

## Überblick zu Kapitel 2 des Buches „Digitalsignalübertragung“

Das zweite Kapitel behandelt die so genannte **Übertragungscodierung**, die in der Literatur manchmal auch als „Leitungscodierung“ bezeichnet wird. Dabei wird durch gezieltes Hinzufügen von Redundanz eine Anpassung des digitalen Sendesignals an die Eigenschaften des Übertragungskanals erreicht.

Im Einzelnen werden behandelt:

- einige grundlegende Begriffe der Informationstheorie wie *Informationsgehalt* und *Entropie*,
- die *AKF-Berechnung* und die *Leistungsdichtespektren* von Digitalsignalen,
- die *redundanzfreie Codierung*, die zu einem nichtbinären Sendesignal führt,
- die Berechnung von *Symbol-* und *Bitfehlerwahrscheinlichkeit* bei mehrstufigen Systemen,
- die so genannten *4B3T-Codes* als ein wichtiges Beispiel von blockweiser Codierung, und
- die *Pseudoternär codes*, die jeweils eine symbolweise Codierung realisieren.

Die Beschreibung erfolgt durchgehend im Basisband und es werden weiterhin einige vereinfachende Annahmen (unter Anderem: keine Impulsinterferenzen) getroffen.

**Geeignete Literatur:** [BBC87] – [Hän97] – [Hag02] – [Han04] – [Hay88] – [Kam04] – [Lük04] – [Pro01] – [PS04] – [Söd00] – [ST85] – [TS87]

Die grundlegende Theorie wird auf 33 Bildschirmseiten dargelegt. Außerdem beinhaltet dieses Kapitel noch 42 Grafiken, acht Aufgaben und vier Zusatzaufgaben mit insgesamt 67 Teilaufgaben, sowie zwei *Lernvideos* (LV) und sechs *Interaktionsmodule* (IM):

- **Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit** (LV, Grundlagen, Dauer 5:20)
- **Gesetze der Fouriertransformation** (LV, Grundlagen, 2-tlg: Dauer 5:57 – 5:55)
- **Zur Verdeutlichung der grafischen Faltung** (IM, Grundlagen)
- **Impulse und deren Spektren** (IM, Grundlagen)
- **Symbolfehlerwahrscheinlichkeit von Digitalsystemen** (IM zu Kapitel 2.2)
- **Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen** (IM zu Kapitel 2.2, 2.3, 2.4)
- **Prinzip der 4B3T-Codierung** (IM zu Kapitel 2.3)
- **Signale, AKF und LDS der Pseudoternär codes** (IM zu Kapitel 2.4)

Weitere Informationen zum Thema sowie Aufgaben, Simulationen und Programmierübungen finden Sie im Kapitel 15 des Praktikums *Simulationsmethoden in der Nachrichtentechnik* [Söd00], das über viele Jahre von Prof. Günter Söder für Studierende der Elektrotechnik und Informationstechnik an der TU München angeboten wurde. Dieses Praktikum des Lehrstuhls für Nachrichtentechnik (LNT) basiert auf den 24 DOS-Programmen des Lehrsoftwarepakets *LNTsim*.

**Lehrsoftwarepaket LNTsim** (Zip-Version, mehr als 50 MB)

**Praktikumsanleitung – Teil B** (PDF-Version incl. Kapitel 15, ca. 9.5 MB)

## Informationsgehalt – Entropie – Redundanz (1)

Wir gehen von einer  $M$ -stufigen digitalen Nachrichtenquelle aus, die das Quellsignal

$$q(t) = \sum_{(\nu)} a_{\nu} \cdot \delta(t - \nu \cdot T) \quad \text{mit } a_{\nu} \in \{a_1, \dots, a_{\mu}, \dots, a_M\}$$

abgibt. Die Quellsymbolfolge  $\langle q_{\nu} \rangle$  ist auf die Folge  $\langle a_{\nu} \rangle$  der dimensionslosen Amplitudenkoeffizienten abgebildet. Vereinfachend wird zunächst für die Zeitlaufvariable  $\nu = 1, \dots, N$  gesetzt, während der Vorratsindex  $\mu$  stets Werte zwischen 1 und  $M$  annehmen kann.

Ist das  $\nu$ -te Folgeelement gleich  $a_{\mu}$ , so kann dessen **Informationsgehalt** mit der Wahrscheinlichkeit  $p_{\nu\mu} = \Pr(a_{\nu} = a_{\mu})$  wie folgt berechnet werden:

$$I_{\nu} = \log_2 \frac{1}{p_{\nu\mu}} = \text{ld} \frac{1}{p_{\nu\mu}} \quad (\text{Einheit : bit}).$$

Der Logarithmus zur Basis 2  $\Rightarrow \log_2$  wird oft auch mit „ld(x)“  $\Rightarrow$  *Logarithmus dualis* bezeichnet. Bei der numerischen Auswertung wird die Hinweiseinheit „bit“ hinzugefügt. Mit dem Zehner-Logarithmus  $\lg(x)$  bzw. dem natürlichen Logarithmus  $\ln(x)$  gilt:

$$\log_2(x) = \frac{\lg(x)}{\lg(2)} = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

Nach dieser auf C. E. **Shannon** zurückgehenden Definition von Information ist der Informationsgehalt eines Symbols umso größer, je kleiner dessen Auftrittswahrscheinlichkeit ist.

**Definition:** Die **Entropie** ist der mittlere Informationsgehalt eines Folgeelements (Symbols). Diese wichtige informationstheoretische Größe lässt sich als Zeitmittelwert wie folgt ermitteln:

$$H = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^N I_{\nu} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^N \log_2 \frac{1}{p_{\nu\mu}} \quad (\text{Einheit : bit}).$$

Natürlich kann die Entropie auch durch Scharmittelung berechnet werden.

Sind die Folgeelemente  $a_{\nu}$  statistisch voneinander unabhängig, so sind die Auftrittswahrscheinlichkeiten  $p_{\nu\mu} = p_{\mu}$  unabhängig von  $\nu$  und man erhält in diesem Sonderfall für die Entropie:

$$H = \sum_{\mu=1}^M p_{\mu} \cdot \log_2 \frac{1}{p_{\mu}}.$$

Bestehen dagegen statistische Bindungen zwischen benachbarten Amplitudenkoeffizienten  $a_{\nu}$ , so muss zur Entropieberechnung die kompliziertere Definitionsgleichung herangezogen werden.

## Informationsgehalt – Entropie – Redundanz (2)

Der Maximalwert der Entropie ergibt sich immer dann, wenn die  $M$  Auftretswahrscheinlichkeiten (der statistisch unabhängigen Symbole) alle gleich sind ( $p_\mu = 1/M$ ):

$$H_{\max} = \sum_{\mu=1}^M \frac{1}{M} \cdot \log_2(M) = \log_2(M) \cdot \sum_{\mu=1}^M \frac{1}{M} = \log_2(M) \quad (\text{Einheit : bit}).$$

Man bezeichnet  $H_{\max}$  als den **Entscheidungsgehalt** (bzw. als Nachrichtengehalt) und den Quotienten

$$r = \frac{H_{\max} - H}{H_{\max}}$$

als die **relative Redundanz**. Da stets  $0 \leq H \leq H_{\max}$  gilt, kann die relative Redundanz Werte zwischen 0 und 1 (einschließlich dieser Grenzwerte) annehmen.

Aus der Herleitung dieser Beschreibungsgrößen ist offensichtlich, dass ein redundanzfreies Digitalsignal ( $r = 0$ ) folgende Eigenschaften erfüllen muss:

- Die Amplitudenkoeffizienten  $a_v$  sind **statistisch unabhängig**;  $\Pr(a_v = a_\mu)$  ist für alle  $v$  identisch.
- Die  $M$  möglichen Koeffizienten  $a_\mu$  treten mit **gleicher Wahrscheinlichkeit**  $p_\mu = 1/M$  auf.

**Beispiel:** Analysiert man einen zur Übertragung anstehenden deutschen Text auf der Basis von  $M = 32$  Zeichen (a, ... , z, ä, ö, ü, ß, Leerzeichen, Interpunktion, keine Unterscheidung zwischen Groß- und Kleinschreibung), so ergibt sich der Entscheidungsgehalt  $H_{\max} = 5$  bit/Symbol. Aufgrund

- der unterschiedlichen Häufigkeiten (beispielsweise tritt „e“ deutlich häufiger auf als „u“) und
- von statistischen Bindungen (zum Beispiel folgt auf „q“ der Buchstabe „u“ viel öfters als „e“)

beträgt nach **Karl Küpfmüller** die Entropie der deutschen Sprache nur  $H = 1.3$  bit/Zeichen. Daraus ergibt sich die relative Redundanz zu  $r \approx (5 - 1.3)/5 = 74\%$ . Für englische Texte wurde von **Claude E. Shannon** die Entropie mit  $H = 1$  bit/Zeichen angegeben ( $r = 80\%$ ).

## Quellen-, Kanal- und Übertragungscodierung

Unter **Codierung** versteht man die Umsetzung der Quellensymbolfolge  $\langle q_v \rangle$  mit Symbolumfang  $M_q$  in eine Codesymbolfolge  $\langle c_v \rangle$  mit dem Symbolumfang  $M_c$ . Meist wird durch die Codierung die in einem Digitalsignal enthaltene Redundanz manipuliert. Oft – aber nicht immer – sind  $M_q$  und  $M_c$  verschieden.

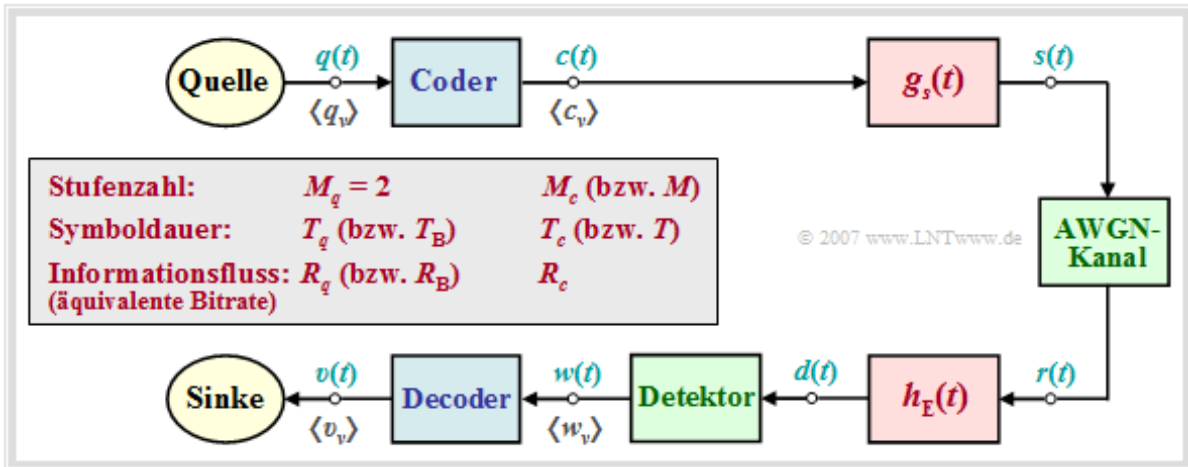
Man unterscheidet je nach Zielrichtung zwischen verschiedenen Arten von Codierung:

- Die Aufgabe der **Quellencodierung** ist die Redundanzreduktion zur Datenkomprimierung, wie sie beispielsweise in der Bildcodierung Anwendung findet. Durch Ausnutzung statistischer Bindungen zwischen den einzelnen Punkten eines Bildes bzw. zwischen den Helligkeitswerten eines Punktes zu verschiedenen Zeiten (bei Bewegtbildsequenzen) können Verfahren entwickelt werden, die bei nahezu gleicher Bildqualität zu einer merklichen Verminderung der Datenmenge (gemessen in bit oder byte) führen. Ein einfaches Beispiel hierfür ist die differentielle Pulscodemodulation (DPCM).
- Bei der **Kanalcodierung** erzielt man demgegenüber dadurch eine merkliche Verbesserung des Übertragungsverhaltens, dass eine beim Sender gezielt hinzugefügte Redundanz empfangsseitig zur Erkennung und Korrektur von Übertragungsfehlern genutzt wird. Solche Codes, deren wichtigste Vertreter Block-, Faltungs- und Turbo-Codes sind, haben besonders bei stark gestörten Kanälen eine große Bedeutung. Je größer die relative Redundanz des codierten Signals ist, desto besser sind die Korrektureigenschaften des Codes, allerdings bei verringerter Nutzdatenrate.
- Eine **Übertragungscodierung** – häufig auch als Leitungscodierung bezeichnet – verwendet man, um das Sendesignal durch eine Umcodierung der Quellensymbole an die spektralen Eigenschaften von Übertragungskanal und Empfangseinrichtungen anzupassen. Beispielsweise muss bei einem Kanal mit der Frequenzgangseigenschaft  $H_K(f=0) = 0$ , über den kein Gleichsignal übertragen werden kann, durch Übertragungscodierung sichergestellt werden, dass die Codesymbolfolge weder eine lange **L**- noch eine lange **H**-Folge beinhaltet.

Im vorliegenden Buch „Digitalsignalübertragung“ beschäftigen wir uns ausschließlich mit diesem letzten, übertragungstechnischen Aspekt. Der Kanalcodierung ist in *LNTwww* ein eigenes Buch gewidmet (siehe Bücherregalseite), während die Quellencodierung im Buch „Informationstheorie“ ausführlich behandelt wird. Auch die Sprachcodierung im Kapitel 3.3 des Buches „Beispiele von Nachrichtensystemen“ stellt eine spezielle Form der Quellencodierung dar.

## Systemmodell und Beschreibungsgrößen

Im weiteren Verlauf des zweiten Kapitels wird von folgendem Blockschaltbild ausgegangen.



Zusätzlich gelten folgende Vereinbarungen:

- Das digitale Quellensignal  $q(t)$  sei binär ( $M_q = 2$ ) und redundanzfrei ( $H_q = 1$  bit/Symbol). Mit der Symboldauer  $T_q$  ergibt sich für die Symbolrate der Quelle:

$$R_q = H_q/T_q = 1/T_q \quad (\text{Einheit : bit/s}).$$

- Wegen  $M_q = 2$  bezeichnen wir im Folgenden  $T_q$  auch als die Bitdauer und  $R_q$  als die Bitrate. Für den Vergleich von Übertragungssystemen mit unterschiedlicher Codierung werden  $T_q$  und  $R_q$  (in späteren Kapiteln verwenden wir hierfür  $T_B$  und  $R_B$ ) stets als konstant angenommen.
- Das Codersignal  $c(t)$  und auch das Sendesignal  $s(t)$  nach der Impulsformung mit  $g_s(t)$  besitzen die Stufenzahl  $M_c$ , die Symboldauer  $T_c$  und die Symbolrate  $1/T_c$ . Die äquivalente Bitrate beträgt

$$R_c = \log_2(M_c)/T_c.$$

- Es gilt stets  $R_c \geq R_q$ , wobei das Gleichheitszeichen nur bei den **redundanzfreien Codes** ( $r_c = 0$ ) gültig ist. Andernfalls erhält man für die relative Coderedundanz:

$$r_c = (R_c - R_q)/R_c = 1 - R_q/R_c.$$

**Hinweis zur Nomenklatur:** Die äquivalente Bitrate  $R_c$  des Codersignals hat ebenso wie die Bitrate  $R_q$  der Quelle die Einheit „bit/s“. Insbesondere in der Literatur zur Kanalcodierung wird dagegen mit  $R_c$  häufig die dimensionslose Coderate  $1 - r_c$  bezeichnet.  $R_c = 1$  gibt dann einen redundanzfreien Code an, während  $R_c = 1/3$  einen Code mit der Redundanz  $r_c = 2/3$  kennzeichnet.

**Beispiel:** Bei den so genannten 4B3T-Codes werden jeweils vier Binärsymbole ( $m_q = 4, M_q = 2$ ) durch drei Ternärsymbole ( $m_c = 3, M_c = 3$ ) dargestellt. Wegen  $4 \cdot T_q = 3 \cdot T_c$  gilt:

$$R_q = 1/T_q, R_c = \log_2(3)/T_c = 3/4 \cdot \log_2(3)/T_q \Rightarrow r_c = 3/4 \cdot \log_2(3) - 1 \approx 15.9 \%.$$

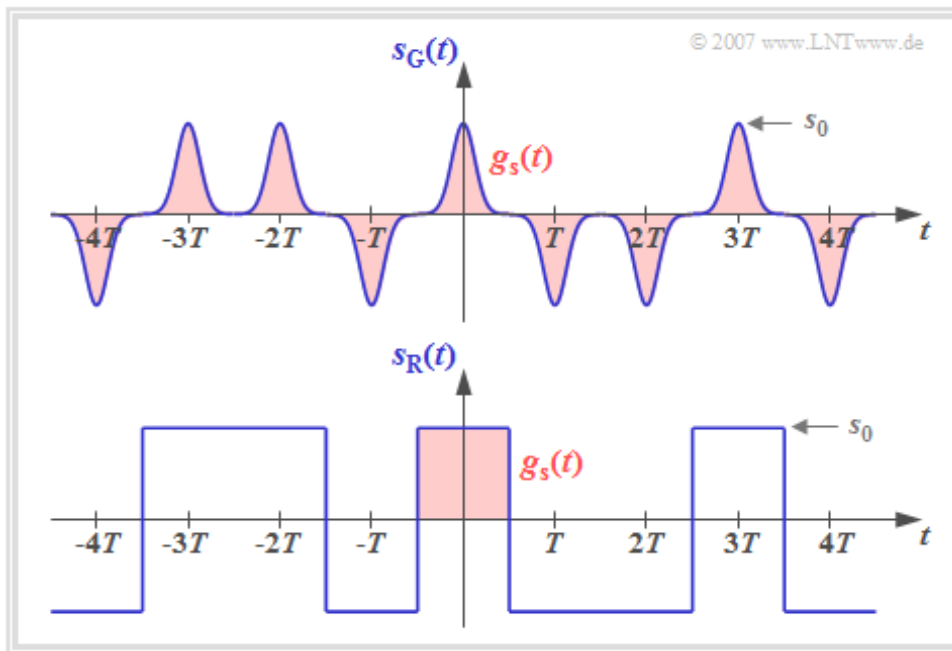
Genauere Informationen zu den 4B3T-Codes finden Sie im **Kapitel 2.3**.

## AKF–Berechnung eines Digitalsignals (1)

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im Folgenden  $M_c = M$  und  $T_c = T$  gesetzt. Damit kann für das Sendesignal bei einer zeitlich unbegrenzten Nachrichtenfolge geschrieben werden:

$$s(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_s(t - \nu \cdot T).$$

Diese Signaldarstellung beinhaltet sowohl die Quellenstatistik (Amplitudenkoeffizienten  $a_\nu$ ) als auch die Sendeimpulsform  $g_s(t)$ . Die Grafik zeigt zwei binäre bipolare Sendesignale  $s_G(t)$  und  $s_R(t)$  mit gleichen Amplitudenkoeffizienten  $a_\nu$ , die sich lediglich durch den Sendegrundimpuls  $g_s(t)$  unterscheiden.



Man erkennt aus dieser Darstellung, dass ein Digitalsignal im Allgemeinen nichtstationär ist:

- Beim Sendesignal  $s_G(t)$  mit schmalen Gaußimpulsen ist die Nichtstationarität offensichtlich, da zum Beispiel bei Vielfachen von  $T$  die Varianz  $\sigma_s^2 = s_0^2$  ist, während dazwischen  $\sigma_s^2 \approx 0$  gilt.
- Auch das Signal  $s_R(t)$  mit NRZ–rechteckförmigen Impulsen ist im strengen Sinne nichtstationär, da sich hier die Momente an den Bitgrenzen gegenüber allen anderen Zeitpunkten unterscheiden.
- Einen Zufallsprozess, dessen Momente  $m_k(t) = m_k(t + \nu \cdot T)$  sich periodisch mit  $T$  wiederholen, bezeichnet man als **zyklostationär**;  $k$  und  $\nu$  besitzen hierbei ganzzahlige Zahlenwerte.

Viele der für **ergodische Prozesse** gültigen Regeln kann man mit nur geringen Einschränkungen auch auf zykoergodische (und damit ebenfalls auf zyklostationäre) Prozesse anwenden. Insbesondere gilt für die **Autokorrelationsfunktion** (AKF) solcher Zufallsprozesse mit Mustersignal  $s(t)$ :

$$\varphi_s(\tau) = E[s(t) \cdot s(t + \tau)].$$

Mit obiger Gleichung des Sendesignals kann die AKF als Zeitmittelwert wie folgt geschrieben werden:

$$\varphi_s(\tau) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \cdot \sum_{\nu=-N}^{+N} a_\nu \cdot a_{\nu+\lambda} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g_s(t) \cdot g_s(t + \tau - \lambda \cdot T) dt.$$

## AKF–Berechnung eines Digitalsignals (2)

Wir gehen weiterhin von folgender AKF–Gleichung aus:

$$\varphi_s(\tau) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{\nu=-N}^{+N} a_\nu \cdot a_{\nu+\lambda} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g_s(t) \cdot g_s(t + \tau - \lambda \cdot T) dt.$$

Da die Grenzwert–, Integral– und Summenbildung miteinander vertauscht werden darf, kann mit den Substitutionen  $N = T_M/(2T)$ ,  $\lambda = \kappa - \nu$  und  $t - \nu \cdot T \rightarrow t$  hierfür auch geschrieben werden:

$$\varphi_s(\tau) = \lim_{T_M \rightarrow \infty} \frac{1}{T_M} \cdot \int_{-T_M/2}^{+T_M/2} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_s(t - \nu \cdot T) \cdot a_\kappa \cdot g_s(t + \tau - \kappa \cdot T) dt.$$

Nun werden zur Abkürzung folgende Größen eingeführt:

- Die **diskrete AKF der Amplitudenkoeffizienten** liefert Aussagen über die linearen statistischen Bindungen der Amplitudenkoeffizienten  $a_\nu$  und  $a_{\nu+\lambda}$  und besitzt keine Einheit:

$$\varphi_a(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot a_{\nu+\lambda}.$$

- Die **Energie–AKF des Grundimpulses** ist ähnlich definiert wie die allgemeine (Leistungs–)AKF. Sie wird mit einem Punkt gekennzeichnet. Es ist zu berücksichtigen, dass auf die Division durch  $T_M$  und den Grenzübergang verzichtet werden kann, da  $g_s(t)$  **energiebegrenzt** ist:

$$\varphi_{g_s}^\bullet(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_s(t) \cdot g_s(t + \tau) dt.$$

**Definition:** Für die **Autokorrelationsfunktion eines Digitalsignals**  $s(t)$  gilt allgemein:

$$\varphi_s(\tau) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} 1/T \cdot \varphi_a(\lambda) \cdot \varphi_{g_s}^\bullet(\tau - \lambda \cdot T).$$

Das Signal  $s(t)$  kann dabei binär oder mehrstufig, unipolar oder bipolar sowie redundanzfrei oder redundant (leitungscodiert) sein. Die Impulsform wird durch die Energie–AKF berücksichtigt.

Beschreibt das Digitalsignal  $s(t)$  einen Spannungsverlauf, so hat die Energie–AKF des Grundimpulses  $g_s(t)$  die Einheit  $V^2s$  und  $\varphi_s(\tau)$  die Einheit  $V^2$ , jeweils bezogen auf den Widerstand  $1 \Omega$ .

**Anmerkung:** Im strengen Sinne der Systemtheorie müsste man die AKF der Amplitudenkoeffizienten wie folgt definieren:

$$\varphi_{a,\delta}(\tau) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \varphi_a(\lambda) \cdot \delta(\tau - \lambda \cdot T).$$

Damit würde sich die obige Gleichung wie folgt darstellen:

$$\varphi_s(\tau) = 1/T \cdot \varphi_{a,\delta}(\tau) \star \varphi_{g_s}^\bullet(\tau - \lambda \cdot T) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} 1/T \cdot \varphi_a(\lambda) \cdot \varphi_{g_s}^\bullet(\tau - \lambda \cdot T).$$

Zur einfacheren Darstellung wird im Folgenden die diskrete AKF der Amplitudenkoeffizienten  $\Rightarrow \varphi_a(\lambda)$  stets ohne diese Diracfunktionen verwendet.

## LDS–Berechnung eines Digitalsignals

Die Entsprechungsgröße zur Autokorrelationsfunktion (AKF) eines Zufallssignals ist im Frequenzbereich das **Leistungsdichtespektrum** (LDS), das mit der AKF über das Fourierintegral in Bezug steht:

$$\varphi_s(\tau) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \Phi_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_s(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau.$$

Berücksichtigt man den Zusammenhang zwischen Energie–AKF und **Energiespektrum**,

$$\varphi_{gs}^*(\tau) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \Phi_{gs}^*(f) = |G_s(f)|^2,$$

sowie den **Verschiebungssatz**, so kann das Leistungsdichtespektrum des Digitalsignals  $s(t)$  in folgender Weise dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \Phi_s(f) &= \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} 1/T \cdot \varphi_a(\lambda) \cdot \Phi_{gs}^*(f) \cdot e^{-j2\pi f\lambda T} = \\ &= 1/T \cdot |G_s(f)|^2 \cdot \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \varphi_a(\lambda) \cdot \cos(2\pi f\lambda T). \end{aligned}$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass  $\Phi_s(f)$  und  $|G_s(f)|^2$  reellwertig sind und gleichzeitig  $\varphi_a(-\lambda) = \varphi_a(\lambda)$  gilt.

Definiert man nun die **spektrale Leistungsdichte der Amplitudenkoeffizienten** zu

$$\Phi_a(f) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \varphi_a(\lambda) \cdot e^{-j2\pi f\lambda T} = \varphi_a(0) + 2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \varphi_a(\lambda) \cdot \cos(2\pi f\lambda T),$$

so erhält man den folgenden Ausdruck:

$$\Phi_s(f) = \Phi_a(f) \cdot 1/T \cdot |G_s(f)|^2.$$

Das heißt, dass sich  $\Phi_s(f)$  als Produkt zweier Funktionen darstellen lässt:

- Der erste Term  $\Phi_a(f)$  ist dimensionslos und beschreibt die spektrale Formung des Sendesignals durch die **statistischen Bindungen** der Quelle.
- Dagegen berücksichtigt  $|G_s(f)|^2$  die spektrale Formung durch den **Sendegrundimpuls**  $g_s(t)$ . Je schmaler dieser ist, desto breiter ist  $|G_s(f)|^2$  und um so größer ist damit der Bandbreitenbedarf.
- Das Energiespektrum hat die Einheit  $V^2/s/Hz$ . Die Einheit  $V^2/Hz$  für das Leistungsdichtespektrum (nur gültig für den Widerstand  $1 \Omega$ ) ergibt sich aufgrund der Division durch den Symbolabstand  $T$ .

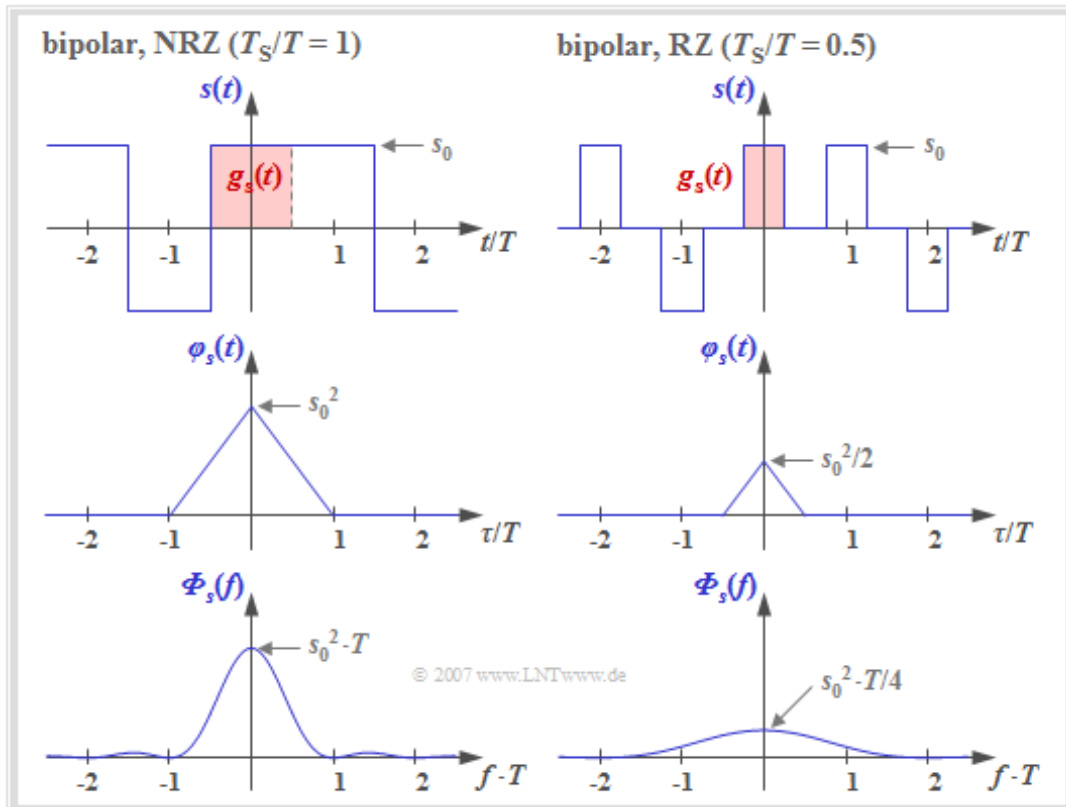


## AKF und LDS bei bipolaren Binärsignalen

Die bisherigen Ergebnisse werden nun an Beispielen verdeutlicht. Ausgehend von *binären bipolaren Amplitudenkoeffizienten*  $a_v \in \{-1, +1\}$  erhält man, falls keine Bindungen zwischen den  $a_v$  bestehen:

$$\varphi_a(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda = 0, \\ 0 & \text{für } \lambda \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_s(\tau) = 1/T \cdot \varphi_{g_s}(\tau).$$

Die Grafik zeigt zwei Signalausschnitte jeweils mit Rechteckimpulsen  $g_s(t)$ , die dementsprechend zu einer dreieckförmigen AKF und zu einem  $\text{si}^2$ -förmigen Leistungsdichtespektrum (LDS) führen.



Die linken Bilder beschreiben eine NRZ-Signalisierung, das heißt, dass die Breite  $T_S$  des Grundimpulses gleich dem Abstand  $T$  zweier Sendeimpulse (Quellensymbole) ist. Dagegen gelten die rechten Bilder für einen RZ-Impuls mit dem Tastverhältnis  $T_S/T = 0.5$ . Man erkennt:

- Bei NRZ-Rechteckimpulsen ergibt sich für die (auf den Widerstand  $1 \Omega$  bezogene) Sendeleistung  $\varphi_s(\tau = 0) = s_0^2$  und die dreieckförmige AKF ist auf den Bereich  $|\tau| \leq T_S = T$  beschränkt.
- Das LDS  $\Phi_s(f)$  als die Fouriertransformierte von  $\varphi_s(\tau)$  ist  $\text{si}^2$ -förmig mit äquidistanten Nullstellen im Abstand  $1/T$ . Die Fläche unter der LDS-Kurve ergibt wiederum die Sendeleistung  $s_0^2$ .
- Im Fall der RZ-Signalisierung ist die dreieckförmige AKF gegenüber dem linken Bild in Höhe und Breite jeweils um den Faktor  $T_S/T = 0.5$  kleiner.

Vergleicht man die beiden Leistungsdichtespektren (untere Bilder), so erkennt man für  $T_S/T = 0.5$  gegenüber  $T_S/T = 1$  eine Verkleinerung in der Höhe um den Faktor 4 und eine Verbreiterung um den Faktor 2. Die Fläche (Leistung) ist somit halb so groß, da in der Hälfte der Zeit  $s(t) = 0$  gilt.

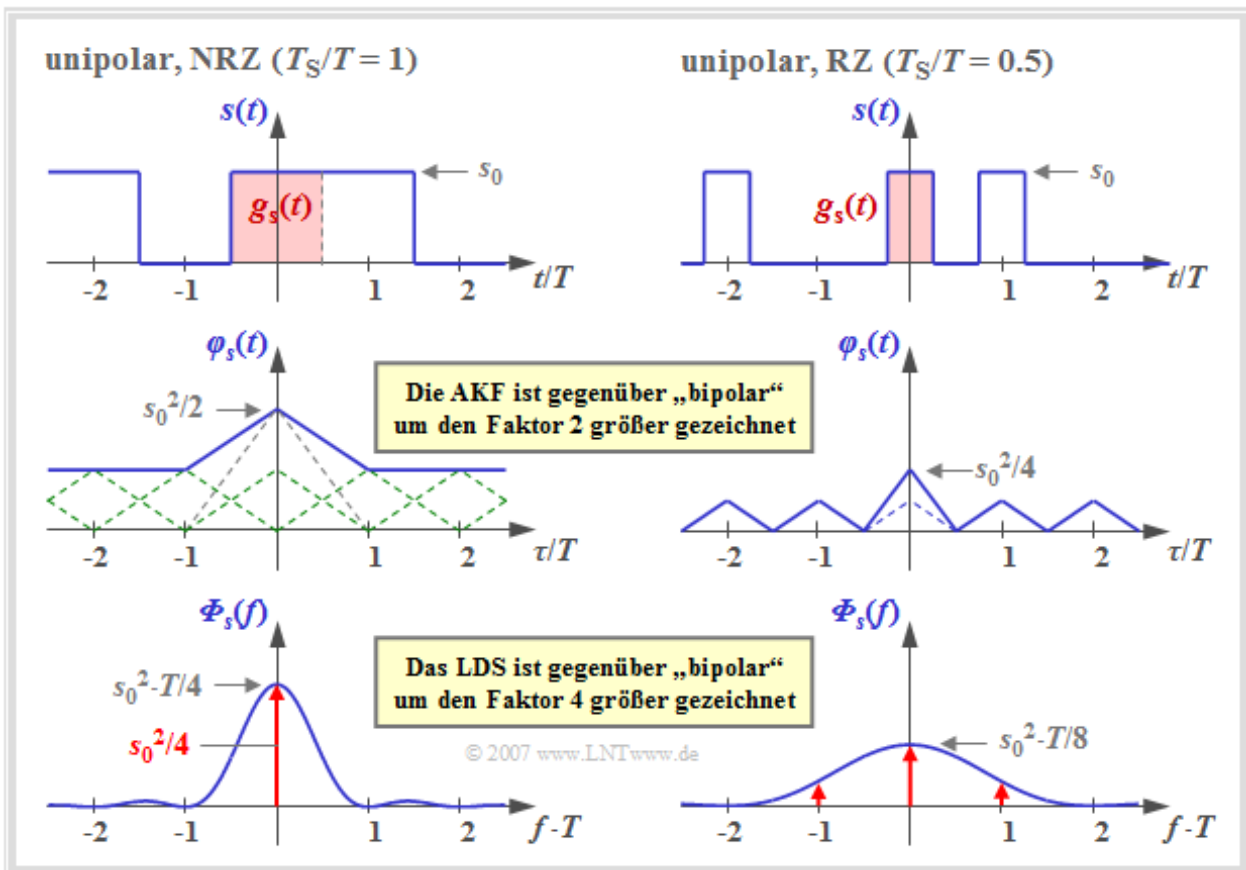
## AKF und LDS bei unipolaren Binärsignalen (1)

Wir gehen weiterhin von NRZ- bzw. RZ-Rechteckimpulsen aus. Die binären Amplitudenkoeffizienten seien aber nun **unipolar**:  $a_v \in \{0, 1\}$ . Dann gilt für die diskrete AKF der Amplitudenkoeffizienten:

$$\varphi_a(\lambda) = \begin{cases} m_2 = 0.5 & \text{für } \lambda = 0, \\ m_1^2 = 0.25 & \text{für } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Vorausgesetzt sind hier gleichwahrscheinliche Amplitudenkoeffizienten  $\Rightarrow \Pr(a_v = 0) = \Pr(a_v = 1) = 0.5$  ohne statistische Bindungen untereinander, so dass sowohl der quadratische Mittelwert  $m_2$  als auch der lineare Mittelwert  $m_1$  jeweils gleich 0.5 sind.

*Hinweis:* Unipolare Amplitudenkoeffizienten treten zum Beispiel bei *optischen Übertragungssystemen* auf. Trotzdem beschränken wir uns in späteren Kapiteln meist auf die bipolare Signalisierung.



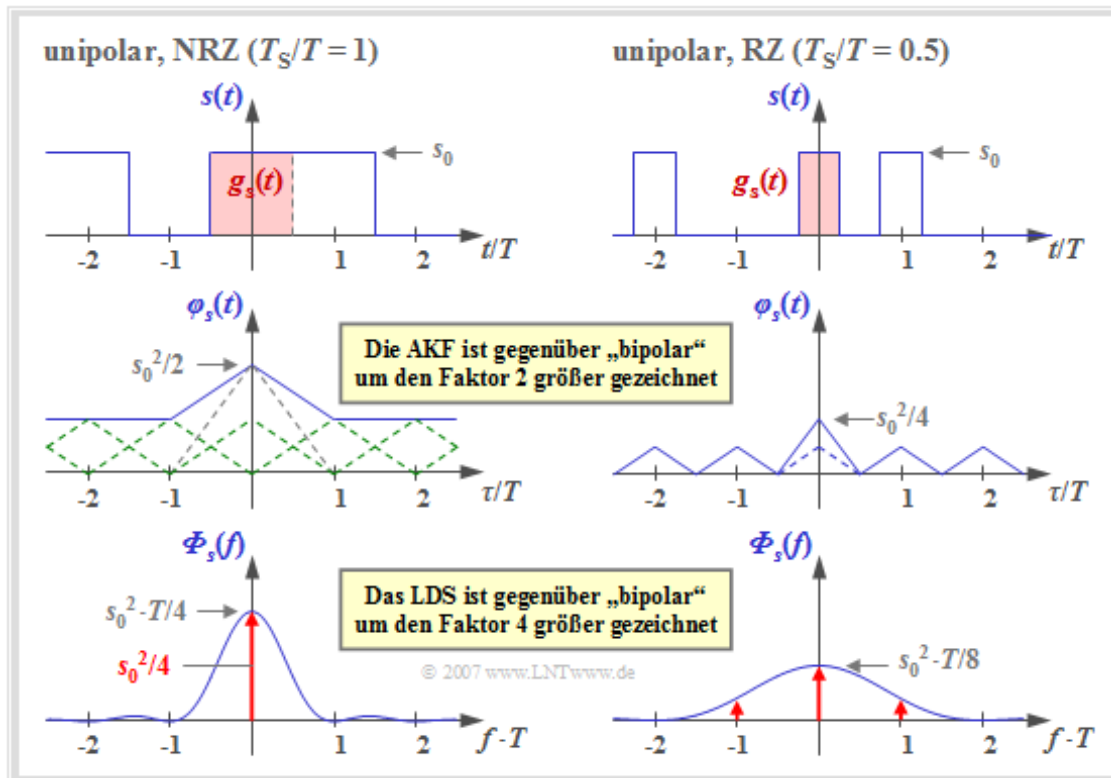
Die Grafik zeigt einen Signalausschnitt, die AKF und das LDS mit unipolaren Amplitudenkoeffizienten,

- links für rechteckförmige NRZ-Impulse ( $T_S/T = 1$ ), und
- rechts für RZ-Impulse mit dem Tastverhältnis  $T_S/T = 0.5$ .

Die Bildbeschreibung folgt auf der nächsten Seite.

## AKF und LDS bei unipolaren Binärsignalen (2)

Fortsetzung der Bildbeschreibung der letzten Seite



Man erkennt folgende Unterschiede gegenüber der bipolaren Signalisierung:

- Durch die Addition der unendlich vielen Dreiecksfunktionen im Abstand  $T$ , alle mit gleicher Höhe, ergibt sich für die AKF in der linken Grafik (NRZ) ein konstanter Gleichanteil  $s_0^2/4$ .
- Daneben verbleibt im Bereich  $|\tau| \leq T_S$  eine einzelne Dreiecksfunktion mit der Höhe  $s_0^2/4$ , die im Leistungsdichtespektrum (LDS) zum kontinuierlichen,  $\text{si}^2$ -förmigen Verlauf führt (blaue Kurve).
- Der Gleichanteil in der AKF bewirkt im LDS eine Diracfunktion bei der Frequenz  $f = 0$  mit dem Gewicht  $s_0^2/4$ . Es ist zu bemerken, dass dadurch der LDS-Wert  $\Phi_s(f = 0)$  unendlich groß wird.
- Aus der rechten Grafik – gültig für  $T_S/T = 0.5$  – erkennt man, dass sich nun die AKF aus einem periodischen Dreiecksverlauf (im mittleren Bereich gestrichelt eingezeichnet) und zusätzlich noch aus einem einmaligen Dreieck im Bereich  $|\tau| \leq T_S = T/2$  mit Höhe  $s_0^2/8$  zusammensetzt.
- Diese einmalige Dreiecksfunktion führt zu dem kontinuierlichen,  $\text{si}^2$ -förmigen Anteil (blaue Kurve) von  $\Phi_s(f)$  mit der ersten Nullstelle bei  $1/T_S = 2/T$ . Dagegen führt die periodische Dreiecksfunktion nach den Gesetzmäßigkeiten der **Fourierreihe** zu einer unendlichen Summe von Diracfunktionen mit unterschiedlichen Gewichten im Abstand  $1/T$  (rot gezeichnet).
- Die Gewichte der Diracfunktionen sind proportional zum kontinuierlichen (blauen) LDS-Anteil. Das maximale Gewicht  $s_0^2/8$  besitzt die Diracline bei  $f = 0$ . Dagegen sind die Diraclinen bei  $\pm 2/T$  und Vielfachen davon nicht vorhanden bzw. besitzen jeweils das Gewicht 0, da hier auch der kontinuierliche LDS-Anteil Nullstellen besitzt.

## Blockweise und symbolweise Codierung

Bei der Übertragungscodierung unterscheidet man zwischen zwei Arten, der symbolweisen und der blockweisen Codierung. Bei **symbolweiser Codierung**, die im **Kapitel 2.4** im Detail beschrieben ist, wird mit jedem ankommenden Quellensymbol  $q_v$  ein Codesymbol  $c_v$  erzeugt, das außer vom aktuellen Symbol  $q_v$  auch von vorangegangenen Symbolen abhängen kann.

Typisch für alle ÜbertragungsCodes zur symbolweisen Codierung ist, dass die Bitdauer  $T_q$  der als binär und redundanzfrei angenommenen Nachrichtenquelle mit der Symboldauer  $T_c$  des meist mehrstufigen und redundanten Codersignals  $c(t)$  übereinstimmt.

Dagegen wird bei der **blockweisen Codierung** jeweils einem Block von  $m_q$  binären Quellensymbolen ( $M_q = 2$ ) der Bitdauer  $T_q$  eine ein-eindeutige Sequenz von  $m_c$  Codesymbolen aus einem Alphabet mit dem Codesymbolumfang  $M_c \geq 2$  zugeordnet. Für die **Symboldauer** eines Codesymbols gilt dann

$$T_c = \frac{m_q}{m_c} \cdot T_q,$$

und die **relative Redundanz** eines Blockcodes beträgt allgemein

$$r_c = 1 - \frac{R_q}{R_c} = 1 - \frac{T_c}{T_q} \cdot \frac{\log_2(M_q)}{\log_2(M_c)} = 1 - \frac{T_c}{T_q \cdot \log_2(M_c)}.$$

Genauere Angaben zu den Blockcodes finden Sie im **Kapitel 2.3**.

**Beispiel:** Bei den Pseudoternärcodes wird durch die Erhöhung der Stufenzahl von  $M_q = 2$  auf  $M_c = 3$  bei gleicher Symboldauer ( $T_c = T_q$ ) eine relative Redundanz von  $1 - 1/\log_2(3) \approx 37\%$  hinzugefügt. Im Gegensatz dazu arbeiten die so genannten 4B3T-Codes auf Blockebene mit den Codeparametern  $m_q = 4$ ,  $M_q = 2$ ,  $m_c = 3$ ,  $M_c = 3$  und besitzen eine relative Redundanz von ca. 16%. Das Sendesignal ist hier wegen  $T_c/T_q = 4/3$  niederfrequenter als bei uncodierter Übertragung, was die oft teure Bandbreite verringert und zudem für viele Nachrichtenkanäle auch aus übertragungstechnischer Sicht von Vorteil ist.

## Redundanzfreies Ternär- und Quaternärsignal (1)

Ein Sonderfall eines Blockcodes ist die **redundanzfreie Codierung**. Ausgehend vom redundanzfreien binären Quellensignal  $q(t)$  mit Bitdauer  $T_q$  wird ein  $M_c$ -stufiges Codersignal  $c(t)$  generiert, wobei die Symboldauer  $T_c = T_q \cdot \log_2(M_c)$  beträgt. Somit ergibt sich für die relative Redundanz:

$$r_c = 1 - \frac{T_c}{T_q \cdot \log_2(M_c)} = 1 - \frac{m_q}{m_c \cdot \log_2(M_c)} = 0.$$

Dabei gilt:

- Ist  $M_c$  eine Potenz zur Basis 2, so werden  $m_q = \log_2(M_c)$  zu einem einzigen Codesymbol ( $m_c = 1$ ) zusammengefasst.
- Ist  $M_c$  keine Zweierpotenz, so ist eine hundertprozentig redundanzfreie Blockcodierung nicht möglich. Codiert man beispielweise  $m_q = 3$  Binärsymbole durch  $m_c = 2$  Ternärsymbole und setzt  $T_c = 1.5 \cdot T_q$ , so verbleibt eine relative Redundanz von  $1 - 1.5/\log_2(3) \approx 5\%$ .
- Codiert man einen Block von 128 Binärsymbolen mit 81 Ternärsymbolen, so ergibt sich eine relative Coderedundanz von weniger als 0.3%.

Zur Vereinfachung der Schreibweise und zur Nomenklaturanpassung an das Kapitel 1 verwenden wir im Folgenden die Bitdauer  $T_B = T_q$  des redundanzfreien binären Quellensignals, die Symboldauer  $T = T_c$  von Codersignal und Sendesignal sowie die Stufenzahl  $M = M_c$ .

Damit ergibt sich für das Sendesignal die identische Form wie bei der Binärübertragung, jedoch mit anderen Amplitudenkoeffizienten:

$$s(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_s(t - \nu \cdot T) \quad \text{mit} \quad a_\nu \in \{a_1, \dots, a_\mu, \dots, a_M\}.$$

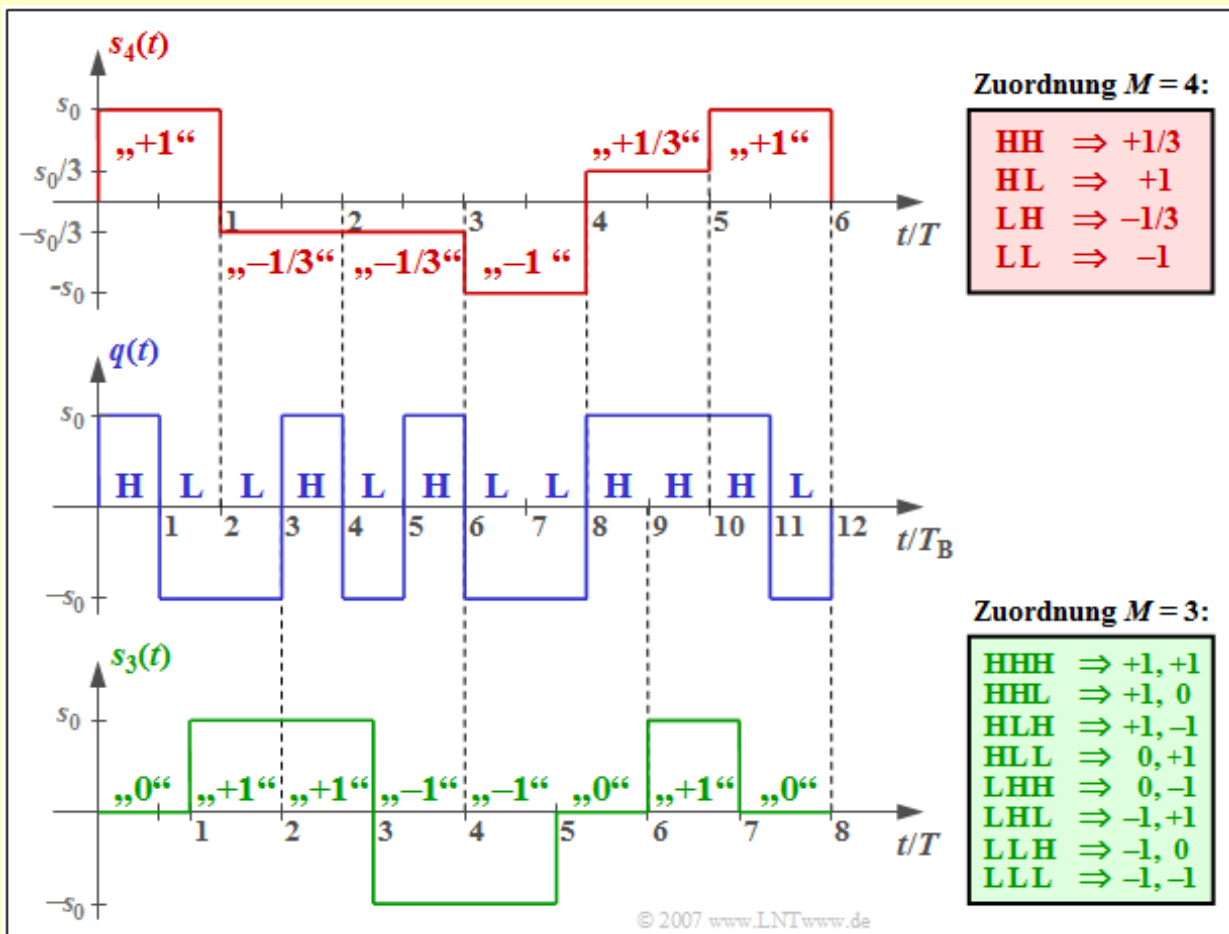
Die Amplitudenkoeffizienten  $a_\nu$  können prinzipiell beliebig – aber eindeutig – den Codesymbolen  $c_\nu$  zugeordnet werden. Es ist zweckmäßig, die Abstände zwischen benachbarten Amplituden gleich groß zu wählen. Bei bipolarer Signalisierung ( $-1 \leq a_\mu \leq +1$ ) gilt somit für die möglichen Amplitudenkoeffizienten mit dem Laufindex  $\mu = 1, \dots, M$ :

$$a_\mu = \frac{2\mu - M - 1}{M - 1}.$$

Unabhängig von der Stufenzahl  $M$  erhält man hieraus für die äußeren Amplitudenkoeffizienten  $a_1 = -1$  und  $a_M = +1$ . Bei einem ternären Signal ( $M = 3$ ) sind die möglichen Amplitudenkoeffizienten  $-1, 0$  und  $+1$ , während bei einem Quaternärsignal ( $M = 4$ ) folgende Koeffizienten auftreten:  $-1, -1/3, +1/3, +1$ .

## Redundanzfreies Ternär- und Quaternärsignal (2)

**Beispiel:** Die Grafik zeigt oben das quaternäre redundanzfreie Sendesignal  $s_4(t)$  mit den möglichen Amplitudenkoeffizienten  $\pm 1$  und  $\pm 1/3$ , das sich aus dem in der Mitte dargestellten binären Quellsignal  $q(t)$  ergibt. Jeweils zwei Binärsymbole werden nach der rot hinterlegten Tabelle zu einem quaternären Amplitudenkoeffizienten zusammengefasst. Die Symboldauer  $T$  des Signals  $s_4(t)$  ist doppelt so groß wie die Bitdauer  $T_B$  (vorher:  $T_q$ ) des Quellsignals. Ist  $q(t)$  redundanzfrei, so ergibt sich auch ein redundanzfreies Quaternärsignal, das heißt, die möglichen Amplitudenkoeffizienten  $\pm 1$  und  $\pm 1/3$  sind gleichwahrscheinlich und innerhalb der Folge  $\langle a_v \rangle$  gibt es keine statistischen Bindungen.



Die untere Darstellung zeigt das (nahezu) redundanzfreie Ternärsignal  $s_3(t)$  und die Zuordnung von jeweils drei Binärsymbolen zu zwei Ternärsymbolen. Die möglichen Amplitudenkoeffizienten sind  $-1, 0$  und  $+1$  und es gilt  $T/T_B = 3/2$ . Man erkennt aus der angegebenen Zuordnungstabelle, dass die Amplitudenkoeffizienten  $+1$  und  $-1$  etwas häufiger auftreten als der Amplitudenkoeffizient  $a_v = 0$ . Hieraus ergibt sich die Redundanz von 5% (siehe letzte Seite). Aus dem sehr kurzen Signalausschnitt – nur acht Ternärsymbole entsprechend zwölf Bit – ist diese Eigenschaft allerdings nicht zu erkennen.

## AKF und LDS eines Mehrstufensignals

Bei einem redundanzfrei codierten  $M$ -stufigen bipolaren Digitalsignal  $s(t)$  gilt für die **diskrete AKF** der Amplitudenkoeffizienten sowie für die entsprechende **spektrale Leistungsdichte**:

$$\varphi_a(\lambda) = \begin{cases} \frac{M+1}{3 \cdot (M-1)} & \text{für } \lambda = 0, \\ 0 & \text{für } \lambda \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \Phi_a(f) = \frac{M+1}{3 \cdot (M-1)} = \text{const.}$$

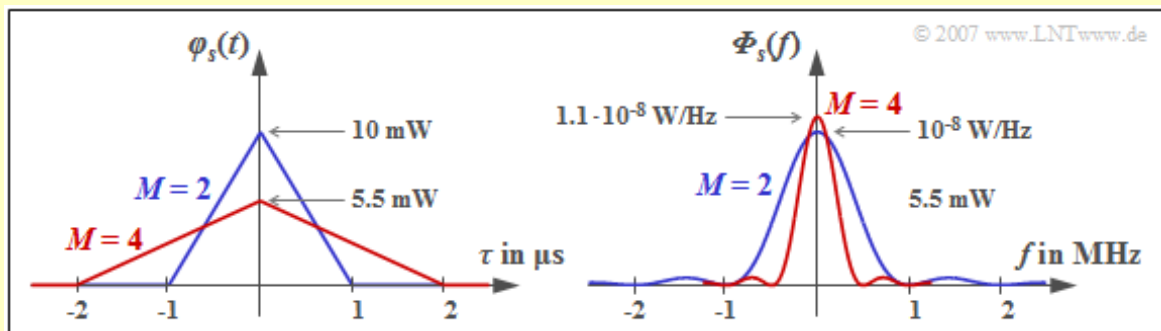
Unter Berücksichtigung der spektralen Formung durch den Sendegrundimpuls  $g_s(t)$  erhält man:

$$\varphi_s(\tau) = \frac{M+1}{3 \cdot (M-1)} \cdot \varphi_{g_s}(\tau) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \Phi_s(f) = \frac{M+1}{3 \cdot (M-1)} \cdot |G_s(f)|^2.$$

Man erkennt aus diesen Gleichungen:

- Bei redundanzfreier mehrstufiger Codierung wird die Form von AKF und LDS allein durch den Sendegrundimpuls  $g_s(t)$  bestimmt.
- Die Höhe von AKF und LDS ist bei gleicher Form gegenüber dem redundanzfreien Binärsignal um den Faktor  $\varphi_a(\lambda = 0) = E[a_v^2] = (M+1)/(3M-3)$  geringer.
- Dieser Faktor beschreibt die geringere Signalleistung des Mehrstufensignals aufgrund der  $M-2$  inneren Amplitudenkoeffizienten. Bei  $M=3$  ist dieser Faktor gleich  $2/3$ , bei  $M=4$  gleich  $5/9$ .
- Ein fairer Vergleich zwischen Binärsignal und Mehrstufensignal bei gleichem Informationsfluss (äquivalente Bitrate) sollte aber auch die unterschiedlichen Symbolauern berücksichtigen.
- Dabei zeigt sich, dass ein Mehrstufensignal aufgrund des schmaleren LDS weniger Bandbreite benötigt als das Binärsignal, wenn die gleiche Information übertragen wird.

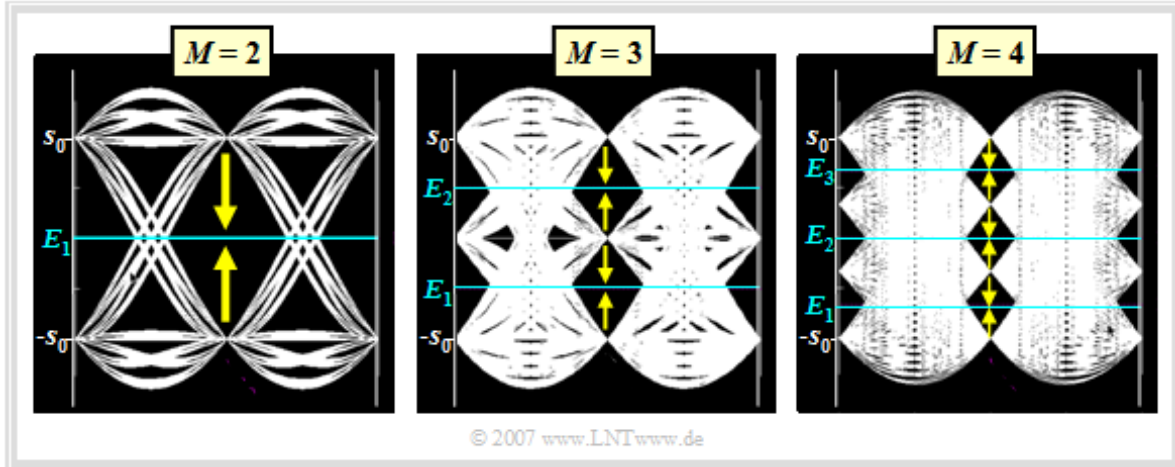
**Beispiel:** Wir gehen von einer binären Quelle mit der Bitrate  $R_B = 1$  Mbit/s aus, so dass die Bitdauer  $T_B = 1 \mu\text{s}$  beträgt. Bei Binärübertragung ( $M=2$ ) ist die Symboldauer  $T$  des Sendesignals gleich  $T_B$  und es ergibt sich bei NRZ-Rechteckimpulsen die blau eingezeichnete AKF in der linken Grafik (vorausgesetzt ist  $s_0^2 = 10$  mW). Beim Quaternärsystem ( $M=4$ ) ist die AKF ebenfalls dreieckförmig, aber um den Faktor  $5/9$  niedriger und wegen  $T = 2 T_B$  doppelt so breit.



Das  $\text{si}^2$ -förmige Leistungsdichtespektrum hat im binären Fall bei den hier gewählten Signalparametern den Maximalwert  $10^{-8}$  W/Hz und die erste Nullstelle liegt bei  $f = 1$  MHz. Demgegenüber ist das LDS des Quaternärsignals nur halb so breit und auch nur geringfügig höher (Faktor  $2 \cdot 5/9 \approx 1.11$ ).

## Fehlerwahrscheinlichkeit eines Mehrstuflensystems (1)

Nachfolgend sehen Sie die Augendiagramme eines binären ( $M = 2$ ), eines ternären ( $M = 3$ ) und eines quaternären ( $M = 4$ ) Übertragungssystems. Hierbei ist für das Gesamtsystem  $H_S(f) \cdot H_E(f)$  von Sender und Empfänger eine Cosinus-Rolloff-Charakteristik mit dem Rolloff-Faktor  $r = 0.5$  vorausgesetzt, so dass Impulsinterferenzen keine Rolle spielen. Das Rauschen wird als vernachlässigbar klein angenommen.



Das Augendiagramm wird vorwiegend zur Abschätzung von Impulsinterferenzen genutzt. Eine genaue Beschreibung folgt in **Kapitel 3.2**. Der folgende Text ist aber auch ohne Detailkenntnisse verständlich.

Man erkennt aus obigen Darstellungen:

- Beim Binärsystem ( $M = 2$ ) gibt es nur eine einzige Entscheidungsschwelle:  $E_1 = 0$ . Zu einem Übertragungsfehler kommt es, wenn die Rauschkomponente  $d_N(T_D)$  zum Detektionszeitpunkt größer ist als  $+s_0$  (falls  $d_S(T_D) = -s_0$ ) bzw. wenn  $d_N(T_D)$  kleiner ist als  $-s_0$ , falls  $d_S(T_D) = +s_0$  gilt.
- Beim Ternärsystem ( $M = 3$ ) erkennt man zwei Augenöffnungen und zwei Entscheidungsschwellen  $E_1 = -s_0/2$  und  $E_2 = +s_0/2$ . Der Abstand der möglichen Detektionsnutzsignalwerte  $d_S(T_D)$  zu der nächstgelegenen Schwelle beträgt jeweils  $s_0/2$ . Die äußeren Amplitudenwerte ( $\pm s_0$ ) können nur in jeweils eine Richtung verfälscht werden, während  $d_S(T_D) = 0$  von zwei Schwellen begrenzt wird.
- Dementsprechend wird ein Amplitudenkoeffizient  $a_v = 0$  gegenüber  $a_v = +1$  bzw.  $a_v = -1$  doppelt so oft verfälscht. Bei gleichwahrscheinlichen Amplitudenkoeffizienten sowie AWGN-Rauschen mit dem Effektivwert  $\sigma_d$  ergibt sich gemäß **Kapitel 1.2** für die **Symbolfehlerwahrscheinlichkeit**:

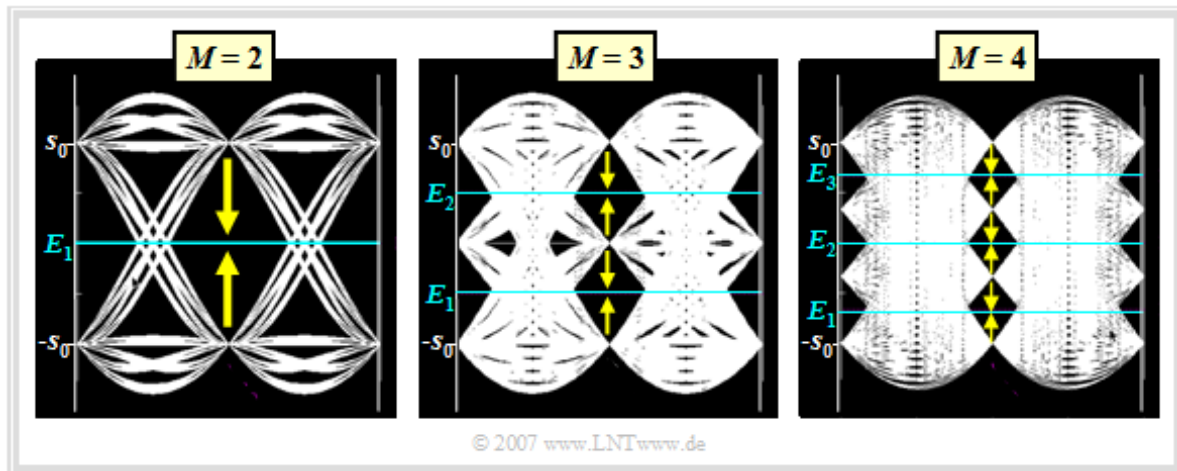
$$p_S = 1/3 \cdot \left[ Q\left(\frac{s_0/2}{\sigma_d}\right) + 2 \cdot Q\left(\frac{s_0/2}{\sigma_d}\right) + Q\left(\frac{s_0/2}{\sigma_d}\right) \right] = \frac{4}{3} \cdot Q\left(\frac{s_0/2}{\sigma_d}\right).$$

Die Bildbeschreibung wird auf der nächsten Seite fortgesetzt. Beachten Sie aber bereits hier, dass mit dieser Gleichung nicht mehr die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$ , sondern die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $p_S$  angegeben wird. Die entsprechenden A posteriori-Kenngrößen sind *Bit Error Rate* (BER) bzw. *Symbol Error Rate* (SER). Näheres hierzu auf der letzten Seite dieses Kapitels.



## Fehlerwahrscheinlichkeit eines Mehrstuflensystems (2)

Es folgt die Fortsetzung der Bildbeschreibung der letzten Seite:



- Beim Quaternärsystem ( $M = 4$ ) mit den möglichen Amplitudenwerten  $\pm s_0$  und  $\pm s_0/3$  gibt es drei Augenöffnungen und entsprechend auch drei Entscheidungsschwellen bei  $E_1 = -2s_0/3$ ,  $E_2 = 0$  und  $E_3 = +2s_0/3$ . Unter Berücksichtigung der Aufttrittswahrscheinlichkeiten (bei gleichwahrscheinlichen Symbolen jeweils  $1/4$ ) und der sechs Verfälschungsmöglichkeiten (siehe Pfeile in der Grafik) erhält man nun:

$$p_s = 6/4 \cdot Q\left(\frac{s_0/3}{\sigma_d}\right).$$

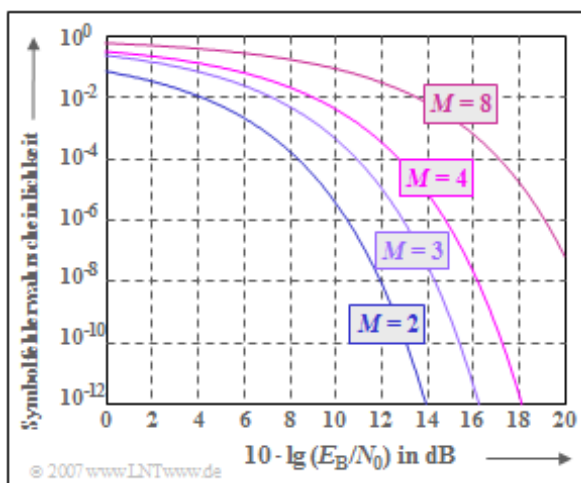
- Durch Erweiterung auf größere Werte von  $M$  ergibt sich allgemein:

$$\begin{aligned} p_s &= \frac{2 + 2 \cdot (M - 2)}{M} \cdot Q\left(\frac{s_0/(M - 1)}{\sigma_d}\right) = \\ &= \frac{2 \cdot (M - 1)}{M} \cdot Q\left(\frac{s_0}{\sigma_d(M) \cdot (M - 1)}\right). \end{aligned}$$

Die Schreibweise  $\sigma_d(M)$  soll deutlich machen, dass der Effektivwert des Detektionsrauschsignals  $d_N(t)$  signifikant von der Stufenzahl  $M$  abhängt.

## Vergleich zwischen Binär- und Mehrstufigensystem (1)

Die Grafik zeigt die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $p_S$ , die sich mit  $M$ -stufiger redundanzfreier Codierung erreichen lässt. Als Abszisse ist das Verhältnis  $E_B/N_0$  logarithmisch aufgetragen.



Für diesen Systemvergleich unter fairen Bedingungen werden vorausgesetzt:

- Die äquivalente Bitrate  $R_B = 1/T_B$  sei konstant. Abhängig von der Stufenzahl  $M$  beträgt somit die Symboldauer von Codersignal und Sendesignal:

$$T = T_B \cdot \log_2(M).$$

- Die Nyquistbedingung wird durch eine Wurzel-Wurzel-Charakteristik mit Rolloff-Faktor  $r$  erfüllt. Es treten weiterhin keine Impulsinterferenzen auf. Für die Detektionsrauschleistung gilt:

$$\sigma_d^2 = \frac{N_0}{2T}.$$

- Der Vergleich der Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten  $p_S$  erfolgt unter der Nebenbedingung der Leistungsbegrenzung. Die Energie pro Bit beträgt bei  $M$ -stufiger Übertragung:

$$E_B = \frac{M + 1}{3 \cdot (M - 1)} \cdot s_0^2 \cdot T_B.$$

Setzt man diese Gleichungen in das allgemeine Ergebnis der letzten Seite ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} p_S &= \frac{2 \cdot (M - 1)}{M} \cdot Q \left( \sqrt{\frac{s_0^2 / (M - 1)^2}{\sigma_d^2}} \right) = \\ &= \frac{2 \cdot (M - 1)}{M} \cdot Q \left( \sqrt{\frac{3 \cdot \log_2(M)}{M^2 - 1} \cdot \frac{2 \cdot E_B}{N_0}} \right) = K_1 \cdot Q \left( \sqrt{K_2 \cdot \frac{2 \cdot E_B}{N_0}} \right). \end{aligned}$$

Für  $M = 2$  ist  $K_1 = K_2 = 1$  zu setzen. Für größere Stufenzahlen erhält man:

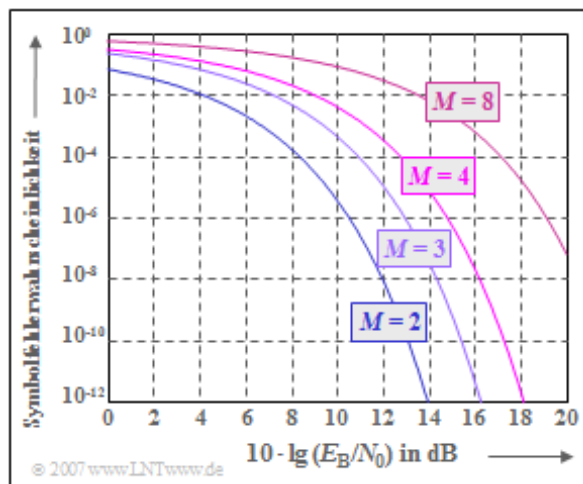
$M = 3: K_1 = 1.333, K_2 = 0.594,$	$M = 4: K_1 = 1.500, K_2 = 0.400,$
$M = 5: K_1 = 1.600, K_2 = 0.290,$	$M = 6: K_1 = 1.666, K_2 = 0.221,$
$M = 7: K_1 = 1.714, K_2 = 0.175,$	$M = 8: K_1 = 1.750, K_2 = 0.143.$

Die Beschreibung und Interpretation der obigen Grafik erfolgt auf der nächsten Seite.

## Vergleich zwischen Binär- und Mehrstufigensystem (2)

**Die Bildbeschreibung wird fortgesetzt:**

Die Grafik zeigt die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $p_S$  in Abhängigkeit des Quotienten  $E_B/N_0$  in dB, gültig für redundanzfreie  $M$ -stufige Digitalssysteme. Alle Systeme sind für die jeweilige Stufenzahl optimal, wenn vom AWGN-Kanal und Leistungsbegrenzung ausgegangen wird.



Die Kurvenverläufe kann man wie folgt interpretieren:

- Aufgrund der hier gewählten doppelt-logarithmischen Darstellung führt ein  $K_2$ -Wert kleiner als 1 zu einer Parallelverschiebung der Fehlerwahrscheinlichkeitskurve nach rechts. Gilt  $K_1 > 1$ , so verschiebt sich die Kurve gegenüber dem Binärsystem ( $K_1 = 1$ ) nach oben.
- Hinsichtlich Fehlerwahrscheinlichkeit ist das Binärsystem den Mehrstufigensystemen überlegen. Für  $M = 2$  und  $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 12$  dB ist  $p_S$  bereits kleiner als  $10^{-8}$ . Beim Quaternärsystem ( $M = 4$ ) muss für die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit  $10 \cdot \lg E_B/N_0$  etwas mehr als 16 dB betragen.
- Diese Aussage gilt jedoch nur bei verzerrungsfreiem Kanal, das heißt  $H_K(f) = 1$ . Bei verzerrenden Übertragungskanälen kann dagegen ein höherstufiges System wegen der signifikant kleineren Detektionsstörleistung (nach dem Entzerrer) eine deutliche Verbesserung bringen.
- Beim AWGN-Kanal ist der einzige Vorteil einer höherstufigen Übertragung der niedrigere Bandbreitenbedarf aufgrund der kleineren äquivalenten Bitrate, der bei Basisbandübertragung nur eine untergeordnete Rolle spielt im Gegensatz zu den Trägerfrequenzsystemen gemäß **Kapitel 1.5**.
- Mit der Nebenbedingung „Spitzenwertbegrenzung“ führt die Kombination aus rechteckförmigem  $g_s(t)$  und rechteckförmigem  $h_E(t)$  unabhängig von der Stufenzahl zum Optimum.
- Der Verlust der Mehrstufigensystemen gegenüber dem Binärsystem ist hier noch größer als bei Leistungsbegrenzung. Dies erkennt man an dem mit  $M$  abnehmenden Faktor  $K_2$ , für den dann gilt:

$$p_S = K_1 \cdot Q \left( \sqrt{K_2 \cdot \frac{2 \cdot s_0^2 \cdot T}{N_0}} \right) \quad \text{mit} \quad K_2 = \frac{\log_2(M)}{(M-1)^2}.$$

Die Konstante  $K_1$  ist gegenüber der letzten Seite (Leistungsbegrenzung) unverändert, während  $K_2$  um den Faktor 3 kleiner ist:

$M = 3: K_1 = 1.333, K_2 = 0.198,$	$M = 4: K_1 = 1.500, K_2 = 0.133,$
$M = 5: K_1 = 1.600, K_2 = 0.097,$	$M = 6: K_1 = 1.666, K_2 = 0.074,$
$M = 7: K_1 = 1.714, K_2 = 0.058,$	$M = 8: K_1 = 1.750, K_2 = 0.048.$

## Symbol- und Bitfehlerwahrscheinlichkeit (1)

Bei einem mehrstufigen Übertragungssystem muss zwischen der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit und der Bitfehlerwahrscheinlichkeit unterschieden werden:

- Die **Symbolfehlerwahrscheinlichkeit** bezieht sich auf die  $M$ -stufigen und eventuell redundanten Folgen  $\langle c_\nu \rangle$  und  $\langle w_\nu \rangle$ :

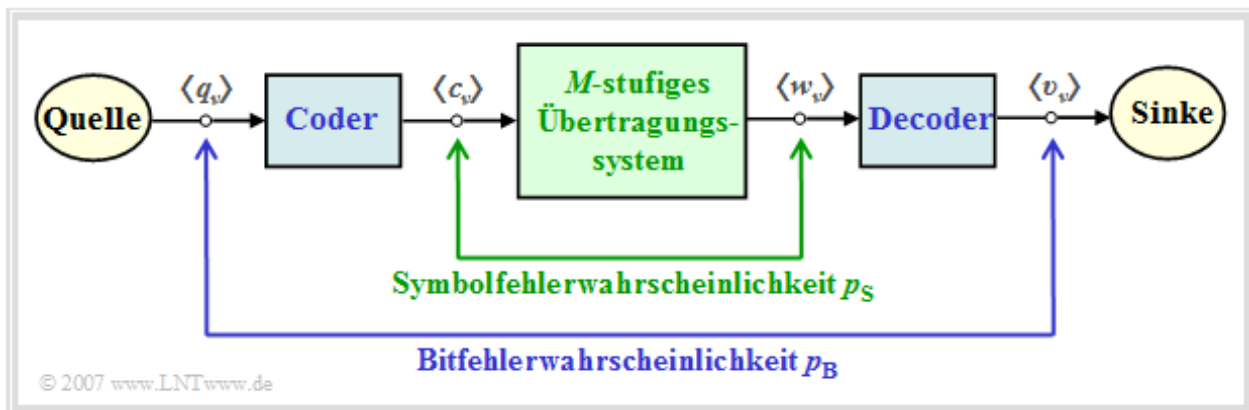
$$p_S = \overline{\Pr(w_\nu \neq c_\nu)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^N \Pr(w_\nu \neq c_\nu).$$

- Im Gegensatz dazu beschreibt die **Bitfehlerwahrscheinlichkeit** die Verfälschungen bezüglich der Binärfolgen  $\langle q_\nu \rangle$  und  $\langle v_\nu \rangle$ , also hinsichtlich Quellen- und Sinkensignal:

$$p_B = \overline{\Pr(v_\nu \neq q_\nu)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{\nu=1}^N \Pr(v_\nu \neq q_\nu).$$

Beide Wahrscheinlichkeiten sind hier als Zeitmittelwerte angegeben.

Die folgende Grafik veranschaulicht diese beiden Definitionen und ist auch für die nachfolgenden Abschnitte gültig. Während im Kapitel 2.2 der Block „Coder“ eine redundanzfreie Codierung bewirkt, wird im **Kapitel 2.3** eine blockweise Übertragungscodierung betrachtet, während im **Kapitel 2.4** die symbolweisen Pseudoternärcodes behandelt werden. In beiden Fällen unterscheiden sich  $p_B$  und  $p_S$ . Nur beim redundanzfreien Binärsystem entsprechend Kapitel 1 sind  $p_B$  und  $p_S$  identisch.

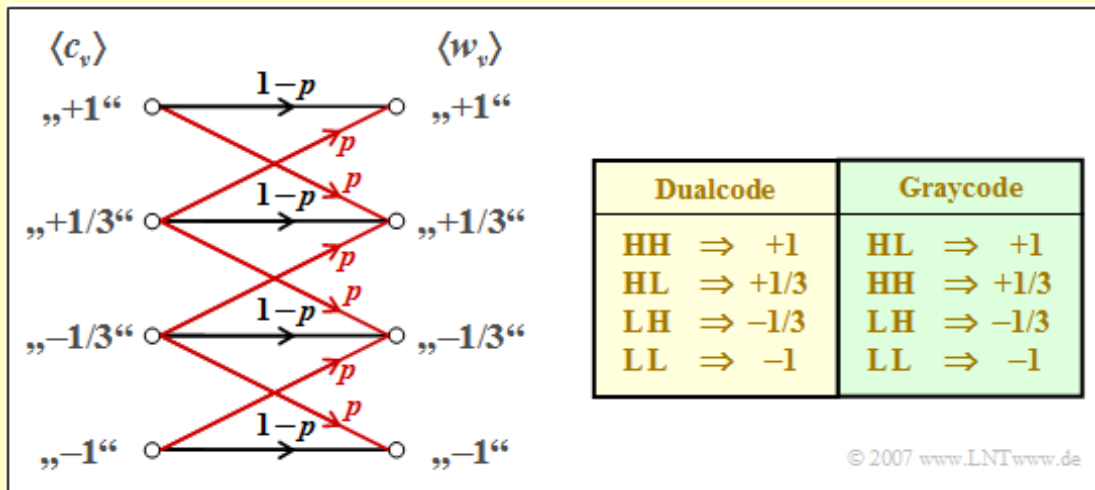


Im allgemeinen kann bei redundanzbehafteten Mehrstufigensystem die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $p_S$  etwas einfacher berechnet werden als die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$ . Ein Vergleich von Systemen mit unterschiedlicher Stufenzahl oder verschiedenartiger Codierung sollte aber aus Fairnisgründen immer auf der Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $p_B$  basieren. Dabei muss auch die Zuordnung zwischen den Quellen- und Codesymbolen berücksichtigt werden, wie auf der nächsten Seite gezeigt wird.

## Symbol- und Bitfehlerwahrscheinlichkeit (2)

**Beispiel:** Wir betrachten ein quaternäres Übertragungssystem, dessen Übertragungsverhalten wie folgt charakterisiert werden kann (siehe linke Grafik):

- Die Verfälschungswahrscheinlichkeit zu einem benachbarten Symbol ist  $p = Q[s_0/(3\sigma_d)]$ .
- Die Verfälschung zu einem nicht benachbarten Symbol wird ausgeschlossen.
- Das Modell berücksichtigt die doppelten Verfälschungsmöglichkeiten der inneren Symbole.



Bei gleichwahrscheinlichen binären Quellensymbolen  $q_v$  treten auch die quaternären Codesymbole  $c_v$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Damit erhält man für die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit:

$$p_S = 1/4 \cdot (2 \cdot p + 2 \cdot 2 \cdot p) = 3/2 \cdot p.$$

Zur Berechnung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit muss zusätzlich die Zuordnung zwischen den Binär- und den Quaternärsymbolen berücksichtigt werden:

- Bei der **Dualcodierung** gemäß der gelb hinterlegten Tabelle kann ein Symbolfehler ( $w_v \neq c_v$ ) ein oder zwei Bitfehler ( $v_v \neq q_v$ ) zur Folge haben. Von den sechs Verfälschungsmöglichkeiten auf Quaternärsymbolebene führen vier zu jeweils einem und nur die beiden inneren zu zwei Bitfehlern. Daraus folgt:

$$p_B = 1/4 \cdot (4 \cdot 1 \cdot p + 2 \cdot 2 \cdot p) \cdot 1/2 = p.$$

Der Faktor 1/2 berücksichtigt, dass ein Quaternärsymbol zwei Binärsymbole beinhaltet.

- Dagegen ist bei der sog. **Graycodierung** gemäß der grün hinterlegten Tabelle die Zuordnung zwischen den Binärsymbolen und den Quaternärsymbolen so gewählt, dass jeder Symbolfehler genau einen Bitfehler zur Folge hat. Daraus folgt:

$$p_B = 1/4 \cdot (4 \cdot 1 \cdot p + 2 \cdot 1 \cdot p) \cdot 1/2 = 3/4 \cdot p.$$

## Allgemeine Beschreibung von Blockcodes

Bei **Blockcodierung** wird jeweils eine Sequenz von  $m_q$  binären Quellensymbolen ( $M_q = 2$ ) durch einen Block von  $m_c$  Codesymbolen mit dem Symbolumfang  $M_c$  dargestellt. Um eine jede Quellensymbolfolge in eine andere Codesymbolfolge umsetzen zu können, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$M_c^{m_c} \geq M_q^{m_q}.$$

Bei den redundanzfreien Codes entsprechend **Kapitel 2.2** gilt in dieser Gleichung das Gleichheitszeichen, wenn  $M_q$  eine Zweierpotenz ist. Mit dem Größerzeichen ergibt sich ein redundantes Digitalsignal, wobei die relative Coderedundanz wie folgt berechnet werden kann:

$$r_c = 1 - \frac{m_q \cdot \log_2(M_q)}{m_c \cdot \log_2(M_c)} > 0.$$

Der bekannteste Blockcode zur Übertragungscodierung ist der **4B3T-Code** mit den Codeparametern

$$m_q = 4, \quad M_q = 2, \quad m_c = 3, \quad M_c = 3,$$

der bereits in den 1970-er Jahren entwickelt wurde und beispielsweise bei **ISDN** (*Integrated Services Digital Networks*) eingesetzt wird. Ein 4B3T-Code besitzt folgende Eigenschaften:

- Wegen  $m_q \cdot T_B = m_c \cdot T$  ist die Symboldauer  $T$  des Codersignals um den Faktor  $4/3$  größer als die Bitdauer  $T_B$  des binären Quellensignals. Daraus ergibt sich die günstige Eigenschaft, dass der Bandbreitenbedarf um ein Viertel geringer ist als bei redundanzfreier Binärübertragung.
- Die relative Redundanz kann mit obiger Gleichung berechnet werden und ergibt sich zu ca. 16%. Diese Redundanz wird beim 4B3T-Code dazu verwendet, um Gleichsignalfreiheit zu erzielen. Das 4B3T-codierte Signal kann somit ohne merkbare Beeinträchtigung auch über einen Kanal mit der Eigenschaft  $H_K(f=0) = 0$  übertragen werden.

Die Umcodierung der 16 möglichen Binärblöcke in die entsprechenden Ternärblöcke könnte prinzipiell nach einer festen Codetabelle vorgenommen werden. Um die spektralen Eigenschaften dieser Codes weiter zu verbessern, werden bei den gebräuchlichen 4B3T-Codes, nämlich

- dem 4B3T-Code nach Jessop und Waters,
- dem MS43-Code (von: **M**onitored **S**um **4B3T**-Code),
- dem FoMoT-Code (von: **F**our **M**ode **T**ernary),

zwei oder mehrere Codetabellen verwendet, deren Auswahl von der *laufenden digitalen Summe* der Amplitudenkoeffizienten gesteuert wird. Das Prinzip wird auf der nächsten Seite erklärt.

## Laufende digitale Summe

Nach der Übertragung von  $l$  codierten Blöcken gilt für die **laufende digitalen Summe** mit den ternären Amplitudenkoeffizienten  $a_\nu \in \{-1, 0, +1\}$ :

$$\Sigma_l = \sum_{\nu=1}^{3 \cdot l} a_\nu.$$

Die Auswahl der Tabelle zur Codierung des  $(l + 1)$ -ten Blocks erfolgt abhängig vom aktuellen Wert  $\Sigma_l$ .

Binärwort	Jessop/Waters		MS43-Code			FoMot-Code			
	laufende digitale Summe $\Sigma_l =$		laufende digitale Summe $\Sigma_l =$			laufende digitale Summe $\Sigma_l =$			
	0; 1; 2	3; 4; 5	0	1; 2	3	0	1	2	3
LLLL	+ 0 -	+ 0 -	- + 0	- + 0	- + 0	0 + -	0 + -	0 + -	0 + -
LLLH	- + 0	- + 0	+ - 0	+ - 0	+ - 0	0 - +	0 - +	0 - +	0 - +
LLHL	0 - +	0 - +	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 -	- 0 +	- 0 +	- 0 +	- 0 +
LLHH	+ - 0	+ - 0	0 + -	0 + -	0 + -	- + 0	- + 0	- + 0	- + 0
LHLL	+ + 0	- - 0	+ + 0	0 0 -	0 0 -	0 + 0	0 - 0	0 + 0	0 - 0
LHLH	0 + +	0 - -	+ 0 +	0 - 0	0 - 0	0 0 +	- - +	0 0 +	- - +
LHHL	+ 0 +	- 0 -	- 0 +	- 0 0	- 0 0	+ + -	0 0 -	+ + -	0 0 -
LHHH	+ + +	- - -	+ + +	- + -	- + -	+ + +	- + -	- + -	- + -
HLLL	+ + -	- - +	+ - +	+ - +	- - -	0 + +	0 + +	- - 0	- - 0
HLLH	- + +	+ - -	0 0 +	0 0 +	- - 0	+ 0 +	+ 0 +	- 0 -	- 0 -
HLHL	+ - +	- + -	0 + 0	0 + 0	- 0 -	+ + 0	+ + 0	0 - -	0 - -
HLHH	+ 0 0	- 0 0	+ 0 0	+ 0 0	0 - -	+ - +	+ - +	+ - +	- - -
HHLL	0 + 0	0 - 0	- + +	- + +	- - +	- + +	- 0 0	- + +	- 0 0
HHLH	0 0 +	0 0 -	+ + -	+ - -	+ - -	+ 0 0	+ - -	+ 0 0	+ - -
HHHL	0 + -	0 + -	0 - +	0 - +	0 - +	+ - 0	+ - 0	+ - 0	+ - 0
HHHH	- 0 +	- 0 +	- 0 +	- 0 +	- 0 +	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 -	+ 0 -

© 2007 www.LNTwww.de

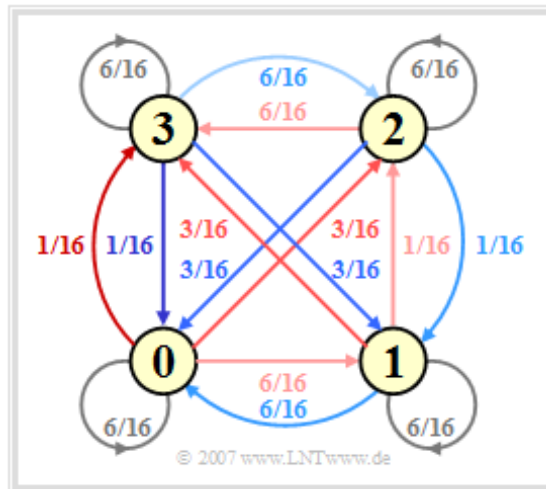
In obiger Tabelle sind die Codierregeln für die drei oben genannten 4B3T-Codes angegeben. Zur Vereinfachung der Schreibweise steht „+“ für den Amplitudenkoeffizienten „+1“ und „-“ für den Koeffizienten „-1“. Die Beschreibung folgt auf der nächsten Seite.

Die zwei Codetabellen des Jessop-Waters-Codes sind so gewählt, dass die laufende digitale Summe stets zwischen 0 und 5 liegt. Bei den beiden anderen Codes erreicht man durch drei bzw. vier alternative Tabellen die Beschränkung der laufenden digitalen Summe auf den Wertebereich  $0 \leq \Sigma_l \leq 3$ .

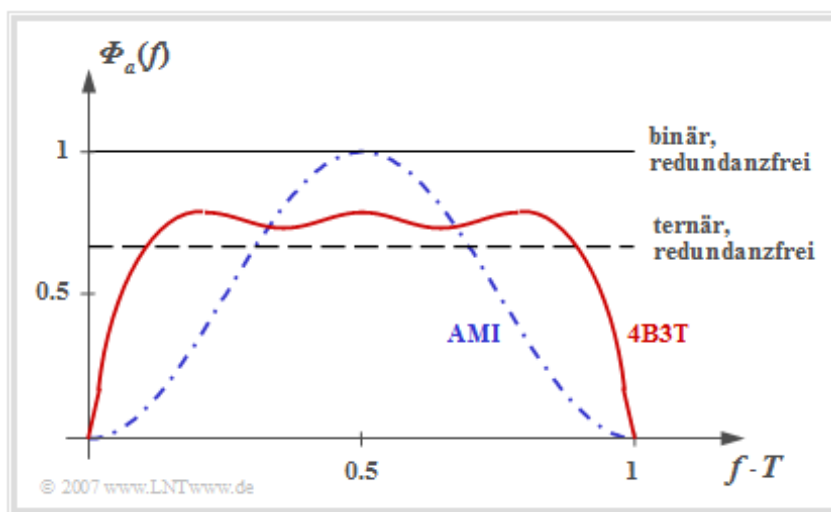
## AKF und LDS der 4B3T-Codes (1)

Die Vorgehensweise bei der Berechnung von AKF und LDS wird hier nur stichpunktartig skizziert:

- Der Übergang der laufenden digitalen Summe von  $\Sigma_l$  nach  $\Sigma_{l+1}$  wird durch eine homogene stationäre Markovkette erster Ordnung mit sechs (Jessop–Waters) bzw. vier Zuständen (MS43, FoMoT) beschrieben – siehe [ST85]. Für den FoMoT-Code gilt folgendes Markovdiagramm:



- Die Werte an den Pfeilen kennzeichnen die Übergangswahrscheinlichkeiten  $\Pr(\Sigma_{l+1} | \Sigma_l)$ , die sich aus den jeweiligen Codetabellen ergeben. Die Farben korrespondieren zu den Hinterlegungen der Tabelle auf der letzten Seite. Aufgrund der Symmetrie des FoMoT-Markovdiagramms sind die Wahrscheinlichkeiten  $\Pr(\Sigma_l = 0) = \dots = \Pr(\Sigma_l = 3)$  alle gleich, nämlich  $1/4$ .
- Die Autokorrelationsfunktion (AKF)  $\varphi_a(\lambda) = E[a_v \cdot a_{v+\lambda}]$  der Amplitudenkoeffizienten kann aus diesem Diagramm ermittelt werden. Einfacher als diese analytische Berechnung, die eines sehr großen Rechenaufwands bedarf, ist die simulative Bestimmung der AKF-Werte mittels Computer.
- Durch Fouriertransformation der AKF kommt man zum Leistungsdichtespektrum (LDS)  $\Phi_a(f)$  der Amplitudenkoeffizienten entsprechend der nachfolgendem Grafik aus [ST85].

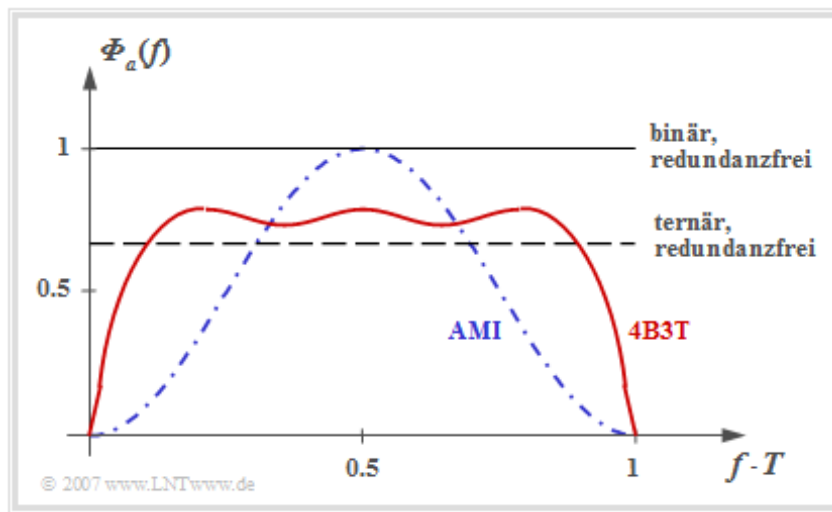


Die Bildbeschreibung folgt auf der nächsten Seite.



## AKF und LDS der 4B3T-Codes (2)

Durch Fouriertransformation der AKF  $\varphi_a(\lambda) = E[a_v \cdot a_{v+\lambda}]$  der Amplitudenkoeffizienten kommt man zum entsprechenden Leistungsdichtespektrum (LDS)  $\Phi_a(f)$  gemäß der folgenden Grafik aus [ST85]:



Die Aussagen der obigen Grafik lassen sich wie folgt zusammenfassen:

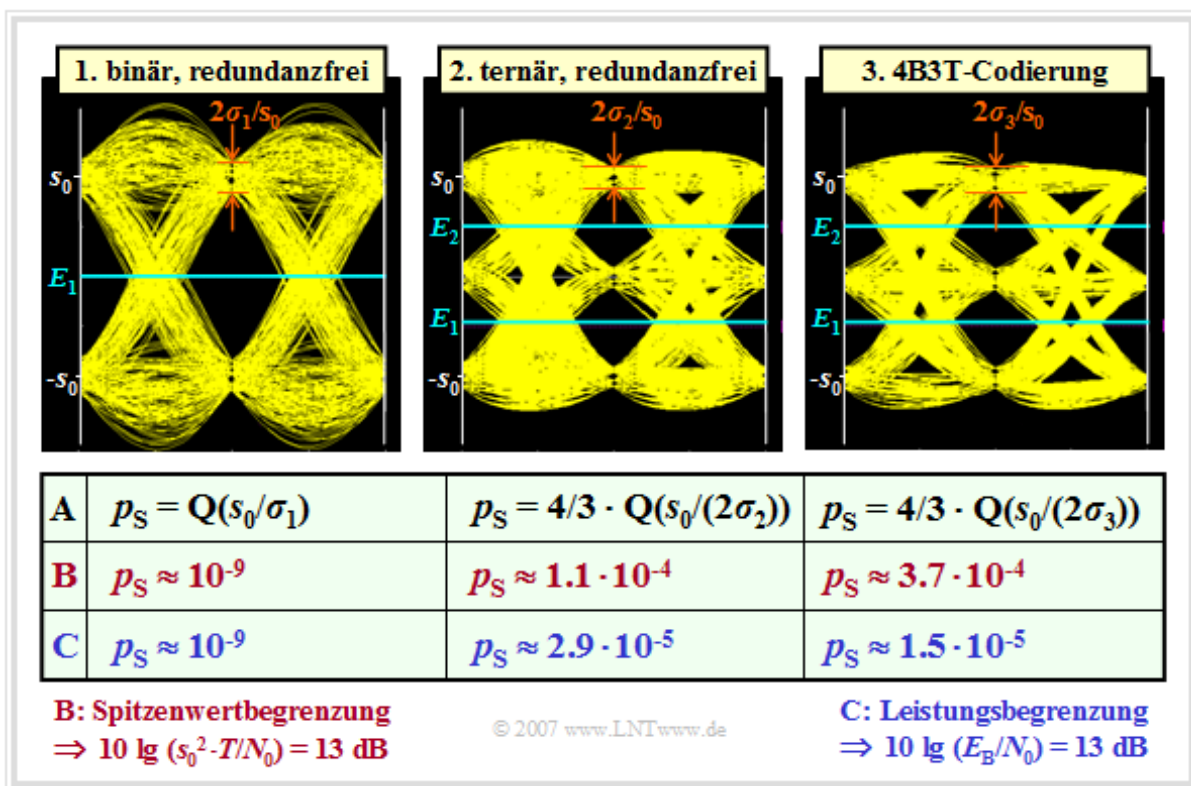
- Die Grafik zeigt das LDS  $\Phi_a(f)$  der Amplitudenkoeffizienten. Das LDS  $\Phi_s(f)$  unter Einbeziehung des Sendegrundimpulses erhält man durch Multiplikation mit  $1/T \cdot |G_s(f)|^2$ . Beispielsweise muss man  $\Phi_a(f)$  mit einer  $\text{si}^2$ -Funktion multiplizieren, wenn  $g_s(t)$  einen Rechteckimpuls beschreibt.
- Bei redundanzfreier Binär- oder Ternärcodierung ergibt sich jeweils ein konstantes  $\Phi_a(f)$ , dessen Höhe von der Stufenzahl  $M$  abhängt (unterschiedliche Signalleistung). Dagegen weist das 4B3T-Leistungsdichtespektrum (rote Kurve) Nullstellen bei  $f = 0$  und Vielfachen von  $f = 1/T$  auf.
- Die Nullstelle bei  $f = 0$  hat den Vorteil, dass das 4B3T-Signal ohne große Einbußen auch über einen so genannten **Telefonkanal** übertragen werden kann, der aufgrund von Übertragern für ein Gleichsignal nicht geeignet ist.
- Die Nullstelle bei  $f = 1/T$  hat den Nachteil, dass dadurch die Taktrückgewinnung am Empfänger erschwert wird. Außerhalb dieser Nullstellen weisen die 4B3T-Codes ein flacheres  $\Phi_a(f)$  als der in **Kapitel 2.4** beschriebene AMI-Code (blaue Kurve) auf, was von Vorteil ist.
- Der Grund für den flacheren LDS-Verlauf bei mittleren Frequenzen sowie den steileren Abfall zu den Nullstellen hin ist, dass bei den 4B3T-Codes bis zu fünf „+1“- bzw. „-1“-Koeffizienten aufeinanderfolgen können, während beim AMI-Code diese Symbole nur isoliert auftreten.
- Die Unterschiede der einzelnen 4B3T-Codes sind nicht sonderlich ausgeprägt. So gilt für den MS43-Code  $E[a_v^2] \approx 0.65$  und für die beiden anderen  $E[a_v^2] = 0.69$ . Das obige LDS wurde für den FoMoT-Code ermittelt, dessen Markovdiagramm auf der letzten Seite dargestellt wurde.

## Fehlerwahrscheinlichkeit der 4B3T-Codes (1)

Betrachten wir nun die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit bei Verwendung des 4B3T-Codes im Vergleich zu redundanzfreier Binär- und Ternärcodierung, wobei folgende Voraussetzungen gelten sollen:

- Der Systemvergleich erfolgt zunächst unter der Nebenbedingung der „Spitzenwertbegrenzung“. Deshalb verwenden wir den rechteckförmigen Sendegrundimpuls, der hierfür optimal ist.
- Der Gesamtfrequenzgang zeigt einen Cosinus-Rolloff mit bestmöglichem Rolloff-Faktor  $r = 0.8$ . Die Rauschleistung  $\sigma_d^2$  ist somit **um 12% größer** als beim Matched-Filter (globales Optimum).

Die Grafik zeigt die Augendiagramme (mit Rauschen) der drei zu vergleichenden Systeme und enthält die Gleichungen zur Fehlerwahrscheinlichkeitsberechnung. Jedes Diagramm enthält ca. 2000 Augenlinien.



Die beiden ersten Zeilen der Tabelle beschreiben den Systemvergleich bei Spitzenwertbegrenzung. Für das Binärsystem ergibt sich die Rauschleistung (unter Berücksichtigung der 12%-Erhöhung) zu

$$\sigma_d^2 = 1.12 \cdot N_0/(2 \cdot T) = 0.56 \cdot N_0/T = \sigma_1^2.$$

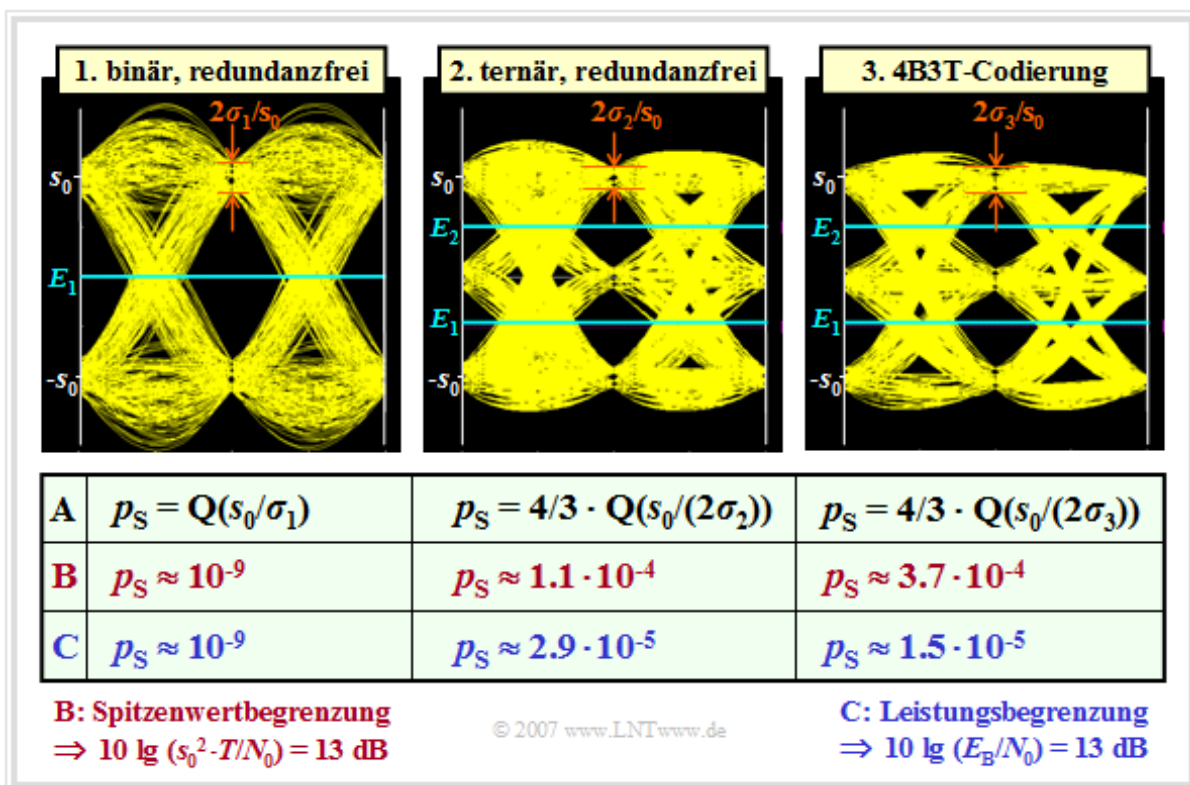
Für das Augendiagramm und die nachfolgenden Berechnungen ist jeweils ein „Störabstand“ von 13 dB zugrunde gelegt. Damit erhält man:

$$10 \cdot \lg s_0^2 \cdot T/N_0 = 13 \text{ dB} \Rightarrow s_0^2 \cdot T/N_0 = 10^{1.3} \approx 20$$

$$\Rightarrow \sigma_1^2 = 0.56 \cdot s_0^2/20 \approx 0.028 \cdot s_0^2 \Rightarrow \sigma_1/s_0 \approx 0.167.$$

In der Zeile „B“ ist die dazugehörige Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $p_S \approx Q(s_0/\sigma_1) \approx Q(6) = 10^{-9}$  angegeben. – Die Bildbeschreibung wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.

## Fehlerwahrscheinlichkeit der 4B3T-Codes (2)



Die beiden weiteren Augendiagramme lassen sich wie folgt interpretieren:

- Beim redundanzfreien Ternärsystem ist die Augenöffnung nur halb so groß wie beim Binärsystem und die Rauschleistung  $\sigma_2^2$  ist um den Faktor  $\log_2(3)$  kleiner als  $\sigma_1^2$ .
- Der Faktor  $4/3$  vor der Q-Funktion berücksichtigt, dass die ternäre „0“ in beiden Richtungen verfälscht werden kann. Damit ergeben sich folgende Zahlenwerte:

$$\frac{\sigma_2}{s_0} = \frac{\sigma_1/s_0}{\sqrt{\log_2(3)}} = \frac{0.167}{1.259} \approx 0.133 \Rightarrow p_S = \frac{4}{3} \cdot Q\left(\frac{0.5}{0.133}\right) \approx \frac{4}{3} \cdot Q(3.76) = 1.1 \cdot 10^{-4}.$$

- Der 4B3T-Code liefert noch etwas ungünstigere Ergebnisse, da hier bei gleicher Augenöffnung die Rauschleistung ( $\sigma_3^2$ ) weniger stark vermindert wird als beim redundanzfreien Ternärcode:

$$\frac{\sigma_3}{s_0} = \frac{\sigma_1/s_0}{\sqrt{4/3}} = \frac{0.167}{1.155} \approx 0.145 \Rightarrow p_S = \frac{4}{3} \cdot Q\left(\frac{0.5}{0.145}\right) \approx \frac{4}{3} \cdot Q(3.45) = 3.7 \cdot 10^{-4}.$$

- Die Fehlerwahrscheinlichkeiten bei Leistungsbegrenzung sind für  $E_B/N_0 = 13 \text{ dB}$  in der Zeile „C“ angegeben. Beim Binärsystem wird  $p_S$  gegenüber der Zeile „B“ nicht verändert.
- Für die beiden Ternär-codes gilt  $E[a_v^2] \approx 2/3$ . Deshalb kann hier die Amplitude um den Faktor „Wurzel aus  $3/2$ “  $\approx 1.225$  vergrößert werden und man erhält für den redundanzfreien Ternär-code mit  $p_S = 4/3 \cdot Q(1.225 \cdot 3.76) \approx 2.9 \cdot 10^{-5}$  eine signifikant kleinere Fehlerwahrscheinlichkeit als bei Spitzenwertbegrenzung (vgl. die Zeilen „B“ und „C“ in obiger Tabelle). Ähnliches gilt auch für den 4B3T-Code:  $p_S = 4/3 \cdot Q(1.225 \cdot 3.45) \approx 1.5 \cdot 10^{-5}$ .

## Allgemeine Beschreibung von Partial Response Codes (1)

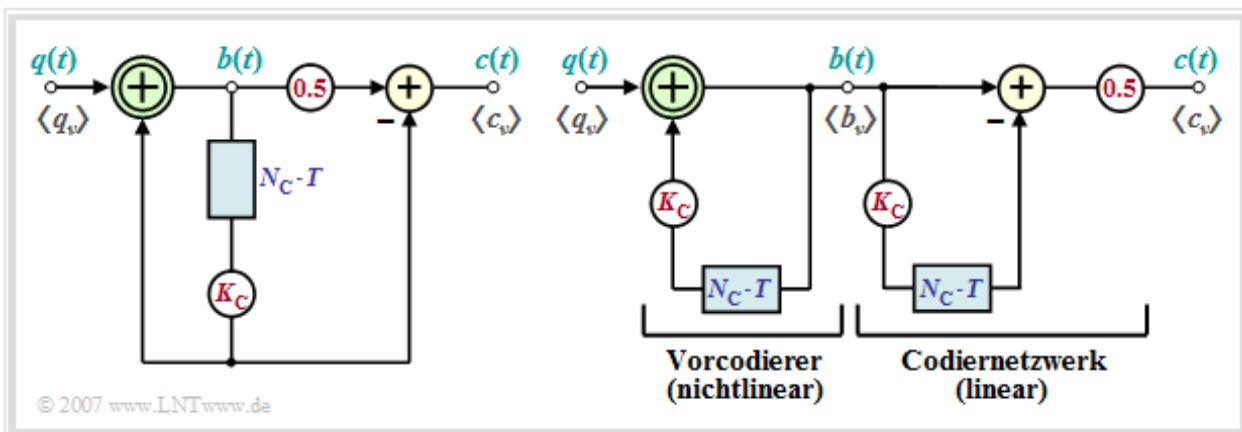
Bei der symbolweisen Codierung wird mit jedem ankommenden Quellensymbol  $q_v$  ein Codesymbol  $c_v$  erzeugt, das außer vom aktuellen Eingangssymbol  $q_v$  auch von den  $N_C$  vorangegangenen Symbolen abhängt.  $N_C$  bezeichnet man als die Ordnung des Codes.

Typisch für eine symbolweise Codierung ist, dass

- die Symboldauer  $T$  des Codersignals (und des Sendesignals) mit der Bitdauer  $T_B$  des binären Quellensignals übereinstimmt,
- Codierung und Decodierung nicht zu größeren Zeitverzögerungen führen, die bei Verwendung von Blockcodes unvermeidbar sind.

Besondere Bedeutung besitzen die Pseudomehrstufigencodes – besser bekannt unter der englischen Bezeichnung **Partial Response Codes**.

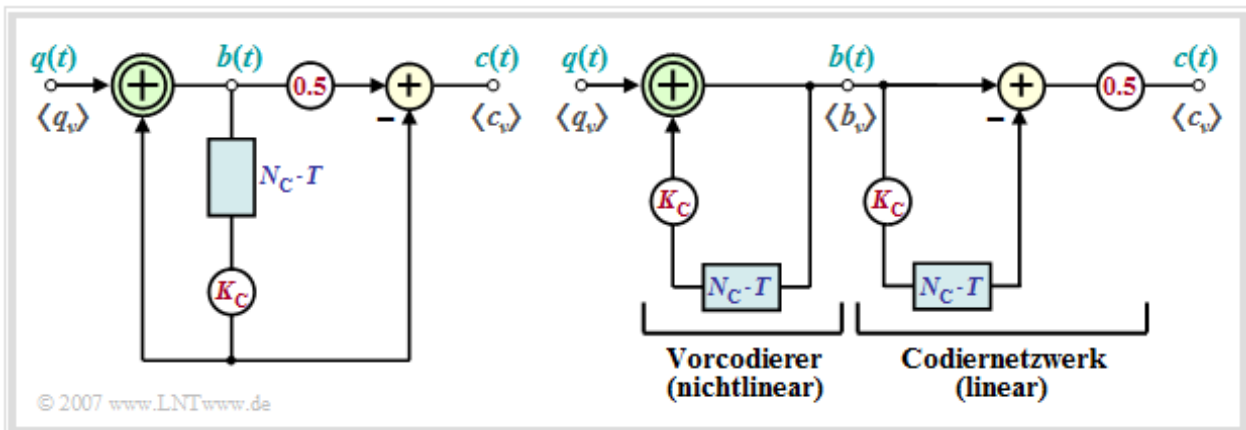
Im Folgenden werden ausschließlich die **Pseudoternär codes** mit der Stufenzahl  $M = 3$  betrachtet, die durch das Blockschaltbild entsprechend der linken Grafik beschreibbar sind. In der rechten Grafik ist ein Ersatzschaltbild angegeben, das für eine Analyse dieser Codes sehr gut geeignet ist.



Die Bildbeschreibung folgt auf der nächsten Seite.

## Allgemeine Beschreibung von Partial Response Codes (2)

Die Beschreibung des *Partial Response Coders* wird fortgesetzt:



Man erkennt aus den beiden Darstellungen (Blockschaltbild links, Ersatzschaltbild rechts):

- Der Pseudoternär coder kann in den nichtlinearen Vorcodierer und ein lineares Codiernetzwerk aufgespalten werden, wenn man die Verzögerung um  $N_C \cdot T$  und die Gewichtung mit  $K_C$  zur Verdeutlichung zweimal zeichnet.
- Der **nichtlineare Vorcodierer** gewinnt durch eine Modulo-2-Addition (Antivalenz) zwischen den Symbolen  $q_v$  und  $K_C \cdot b_{v-N_C}$  die vorcodierten Symbole  $b_v$ , die ebenfalls binär sind:

$$q_v \in \{-1, +1\}, K_C \in \{-1, +1\} \Rightarrow b_v \in \{-1, +1\}.$$

- Die Symbole  $b_v$  sind wie die Quellensymbole  $q_v$ , statistisch voneinander unabhängig. Durch den Vorcodierer wird also keine Redundanz hinzugefügt. Er gestattet aber eine einfache Realisierung des Decoders und verhindert eine Fehlerfortpflanzung nach einem Übertragungsfehler.
- Die eigentliche Umcodierung von binär auf ternär bewirkt das **lineare Codiernetzwerk** durch die herkömmliche Subtraktion

$$c(t) = 1/2 \cdot [b(t) - K_C \cdot b(t - N_C \cdot T)].$$

Dieses ternäre Signal (Stufenzahl  $M=3$ ) weist die normierten Werte  $a_v \in \{-1, 0, +1\}$  auf.

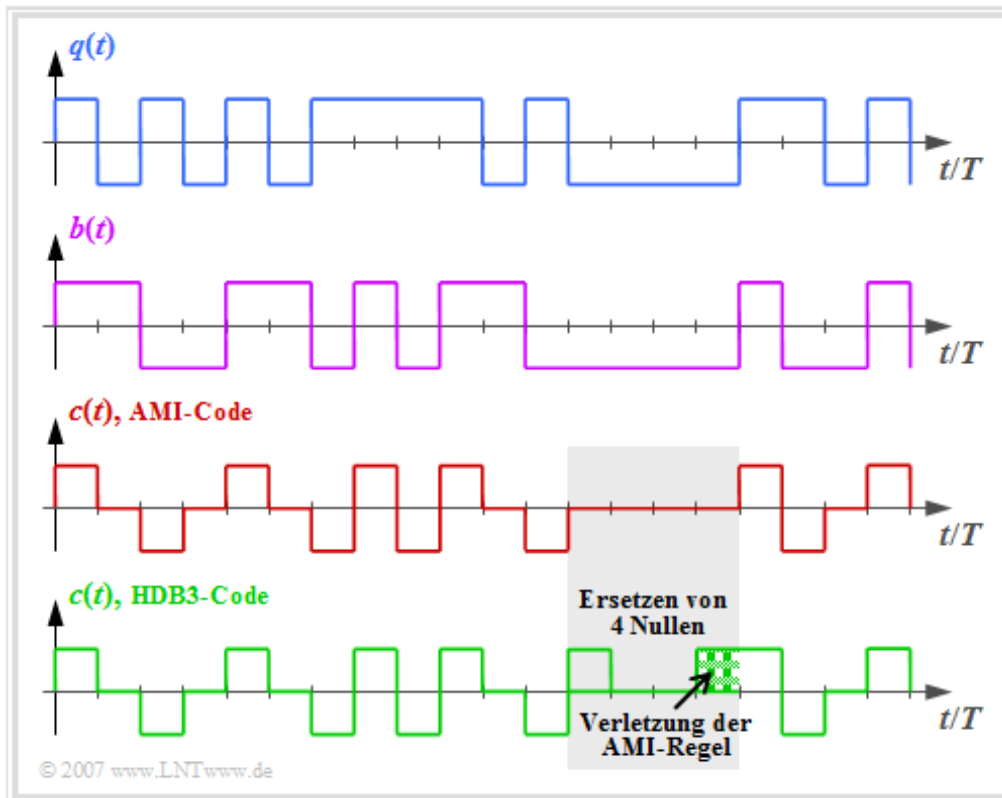
- Weiterhin gilt für das (nun redundante) Sendesignal  $s(t)$  mit dem Sendegrundimpuls  $g_s(t)$ , der im gesamten Kapitel 2.4 stets als NRZ-Rechteck vorausgesetzt wird:

$$s(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \cdot g_s(t - \nu \cdot T).$$

- Die **relative Coderedundanz** ist für alle Pseudoternär codes gleich  $r_c = 1 - 1/\log_2(3) \approx 36.9\%$ .

## Eigenschaften des AMI-Codes (1)

Die einzelnen Pseudoternär-codes unterscheiden sich in den Parametern  $N_C$  und  $K_C$ . Der bekannteste Vertreter ist der Bipolarcode erster Ordnung mit den Codeparametern  $N_C = 1$  und  $K_C = 1$ , der auch unter der Bezeichnung **AMI-Code** (von: **A**lternate **M**ark **I**nversion) bekannt ist. Dieser wird zum Beispiel bei ISDN (Integrated Services Digital Networks) auf der sog.  $S_0$ -Schnittstelle eingesetzt.



Die Grafik zeigt im oberen Bereich die Signale  $q(t)$ ,  $b(t)$  und  $c(t) = s(t)$  für den AMI-Code. Man erkennt das einfache Codier- und Decodierprinzip dieses Codes:

- Jeder Binärwert „-1“ von  $q(t)$  wird durch den ternären Amplitudenkoeffizienten „0“ codiert.
- Der Binärwert „+1“ von  $q(t)$  wird alternierend mit „+ 1“ und „- 1“ dargestellt.

Damit wird sichergestellt, dass im AMI-codierten Signal keine langen „+1“- bzw. „-1“-Sequenzen enthalten sind. Dagegen ist das Auftreten langer Nullfolgen durchaus möglich, bei denen über einen längeren Zeitraum keine Taktinformation übertragen wird.

Um dies zu vermeiden, wurden einige modifizierte AMI-Codes entwickelt, zum Beispiel der B6ZS- und der HDB3-Code:

- Bei letzterem (grüne Kurve in obiger Grafik) werden vier aufeinanderfolgende Nullen im AMI-codierten Signal durch eine Teilsequenz ersetzt, die die AMI-Codierregel verletzt.
- Im grau hinterlegten Bereich ist dies die Folge „+ 0 0 +“, da das letzte Symbol vor der Ersetzung ein „-“ war.
- Damit ist beim HDB3-Code die Anzahl aufeinanderfolgender Nullen auf 3 begrenzt, beim B6ZS-Code auf 5. Der Decoder erkennt diese Codeverletzung und ersetzt „+ 0 0 +“ wieder durch „0 0 0“.

## Eigenschaften des AMI-Codes (2)

Der Frequenzgang des linearen Codier netzwerks eines Pseudoternär codes lautet allgemein:

$$H_C(f) = 1/2 \cdot [1 - K_C \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot N_C \cdot T}] = 1/2 \cdot [1 - K \cdot e^{-j \cdot \alpha}] .$$

Damit ergibt sich für das Leistungsdichtespektrum (LDS) der Amplitudenkoeffizienten ( $K$  und  $\alpha$  sind Abkürzungen):

$$\begin{aligned} \Phi_a(f) &= |H_C(f)|^2 = \frac{[1 - K \cos(\alpha) + j \cdot K \sin(\alpha)] [1 - K \cos(\alpha) - j \cdot K \sin(\alpha)]}{4} \\ &= \dots = 1/4 \cdot [2 - 2 \cdot K \cdot \cos(\alpha)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi_a(f) = |H_C(f)|^2 = 1/2 \cdot [1 - K_C \cdot \cos(2\pi f N_C T)] \quad \bullet \text{---} \circ \quad \varphi_a(\lambda \cdot T) .$$

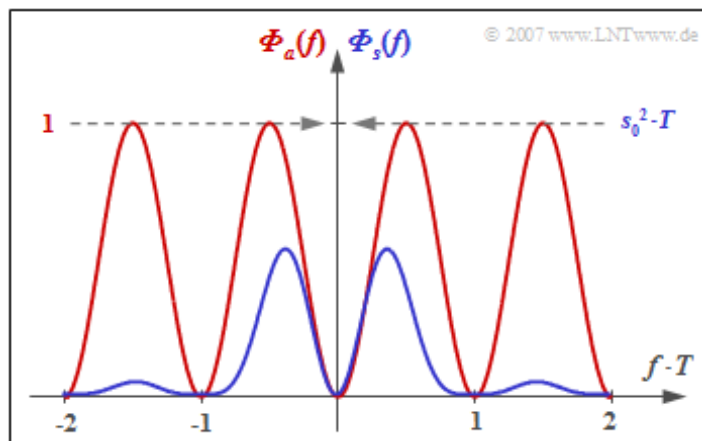
Insbesondere erhält man für das **Leistungsdichtespektrum** des AMI-Codes ( $N_C = K_C = 1$ ):

$$\Phi_a(f) = 1/2 \cdot [1 - \cos(2\pi f T)] = \sin^2(\pi f T) .$$

Das LDS von HDB3- und B6ZS-Code weicht von dem des AMI-Codes nur unwesentlich ab.

Die Grafik zeigt

- das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_a(f)$  der Amplitudenkoeffizienten (rote Kurve),
- das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_s(f)$  des gesamten Sendesignals (blau), gültig für NRZ-Rechteckimpulse.



Man erkennt aus dieser Darstellung

- die Gleichsignalfreiheit des AMI-Codes, da  $\Phi_a(f=0) = \Phi_s(f=0) = 0$  ist,
- die Leistung  $P_S = s_0^2/2$  des AMI-codierten Sendesignals (Integral über  $\Phi_s(f)$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$ ).

Die Eigenschaften der Pseudoternär codes und insbesondere des AMI-Codes können Sie sich mit dem folgenden Interaktionsmodul verdeutlichen: **Signale, AKF und LDS der Pseudoternär codes**

## Eigenschaften des Duobinär-codes

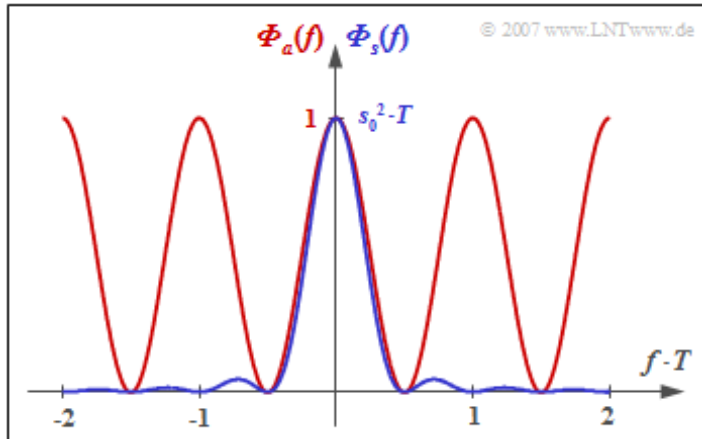
Der **Duobinär-cod** ist durch die Codeparameter  $N_C = 1$  und  $K_C = -1$  festgelegt. Damit ergibt sich für das LDS der Amplitudenkoeffizienten bzw. für das LDS des Sendesignals:

$$\Phi_a(f) = 1/2 \cdot [1 + \cos(2\pi fT)] = \cos^2(\pi fT),$$

$$\Phi_s(f) = s_0^2 \cdot T \cdot \cos^2(\pi fT) \cdot \text{si}^2(\pi fT) = s_0^2 \cdot T \cdot \text{si}^2(2\pi fT).$$

Die Grafik zeigt das Leistungsdichtespektrum

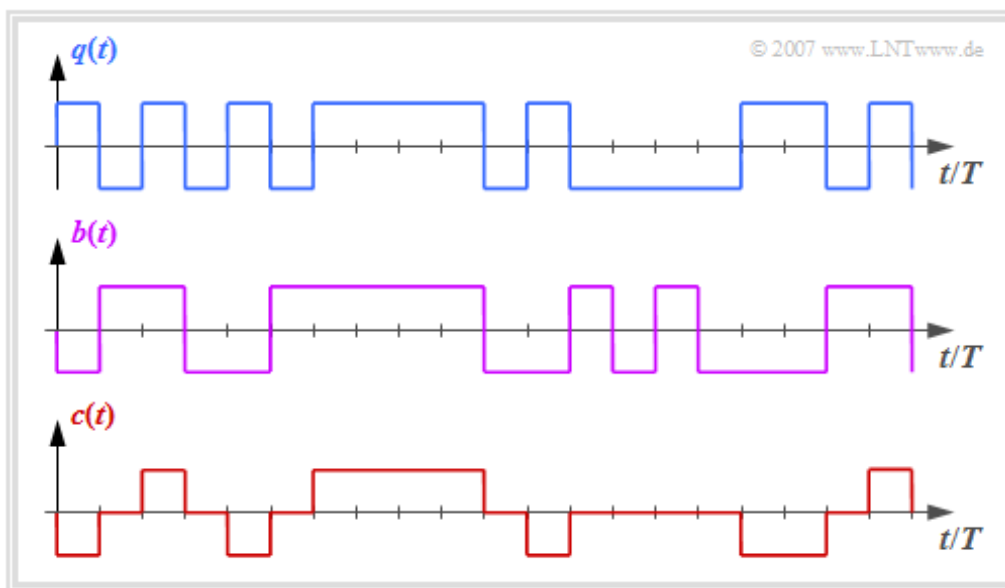
- der Amplitudenkoeffizienten  $\Rightarrow \Phi_a(f)$  als rote Kurve,
- des gesamten Sendesignals  $\Rightarrow \Phi_s(f)$  als blaue Kurve.



In der Grafik am Seitenende sind die Signale  $q(t)$ ,  $b(t)$  und  $c(t) = s(t)$  skizziert.

Aus beiden Darstellungen geht hervor:

- Beim Duobinär-cod können beliebig viele Symbole mit gleicher Polarität („+1“ bzw. „-1“) direkt aufeinanderfolgen. Deshalb gilt  $\Phi_a(f=0) = 1$  und  $\Phi_s(f=0) = s_0^2 \cdot T$ .
- Dagegen tritt hier die alternierende Folge ... , +1, -1, +1, -1, +1, ... nicht auf, die hinsichtlich Impulsinterferenzen besonders störend ist. Beim Duobinär-cod gilt deshalb  $\Phi_s(f = 1/(2T)) = 0$ .
- Das Leistungsdichtespektrum  $\Phi_s(f)$  des pseudoternären Duobinär-codes ist identisch mit dem LDS bei redundanzfreier Binärcodierung mit halber Rate (Symbol-dauer  $2T$ ).

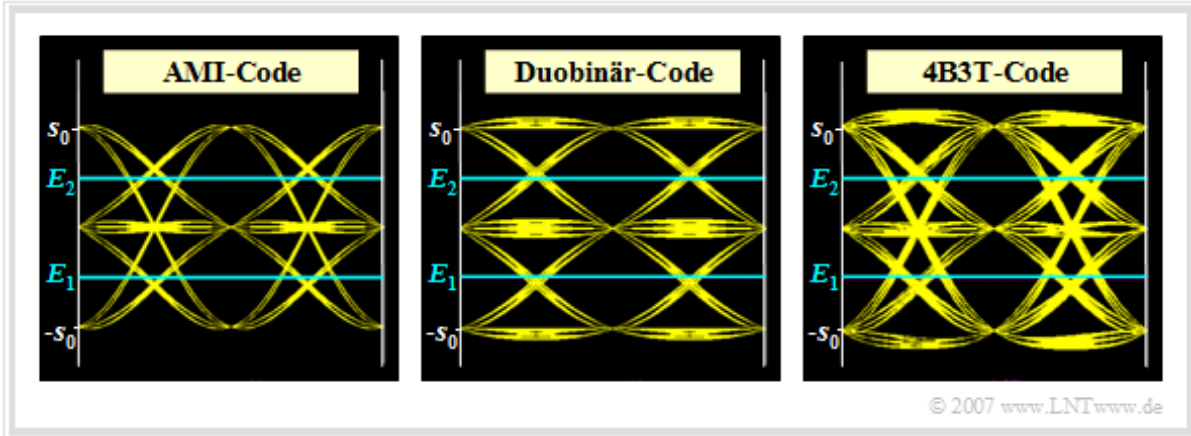


Die Eigenschaften der Pseudoternär-codes und insbesondere des Duobinär-codes können Sie sich mit dem Interaktionsmodul **Signale, AKF und LDS der Pseudoternär-codes** verdeutlichen.



## Fehlerwahrscheinlichkeit der Pseudoternär codes

Die Grafik zeigt die **Augendiagramme ohne Rauschen** bei Verwendung von AMI–Code (links) und Duobinär code (Mitte) im Vergleich zum 4B3T–Code (rechts). Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie auf **Seite 4 von Kapitel 2.3**.



Alle Bilder gelten für eine Cosinus–Rolloff–Charakteristik des Gesamtfrequenzgangs (von Sender und Empfänger) mit dem Rolloff–Faktor  $r = 0.8$ . Die Ergebnisse sind wie folgt zu interpretieren:

- Beim 4B3T–Code erkennt man im Augendiagramm deutlich mehr Linien als bei den beiden linken Bildern. Der redundanzfreie Ternär code würde nahezu das gleiche Ergebnis liefern.
- Auf der oben zitierten Seite wurde die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit des 4B3T–Codes für die Leistungskenngröße  $10 \cdot \lg(s_0^2 \cdot T/N_0) = 13 \text{ dB}$  (Spitzenwertbegrenzung!) wie folgt berechnet:

$$\sigma_d/s_0 = 0.145 \quad \Rightarrow \quad p_S = 4/3 \cdot Q\left(\frac{s_0/2}{\sigma_d}\right) \approx 4/3 \cdot Q(3.45) = 3.7 \cdot 10^{-4}.$$

- Bei Verwendung eines Pseudoternär codes ergibt sich eine größere Fehlerwahrscheinlichkeit, weil hier der Rauscheffektivwert gegenüber der redundanzfreien Binärcodierung nicht verringert wird:

$$\sigma_d/s_0 = 0.167 \quad \Rightarrow \quad p_S = 4/3 \cdot Q\left(\frac{s_0/2}{\sigma_d}\right) \approx 4/3 \cdot Q(3) = 1.8 \cdot 10^{-3}.$$

- Bei Erfüllung der Nyquistbedingung unterscheiden sich der AMI– und der Duobinär code trotz völlig unterschiedlicher Augendiagramme nicht hinsichtlich der Fehlerwahrscheinlichkeit.
- Wie aber in **Kapitel 3.4** noch gezeigt werden wird, ist das Fehlerverhalten der beiden Codes immer dann extrem unterschiedlich, wenn Impulsinterferenzen eine Rolle spielen.
- Man erkennt in der linken Grafik, dass beim AMI–Code die horizontalen Linien bei  $+s_0$  bzw.  $-s_0$  fehlen (Gleichsignalfreiheit), während beim Duobinär code (mittlere Grafik) keine Übergänge von  $+s_0$  auf  $-s_0$  (und umgekehrt) möglich sind.