erkennt aus der Grafik: Der Mittelwert der Gaußverteilung ist $C=4$ und die Streuung ist $\sigma_n=1$.

Vorgegeben war ja, dass C und σ_n ganzzahlig seien. Damit lauten die beiden Dichtefunktionen:

$$p_I(\eta) = \eta \cdot \exp\left[-\frac{\eta^2 + 16}{2}\right] \cdot I_0(4\eta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(\eta - 4)^2}{2}\right],$$

$$p_{II}(\eta) = \eta \cdot \exp\left[-\frac{\eta^2}{2}\right].$$

c) Richtig ist der Lösungsvorschlag 2, wie bereits aus der Grafik ersichtlich ist. Eine Rechnung bestätigt dieses Ergebnis:

$$\sigma_{\text{Rice}}^2 = \sigma_n^2 = 1,$$

$$\sigma_{\text{Rayl}}^2 = \sigma_n^2 \cdot (2 - \pi/2) \approx 0.429.$$

d) Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit, dass y größer ist als ein Wert y_0 , gleich

$$\Pr(y > y_0) = \int_{y_0}^{\infty} \frac{\eta}{\sigma_n^2} \cdot \exp\left[-\frac{\eta^2}{2\sigma_n^2}\right] d\eta.$$

Mit der Substitution $x^2 = \eta^2/(2\sigma_n^2)$ kann hierfür geschrieben werden:

$$\Pr(y > y_0) = 2 \int_{y_0/(\sqrt{2} \cdot \sigma_n)}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = \left[e^{-x^2} \right]_{\sqrt{2} \cdot \sigma_n}^{\infty} = \exp\left[-\frac{y_0^2}{2\sigma_n^2}\right].$$

Hierbei wurde das vorne angegebene unbestimmte Integral benutzt. Insbesondere gilt:

$$\Pr(y > \sigma_n) = e^{-0.5} \approx \underline{0.607},$$

$$\Pr(y > 2\sigma_n) = e^{-2.0} \approx \underline{0.135},$$

$$\Pr(y > 3\sigma_n) = e^{-4.5} \approx \underline{0.011}.$$

Musterlösung zur Aufgabe A4.18

a) Richtig sind die Lösungsvorschläge 1, 2 und 4. Bei kohärenter Demodulation ist Orthogonalität dann gegeben, wenn der Modulationsindex h ein Vielfaches von 0.5 ist. Binäre FSK mit $h = 0.5$ nennt man auch *Minimum Shift Keying* (MSK). Da durch die Phasenregelung die Phasenverschiebung (Laufzeit) auf dem AWGN-Übertragungskanal ausgeglichen wird $\Rightarrow \exp(j\phi) \cdot \exp(-j\phi) = 1$, gilt tatsächlich für die Signale im äquivalenten Tiefpassbereich:

$$r(t) = s(t) + n(t).$$

b) Hier ist nur der erste Lösungsvorschlag richtig, das heißt, $h = 1, 2, 3, \dots$ muss nun ganzzahlig sein. Nichtkohärente Demodulation von FSK ist somit nicht möglich. Wegen der fehlenden Phasenregelung gilt außerdem:

$$r(t) = s(t) \cdot e^{-j\phi} + n(t).$$

c) Bei gleichwahrscheinlichen Nachrichten gilt:

$$p_S = \Pr(\mathcal{E}) = \Pr(\mathcal{E} | m = m_0) = \Pr(\hat{m} = m_1 | m = m_0).$$

Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der vorgegebenen Gleichung mit $\gamma = 1$. In diesem Fall ist stets $\Gamma = „Z“$ und die Entscheidungsregel lautet dann: Entscheide auf das Symbol m_0 , falls $y_1 > y_2$:

$$p_S = \frac{1}{1 + \gamma^2} \cdot \exp \left[-\frac{\gamma^2 \cdot E_S}{(1 + \gamma^2) \cdot N_0} \right]_{\gamma=1} = 1/2 \cdot e^{-E_S/(2N_0)}.$$

Mit $E_S/N_0 = 10$ erhält man $p_S = 1/2 \cdot e^{-5} \approx \underline{3.37 \cdot 10^{-3}}$.

d) Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus Symmetriegründen zu

$$\begin{aligned} \Pr(\Gamma = „Z“ \cap \text{Fehler}) &= 1/2 \cdot \Pr\{(\hat{m} = m_1) \cap \Gamma = „Z“ | m_0\} + \\ &+ 1/2 \cdot \Pr\{(\hat{m} = m_0) \cap (\Gamma = „Z“) | m_1\} = \\ &= \Pr\{(\hat{m} = m_1) \cap (\Gamma = „Z“) | m_0\} = \\ &= \frac{1}{1 + 2^2} \cdot \exp \left[-\frac{2^2 \cdot E_S}{(1 + 2^2) \cdot N_0} \right] = 1/5 \cdot e^{-8} = \underline{6.7 \cdot 10^{-5}}. \end{aligned}$$

e) Da „U“ und „Z“ nach der Statistik ein vollständiges System ergeben, gilt mit den Ergebnissen der Teilaufgaben c) und d):

$$\begin{aligned} \Pr(\Gamma = „U“ \cap \text{Fehler}) &= \Pr(\text{Fehler}) - \Pr(\Gamma = „Z“, \text{Fehler}) = \\ &= 3.37 \cdot 10^{-3} - 6.7 \cdot 10^{-5} = \underline{3.3 \cdot 10^{-3}}. \end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit $\Pr(\Gamma = U | \text{Fehler})$:

$$\Pr(\Gamma = „U“ | \text{Fehler}) = \frac{\Pr(\Gamma = „U“ \cap \text{Fehler})}{\Pr(\text{Fehler})} = \frac{3.3 \cdot 10^{-3}}{3.37 \cdot 10^{-3}} = \underline{0.98}.$$

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z4.18

a) Ein Vergleich der Gleichungen auf der Angabenseite macht deutlich, dass bei binärer FSK mit kohärenter Demodulation das AWGN-Verhältnis E_B/N_0 verdoppelt werden muss, damit die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit wie bei BPSK erreicht wird. In anderen Worten: Die kohärente BFSK-Kurve liegt um $10 \cdot \lg(2) \approx 3$ dB rechts von der BPSK-Kurve. Um $p_B \leq 10^{-5}$ zu garantieren, muss gelten:

$$10 \cdot \lg E_B/N_0 \approx 9.6 \text{ dB} + 3 \text{ dB} = \underline{12.6 \text{ dB}}.$$

b) Die angegebene Gleichung gilt nicht nur für die MSK (diese ist eine FSK mit $h = 0.5$), sondern für jede Form von orthogonaler FSK. Eine solche liegt vor, wenn der Modulationsindex h ein ganzzahliges Vielfaches von 0.5 ist, zum Beispiel für $h = 1$. Mit $h = 0.7$ ergibt sich keine orthogonale FSK. Richtig ist also der Lösungsvorschlag 2.

Es kann gezeigt werden, dass sich für $h = 0.7$ sogar eine kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit als bei orthogonaler FSK ergibt. Mit $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 12.6$ dB erreicht man hier sogar $p_B \approx 10^{-6}$, also eine Verbesserung um eine Zehnerpotenz.

c) Aus der Umkehrfunktion der angegebenen Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{E_B}{2 \cdot N_0} &= \ln \frac{1}{2p_B} = \ln(50000) \approx 10.82 \\ \Rightarrow E_B/N_0 &= 21.64 \Rightarrow 10 \cdot \lg E_B/N_0 \approx \underline{13.4 \text{ dB}}. \end{aligned}$$

d) Aus $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 12.6$ dB folgt:

$$E_B/N_0 = 10^{1.26} \approx 16.8 \Rightarrow \frac{E_B}{2 \cdot N_0} \approx 8.4 \Rightarrow p_B = 1/2 \cdot e^{-8.4} \approx \underline{1.12 \cdot 10^{-4}}.$$

Das heißt: Bei gleichem E_B/N_0 wird die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der nichtkohärenter Demodulation gegenüber kohärenter Demodulation (siehe Teilaufgabe a) um etwa den Faktor 11 vergrößert.

Musterlösung zur Aufgabe A4.19

a) Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 3. Bei der Konstellation **B** ist dagegen die Orthogonalität nicht gegeben. Vielmehr gilt hier $M = 3$ und $N = 2$.

b) Für die binäre FSK ($M = 2$) gilt mit der Abkürzung $x = E_S/N_0 = 6$:

$$p_S = (-1)^2 \cdot \binom{1}{1} \cdot 1/2 \cdot e^{-x/2} = 1/2 \cdot e^{-3} \approx \underline{0.0249}.$$

Entsprechend erhält man für die ternäre FSK ($M = 3$):

$$\begin{aligned} p_S &= (-1)^2 \cdot \binom{2}{1} \cdot 1/2 \cdot e^{-(1/2) \cdot x} + (-1)^3 \cdot \binom{2}{2} \cdot 1/3 \cdot e^{-(2/3) \cdot x} = \\ &= e^{-3} - 1/3 \cdot e^{-4} \approx 0.0498 - 0.0061 = \underline{0.0437}. \end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich für die quaternäre FSK ($M = 4$):

$$\begin{aligned} p_S &= (-1)^2 \cdot \binom{3}{1} \cdot \frac{e^{-x/2}}{2} + (-1)^3 \cdot \binom{3}{2} \cdot \frac{e^{-2x/3}}{3} + (-1)^4 \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{e^{-3x/4}}{4} = \\ &= 3/2 \cdot e^{-3} - e^{-4} + e^{-4.5} \approx 0.0747 - 0.0183 + 0.0111 = \underline{0.0675}. \end{aligned}$$

c) Mit konstantem $E_S/N_0 = 6$ gilt stets $p_{S, \max} \geq p_S$:

$$\begin{aligned} M = 2 : p_{S, \max} &= \underline{0.0249} = p_S, \\ M = 3 : p_{S, \max} &= \underline{0.0498} > 0.0437 = p_S, \\ M = 4 : p_{S, \max} &= \underline{0.0747} > 0.0675 = p_S. \end{aligned}$$

Analysiert man die Gleichung

$$p_{S, \max} = (M - 1)/2 \cdot e^{-E_S/(2N_0)}$$

etwas genauer, so erkennt man, dass diese Schranke genau die **Union Bound** angibt:

- Beim Binärsystem gibt $1/2 \cdot \exp[-E_S/(2N_0)]$ die Verfälschungswahrscheinlichkeit an, zum Beispiel von \mathbf{s}_1 nach \mathbf{s}_2 oder umgekehrt.
- Beim M -stufigen System ist der Abstand zwischen \mathbf{s}_1 und \mathbf{s}_2 genau so groß. Aber auch die Punkte $\mathbf{s}_3, \dots, \mathbf{s}_M$ liegen im gleichen Abstand zu \mathbf{s}_1 bzw. zu \mathbf{s}_2 .
- Die „Union Bound“ berücksichtigt die Verfälschungsmöglichkeiten eines Punktes zu jedem der allgemein $M - 1$ anderen Punkte durch den Faktor $M - 1$.

d) Mit $E_B = E_S/\log_2(M)$ erhält man

$$p_{S, \max} = \frac{M - 1}{2} \cdot \exp \left[-\frac{\log_2(M) \cdot E_B}{2 \cdot N_0} \right].$$

Nun wird die Fehlerwahrscheinlichkeit mit zunehmender Stufenzahl immer kleiner, da bei konstantem E_B die Energie E_S pro Symbol um den Faktor $\log_2(M)$ zunimmt. Der Faktor $M - 1$ (dieser berücksichtigt die Verfälschungsmöglichkeiten eines Signalraumpunktes) hat dann weniger Einfluss als die Vergrößerung des negativen Exponenten:

$$M = 2: p_{S,\max} = 1/2 \cdot e^{-3} \underline{=} 0.0249,$$

$$M = 3: p_{S,\max} = e^{-4.755} \underline{=} 0.0086,$$

$$M = 4: p_{S,\max} = 3/2 \cdot e^{-6} \underline{=} 0.0037.$$