Musterlösung zur Aufgabe A2.1

a) Das im äquivalenten Tiefpassbereich beschriebene Nachrichtensignal darf keine größere Bandbreite als B_{max} = 1/Δτ = 500 kHz aufweisen. Diese mathematische (zweiseitige) Bandbreite des Tiefpass–Signals ist gleichzeitig die maximale physikalische (einseitige) Bandbreite des zugehörigen Bandpass–Signals.

b) $H(f, t_b) = 1$ bedeutet im Zeitbereich $h(\tau, t_b) = \delta(\tau)$. Nur dann ist der Kanal ideal. Man erkennt aus der Grafik, dass dies nur für den Zeitpunkt t_b = 0 zutrifft.

c) Verzerrungen treten dann auf, wenn sich zum Zeitpunkt t die Impulsantwort aus zwei oder mehr Diracfunktionen zusammensetzt ⇒ $t \ge t_c = 3T$. Zum Zeitpunkt $t = T$ wird das Signal $s(t)$ nur um 2 µs verzögert, bei $t = 2T$ zusätzlich noch in der Amplitude um 50% (6 dB Verlust) reduziert.

d) Zum Zeitpunkt $t = 3T$ treten die beiden Diracfunktionen bei $\tau_{min} = 0$ und τ_{max} = 4 µs auf. Die (einfache Näherung für die) Kohärenzbandbreite ist der Kehrwert hiervon:

$$B_K{}' = \frac{1}{4\ \mu s} \ \underline{= 250\ \text{kHz}}\,.$$

Da auch zum Zeitpunkt $t = 4T$ die Diracfunktionen um 4 µs auseinanderliegen, erhält man hier ebenfalls B_K' = 250 kHz. Bei $t = 5T$ hat die Impulsantwort eine Ausdehnung von 6 µs ⇒ B_K' ≈ 167 kHz.

e) Die Impulsantworten sind zu den Zeiten $5T$, $6T$ und $7T$ identisch und bestehen jeweils aus 3 Diracs. Unter der Annahme, dass sich diesbezüglich für $t \ge 8T$ nichts ändert, erhält man $t_e = 5T$.

f) Die zeitliche Veränderung der Impulsantwort, deren Dynamik durch den Parameter T ausgedrückt wird, muss langsam sein im Vergleich zur maximalen Ausdehnung von $h(\tau, t)$, die in dieser Aufgabe gleich τ_{max} = 6 µs beträgt: $T \gg \tau_{max}$. Richtig ist der Lösungsvorschlag 2.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.1

a) Wie aus der Grafik zu ersehen, ist die Übertragungsfunktion $H(f, t)$ abhängig von t. Damit ist auch $h(\tau, t)$ zeitabhängig. Richtig ist also JA.

b) Betrachtet man einen festen Zeitpunkt, zum Beispiel t = 2 ms, so erhält man für die zeitvariante Übertragungsfunktion

$$H(f, t = 2\,\text{ms}) = -\text{j} \cdot 1.3 = \text{const.}$$

Damit lautet die dazugehörige 2D–Impulsantwort:

$$h(\tau, t = 2\,\text{ms}) = -\text{j} \cdot 1.3 \cdot \delta(\tau) \quad \Rightarrow \quad M = 1\,.$$

Mit einem Pfad kann es aber nicht zu Mehrwegeausbreitung kommen. Das heißt, die richtige Lösung ist NEIN.

c) Da hier zwar Zeitvarianz, aber keine Frequenzselektivität vorliegt, trifft der Vorschlag 3 zu.

d) Richtig ist der Lösungsvorschlag 4. Für den AWGN–Kanal kann keine Übertragungsfunktion angegeben werden, bei einem Zweiwegekanal ist $H(f, t_0)$ nicht konstant. Da in der $H(f, t_0)$–Grafik in Real– und Imaginärteil jeweils ein Gleichanteil ungleich 0 zu erkennen ist, kann auch der Rayleigh–Kanal ausgeschlossen werden. Die Daten für die vorliegende Aufgabe stammen von einem **Rice–Kanal** mit folgenden Parametern:

$$\sigma = 1/\sqrt{2}\,,\;\; x_0 = 1/\sqrt{2}\,,\;\; y_0 = -1/\sqrt{2}\,,\;\; f_{\text{D, max}} = 100\ \text{Hz}\,.$$

Musterlösung zur Aufgabe A2.2

a) Es gilt $\tau_1 = d_1/c \Rightarrow d_1 = \tau_1 \cdot c = 10^{-5}\ \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s} = \underline{3\ \text{km}}$.

b) Der Dämpfungsfaktor ist $k_0 = k_2/k_1 = \underline{0.2}$ und die Verzögerungszeit $\tau_0 = \tau_2 - \tau_1 = \underline{1\ \mu\text{s}}$. Der für beide Pfade wirksame Pfadverlust ist damit $k_1 = 10^{-4}$ und die Grundlaufzeit beträgt $\tau_1 = 10\ \mu\text{s}$.

c) Die Impulsantwort lautet:

$$h_0(\tau) = \delta(\tau) + k_0 \cdot \delta(\tau - \tau_0)\,.$$

Durch Fouriertransformation kommt man zum Frequenzgang

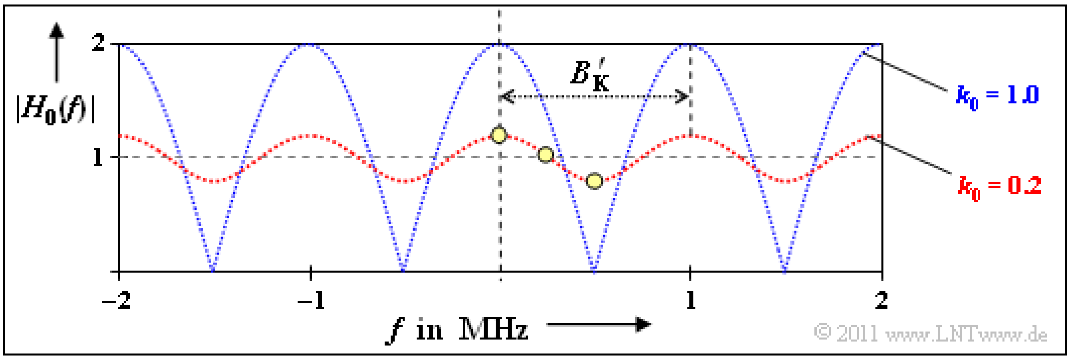
$$\begin{aligned} H_0(f) &= 1 + k_0 \cdot \exp(-\text{j} \cdot 2\pi f \tau_0) = \\ &= 1 + k_0 \cdot \cos(2\pi f \tau_0) + \text{j} \cdot k_0 \cdot \sin(2\pi f \tau_0)\,, \end{aligned}$$

und damit zu folgendem Betragsfrequenzgang:

$$|H_0(f)| = \sqrt{[1 + k_0 \cdot \cos(2\pi f \tau_0)]^2 + k_0^2 \cdot \sin^2(2\pi f \tau_0)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |H_0(f=0)| &= 1 + k_0 = \underline{1.2}\,, \\ |H_0(f = 250\,\text{kHz})| &= \sqrt{[1 + k_0 \cdot \cos(\pi/2)]^2 + k_0^2 \cdot \sin^2(\pi/2)} = \sqrt{1 + k_0^2} \approx \underline{1.02}\,, \\ |H_0(f = 500\,\text{kHz})| &= \sqrt{[1 + k_0 \cdot \cos(\pi)]^2 + k_0^2 \cdot \sin^2(\pi)} = 1 - k_0 = \underline{0.8}\,. \end{aligned}$$

Die Grafik (rote Kurve) zeigt den Funktionsverlauf $|H_0(f)|$. Die gesuchten Werte sind durch die gelben Punkte markiert. Die blaue Kurve bezieht sich auf die Aufgabe e) mit $k_0 = 1 \Rightarrow k_2 = k_0 \cdot k_1 = 10^{-4}$.



d) Destruktive Überlagerungen gibt es für $|H_0(f)| < 1$, z.B. für $f = 500$ kHz. Dagegen gilt:

$$\begin{aligned} |H_0(f = 750\,\text{kHz})| &= |H_0(f = 250\,\text{kHz})| \approx 1.02 > 1\,, \\ |H_0(f = 1\,\text{MHz})| &= |H_0(f = 0)| = 1.2 > 1\,. \end{aligned}$$

Richtig ist demnach der <u>Lösungsvorschlag 1</u>.

e) Die Differenz $\tau_{\text{max}} - \tau_{\text{min}}$ der Verzögerungszeiten in den beiden Pfaden ist gleich $\tau_0 = 1\ \mu\text{s}$. Damit ist die Kohärenzbandbreite

$$B_\text{K}{}' = 1/\tau_0 = \underline{1\,\text{MHz}}\,.$$

Das Ergebnis ist unabhängig von k_2. Es gilt für $k_2 = 2 \cdot 10^{-5} \Rightarrow k_0 = 0.2$ und $k_2 = 10^{-4} \Rightarrow k_0 = 1$ in gleicher Weise. In der Grafik ist diese Näherung B_K' für die Kohärenzbandbreite eingetragen.

f) Der Kanal ist nichtfrequenzselektiv, wenn die Kohärenzbandbreite B_K deutlich größer ist als die Signalbandbreite B_S. Dies trifft beim gegebenen Kanal für GSM zu, nicht jedoch für UMTS. Richtig ist somit der <u>Lösungsvorschlag 2</u>. Bei UMTS liegt ein frequenzselektiver Kanal vor.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.2

a) Mit den Bezeichnungen in der Veranschaulichungsskizze ergibt sich nach „Pythagoras":

$$d_1 = \sqrt{d^2 + (h_\mathrm{S} - h_\mathrm{E})^2} = \sqrt{10^2 + (0.5 - 0.03)^2}\ \mathrm{km}\ \underline{= 10011.039\ \mathrm{m}}\,.$$

Eigentlich ist die Angabe einer solchen Länge mit der Genauigkeit eines Millimeters nicht sehr sinnvoll und widerspricht der Mentalität eines Ingenieurs. Wir haben das hier trotzdem gemacht, um die Genauigkeit der in der Teilaufgabe d) gesuchten Näherung überprüfen zu können.

b) Klappt man den reflektierten Strahl rechts von x_R nach unten (Spiegelung am Erdboden), so erhält man wiederum ein rechtwinkliges Dreieck. Daraus folgt:

$$d_2 = \sqrt{d^2 + (h_\mathrm{S} + h_\mathrm{E})^2} = \sqrt{10^2 + (0.5 + 0.03)^2}\ \mathrm{km}\ \underline{= 10014.035\ \mathrm{m}}\,.$$

c) Mit den Ergebnissen aus (a) und (b) erhält man für die Längen– und die Laufzeitdifferenz:

$$\Delta d = d_2 - d_1 = \ \underline{= 2.996\,\mathrm{m}}\,,$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta d}{c} = \frac{2.996\ \mathrm{m}}{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}\ \underline{= 9.987\ \mathrm{ns}}\,.$$

d) Mit $h_\mathrm{S} + h_\mathrm{E} << d$ lassen sich die obigen Gleichungen wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
d_1 &= d \cdot \sqrt{1 + \frac{(h_\mathrm{S} - h_\mathrm{E})^2}{d^2}} \approx d \cdot \left[1 + \frac{(h_\mathrm{S} - h_\mathrm{E})^2}{2d^2}\right]\,,\\
d_2 &= d \cdot \sqrt{1 + \frac{(h_\mathrm{S} + h_\mathrm{E})^2}{d^2}} \approx d \cdot \left[1 + \frac{(h_\mathrm{S} + h_\mathrm{E})^2}{2d^2}\right]\\
\Rightarrow &\quad \Delta d = d_2 - d_1 \approx \frac{1}{2d} \cdot \left[(h_\mathrm{S} + h_\mathrm{E})^2 - (h_\mathrm{S} - h_\mathrm{E})^2\right] = \frac{2 \cdot h_\mathrm{S} \cdot h_\mathrm{E}}{d}\\
\Rightarrow &\quad \Delta\tau = \frac{\Delta d}{c} \approx \frac{2 \cdot h_\mathrm{S} \cdot h_\mathrm{E}}{c \cdot d}\,.
\end{aligned}$$

Richtig ist also der <u>Lösungsvorschlag 3</u>. Mit den vorgegebenen Zahlenwerten erhält man hierfür:

$$\Delta\tau \approx \frac{2 \cdot 500\ \mathrm{m} \cdot 30\ \mathrm{m}}{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s} \cdot 10000\ \mathrm{m}} = 10^{-8}\ \mathrm{s} = 10\,\mathrm{ns}\,.$$

Die relative Verfälschung gegenüber dem tatsächlichen Wert entsprechend Teilaufgabe (c) beträgt nur 0.13%. Beim Lösungsvorschlag 1 stimmt schon die Einheit nicht. Bei Lösungsvorschlag 2 käme es zu keiner Laufzeitverschiebung, wenn beide Antennen die gleiche Höhe hätten. Dies trifft sicher nicht zu.

e) Der Pfadverlustexponent $\gamma = 2$ sagt aus, dass die Empfangsleistung P_E quadratisch mit der Distanz abnimmt. Die Signalamplitude nimmt also mit $1/d$ ab, und mit einer Konstanten K gilt:

$$k_1 = \frac{K}{d_1}\,,\quad |k_2| = \frac{K}{d_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|k_2|}{k_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{10011.039\ \mathrm{m}}{10014.035\ \mathrm{m}} \approx 0.99\,.$$

Die beiden Pfadgewichte unterscheiden sich somit im Betrag nur um etwa 1%. Allerdings haben die Koeffizienten k_1 und k_2 verschiedene Vorzeichen ⇒ richtig sind die <u>Antworten 1 und 3</u>.

Musterlösung zur Aufgabe A2.3

a) Es gilt hier $r(\tau) = s(\tau) * h(\tau)$, wobei $s(\tau)$ ein Rechteckimpuls der Dauer T = 5 µs bezeichnet und die Impulsantwort $h(\tau)$ sich allgemein aus M gewichteten Diracfunktionen bei τ_1, τ_2, ..., τ_M zusammensetzt. Das skizzierte Ausgangssignal $r(\tau)$ kann sich nur ergeben, falls

- $\tau_1 = 0$ ist (sonst würde $r(\tau)$ nicht bei $\tau = 0$ beginnen),
- τ_M = 10 µs ist (daraus ergibt sich der Rechteckverlauf zwischen 10 µs und 15 µs),
- dazwischen noch eine Diracfunktion bei τ_2 = 2 µs auftritt.

Das heißt: Die Impulsantwort setzt sich hier aus $\underline{M = 3}$ Diracfunktionen zusammen.

b) Wie bereits bei der letzten Teilaufgabe berechnet, erhält man

$$\tau_1 \underline{= 0}, \quad \tau_2 \underline{= 2\,\mu\text{s}}, \quad \tau_3 \underline{= 10\,\mu\text{s}}.$$

c) Vergleicht man Eingang $s(\tau)$ und Ausgang $r(\tau)$, so gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

- Intervall $0 < \tau < 2$ µs: $s(\tau) = s_0$, $r(\tau) = 0.75 \cdot s_0 \Rightarrow k_1 \underline{= 0.75}$,
- Intervall 2 µs $< \tau <$ 5 µs: $(k_1 + k_2) \cdot s_0 = 0.25 \cdot s_0 \Rightarrow k_2 \underline{= -0.50}$,
- Intervall 10 µs $< \tau <$ 15 µs: $k_3 \cdot s_0 = 0.25 \cdot s_0 \Rightarrow k_3 \underline{= 0.25}$.

d) Mit dem Verschiebungssatz erhält man für die Fouriertransformierte der Impulsantwort $h(\tau)$:

$$h(\tau) = k_1 \cdot \delta(\tau) + k_2 \cdot \delta(\tau - \tau_2) + k_3 \cdot \delta(\tau - \tau_3)$$
$$\Rightarrow \quad H(f) = k_1 + k_2 \cdot \exp(-\text{j} \cdot 2\pi f \tau_2) + k_3 \cdot \exp(-\text{j} \cdot 2\pi f \tau_3).$$

Durch Analyse der einzelnen Beiträge kommt man zu folgendem Ergebnis:

- Der erste Anteil ist konstant $\Rightarrow$ Periode $f_1 \to \infty$.
- Der zweite Anteil ist periodisch mit $f_2 = 1/\tau_2$ = 500 kHz.
- Der dritte Anteil ist periodisch mit $f_3 = 1/\tau_3$ = 100 kHz.

$\Rightarrow$ Insgesamt ist damit $H(f)$ periodisch mit f_0 $\underline{= 500 \text{ kHz}}$.

e) Mit $A = 2\pi f \cdot \tau_2$ und $B = 2\pi f \cdot \tau_3$ erhält man:

$$\begin{aligned}|H(f)|^2 &= H(f) \cdot H^\star(f) = \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \text{e}^{-\text{j}A} + \frac{1}{4} \cdot \text{e}^{-\text{j}B}\right]\left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \text{e}^{\text{j}A} + \frac{1}{4} \cdot \text{e}^{\text{j}B}\right] = \\ &= \frac{9}{16} - \frac{3\text{e}^{\text{j}A}}{8} + \frac{3\text{e}^{\text{j}B}}{16} - \frac{3\text{e}^{-\text{j}A}}{8} + \frac{1}{4} - \frac{\text{e}^{\text{j}(B-A)}}{8} + \frac{3\text{e}^{-\text{j}B}}{16} - \frac{\text{e}^{\text{j}(A-B)}}{8} + \frac{1}{16} = \\ &= \frac{7}{8} - \frac{3}{8} \cdot \left[\text{e}^{\text{j}A} + \text{e}^{-\text{j}A}\right] + \frac{3}{16} \cdot \left[\text{e}^{\text{j}B} + \text{e}^{-\text{j}B}\right] - \frac{1}{8} \cdot \left[\text{e}^{\text{j}(B-A)} + \text{e}^{-\text{j}(B-A)}\right].\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit dem Satz von **Euler** unter Berücksichtigung der Frequenzperiodizität:

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{7}{8} - \frac{3}{4} \cdot \cos(2\pi f \tau_2) + \frac{3}{8} \cdot \cos(2\pi f \tau_3) - \frac{1}{4} \cdot \cos(2\pi f(\tau_3 - \tau_2))}$$

$$\Rightarrow \quad |H(f=0)| = \sqrt{\frac{7}{8} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}} = \sqrt{0.25} \underline{= 0.5} = |H(f = 500\,\text{kHz})|$$

$$|H(f = 250\,\text{kHz})| = \sqrt{\frac{7}{8} - \frac{3}{4} \cdot \cos(\pi) + \frac{3}{8} \cdot \cos(5\pi) - \frac{1}{4} \cdot \cos(4\pi)} \underline{= 1}\,.$$

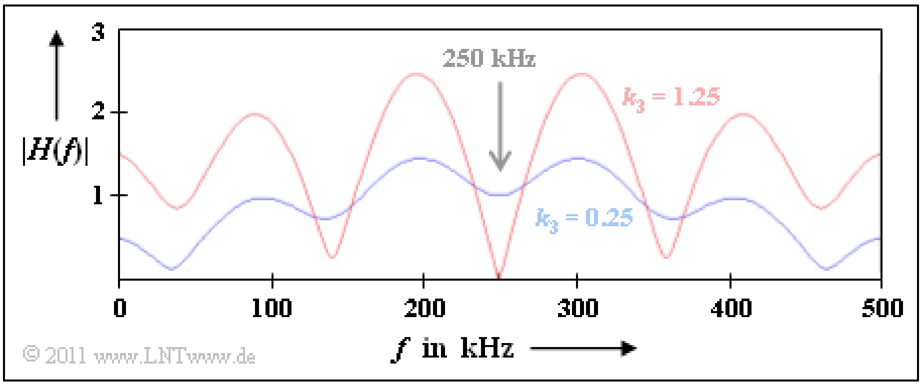
f) Der soeben berechnete Frequenzgang kann für f = 250 kHz wie folgt dargestellt werden:

$$H(f = 250\,\text{kHz}) = k_1 + k_2 \cdot \text{e}^{-\text{j} \cdot \pi} + k_3 \cdot \text{e}^{-\text{j} \cdot 5\pi} = k_1 - k_2 - k_3\,.$$

Wählt man nun

$$k_3 = k_1 - k_2 = 0.75 + 0.50 \underline{= 1.25}\,,$$

so ergibt sich $|H(f = 250\text{ kHz})| = 0$ und damit der für diese Signalfrequenz ungünstigste Wert.



Die Grafik zeigt $|H(f)|$ im Bereich zwischen 0 und 500 kHz. Die blaue Kurve gilt für k_3 = 0.25 entsprechend den Vorgaben von Teilaufgabe d), die rote Kurve für k_3 = 1.25, dem ungünstigsten Wert für f = 250 kHz.

Musterlösung zur Aufgabe A2.4

a) Die Periodendauer kann man aus der gegebenen Gleichung bestimmen. Berücksichtigt man die Betragsdarstellung, so ergibt sich T_0 = 20 ms.

b) Zum Zeitpunkt t_1 = 5 ms ist $h(\tau = 1\ \mu s,\ t_1) = 0$. Dementsprechend gilt

$$h(\tau = 1\,\mu\text{s}, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \delta(\tau) \quad \Rightarrow \quad H(f, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{const.}$$

Ebenso gilt für t_2 = 15 ms:

$$h(\tau = 1\,\mu\text{s}, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \delta(\tau) \quad \Rightarrow \quad H(f, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{const.}$$

c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet die Impulsantwort mit $\tau_1 = 1\ \mu s$:

$$h(\tau, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \delta(\tau) + \delta(\tau - \tau_1)\,.$$

Die Fouriertransformation führt zum Ergebnis

$$\begin{aligned} H_0(f) = H(f, t = 0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \exp(-\text{j} \cdot 2\pi f \tau_1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos(2\pi f \tau_1) - \text{j} \cdot \sin(2\pi f \tau_1) \\ \Rightarrow \quad |H_0(f)| &= \sqrt{\left[1/\sqrt{2} + \cos(2\pi f \tau_1)\right]^2 + \left[\sin(2\pi f \tau_1)\right]^2} = \\ &= \sqrt{0.5 + 1 + 2/\sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f \tau_1)} = \sqrt{1.5 + \sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f \tau_1)}\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

- $H_0(f)$ ist periodisch mit $1/\tau_1 = 1$ MHz.
- Für den Maximalwert bzw. Minimalwert gilt:

$$\begin{aligned} \text{Max}\,[\,|H_0(f)|\,] &= \sqrt{1.5 + \sqrt{2}} \approx 1.707\,, \\ \text{Min}\,[\,|H_0(f)|\,] &= \sqrt{1.5 - \sqrt{2}} \approx 0.293\,. \end{aligned}$$

- Bei $f = 0$ hat $|H_0(f)|$ ein Maximum.

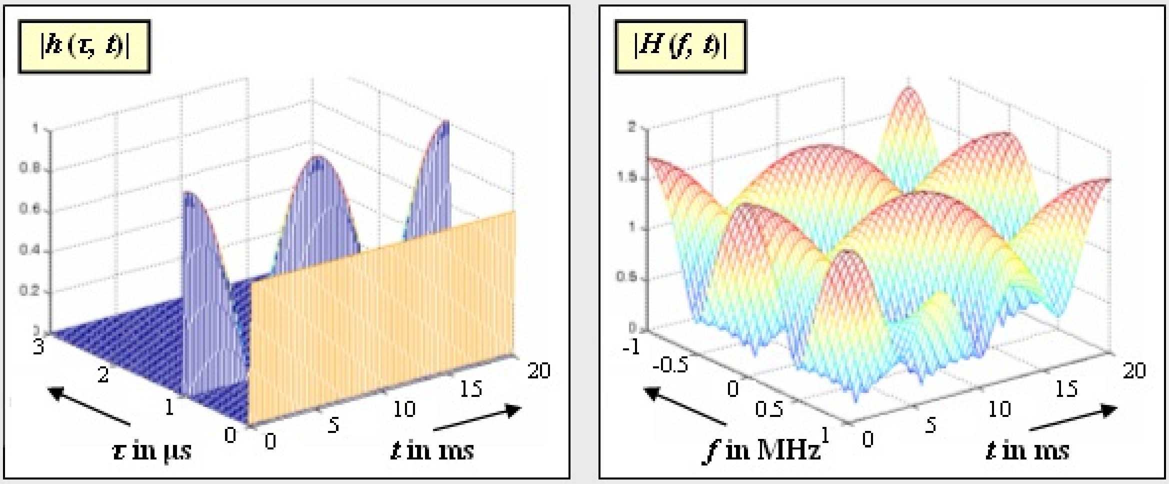
Richtig sind demzufolge alle drei Lösungsvorschläge.

d) Für den Zeitpunkt $t = 10$ ms gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} h(\tau, t = 10\,\text{ms}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \delta(\tau) - \delta(\tau - \tau_1)\,, \\ H_{10}(f) = H(f, t = 10\,\text{ms}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(2\pi f \tau_1) + \text{j} \cdot \sin(2\pi f \tau_1)\,, \\ |H_{10}(f)| &= \sqrt{1.5 - \sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f \tau_1)}\,. \end{aligned}$$

Die Frequenzperiode ändert sich gegenüber t = 0 nicht. Der Maximalwert ist weiterhin 1.707 und auch der Minimalwert 0.293 ändert sich nicht gegenüber der Teilaufgabe c). Bei f = 0 tritt nun allerdings ein Minimum und kein Maximum auf ⇒ Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 2.

Die rechte Grafik zeigt den Betrag $|H(f, t)|$ der zweidimensionalen Übertragungsfunktion.



© 2011 Thomas Hindelang: Mobile Communications

Musterlösung zur Aufgabe A2.5

a) Die zeitvariante Impulsantwort $h(\tau, t) = \eta_{VZ}(\tau, t)$ ist die Fourierrücktransformierte der Verzögerungs–Doppler–Funktion (Scatter–Funktion) $\eta_{VD}(\tau, f_D) = s(\tau, f_D)$:

$$\eta_{\rm VZ}(\tau, t) \quad \stackrel{t,\,f_{\rm D}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad \eta_{\rm VD}(\tau, f_{\rm D})\,.$$

Dementsprechend ist $\eta_{VZ}(\tau, t)$ für alle Werte von τ identisch 0, für die auch in der Scatter–Funktion $\eta_{VD}(\tau, f_D)$ keine Anteile zu erkennen sind. Richtig sind also die <u>Lösungsvorschläge 1 und 2</u>. Nur für $\tau = 0$ und $\tau = 1$ µs besitzt die zeitvariante Impulsantwort endliche Werte.

b) Für die Verzögerung $\tau = 0$ besteht die Scatter–Funktion (η_{VD}) aus einem einzigen Dirac bei $f_D = 100$ Hz. Für die gesuchte Zeitfunktion gilt gemäß dem zweiten Fourierintegral:

$$\begin{aligned}\eta_{\rm VZ}(\tau = 0, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f_{\rm D} - 100\ {\rm Hz}) \cdot \exp({\rm j} \cdot 2\pi f_{\rm D} t)\ {\rm d}f_{\rm D} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \exp({\rm j} \cdot 2\pi t \cdot 100\ {\rm Hz}) \\ \Rightarrow \quad |\eta_{\rm VZ}(\tau = 0, t)| &= \frac{1}{\sqrt{2}} = {\rm const.}\end{aligned}$$

Richtig ist demzufolge der <u>Lösungsvorschlag 1</u>.

c) Bei der Verzögerungszeit $\tau = 1$ µs besteht die Verzögerungs–Doppler–Funktion dagegen aus zwei Diracfunktionen bei ±50 Hz, jeweils mit dem Gewicht –0.5. Die Zeitfunktion ergibt sich damit zu

$$\eta_{\rm VZ}(\tau = 1\,\mu{\rm s}, t) = -\cos(2\pi t \cdot 50\ {\rm Hz})\,.$$

Diese Funktion lässt sich mit $A = –1$ und $f_0 = 50$ Hz gemäß <u>Lösungsvorschlag 2</u> darstellen.

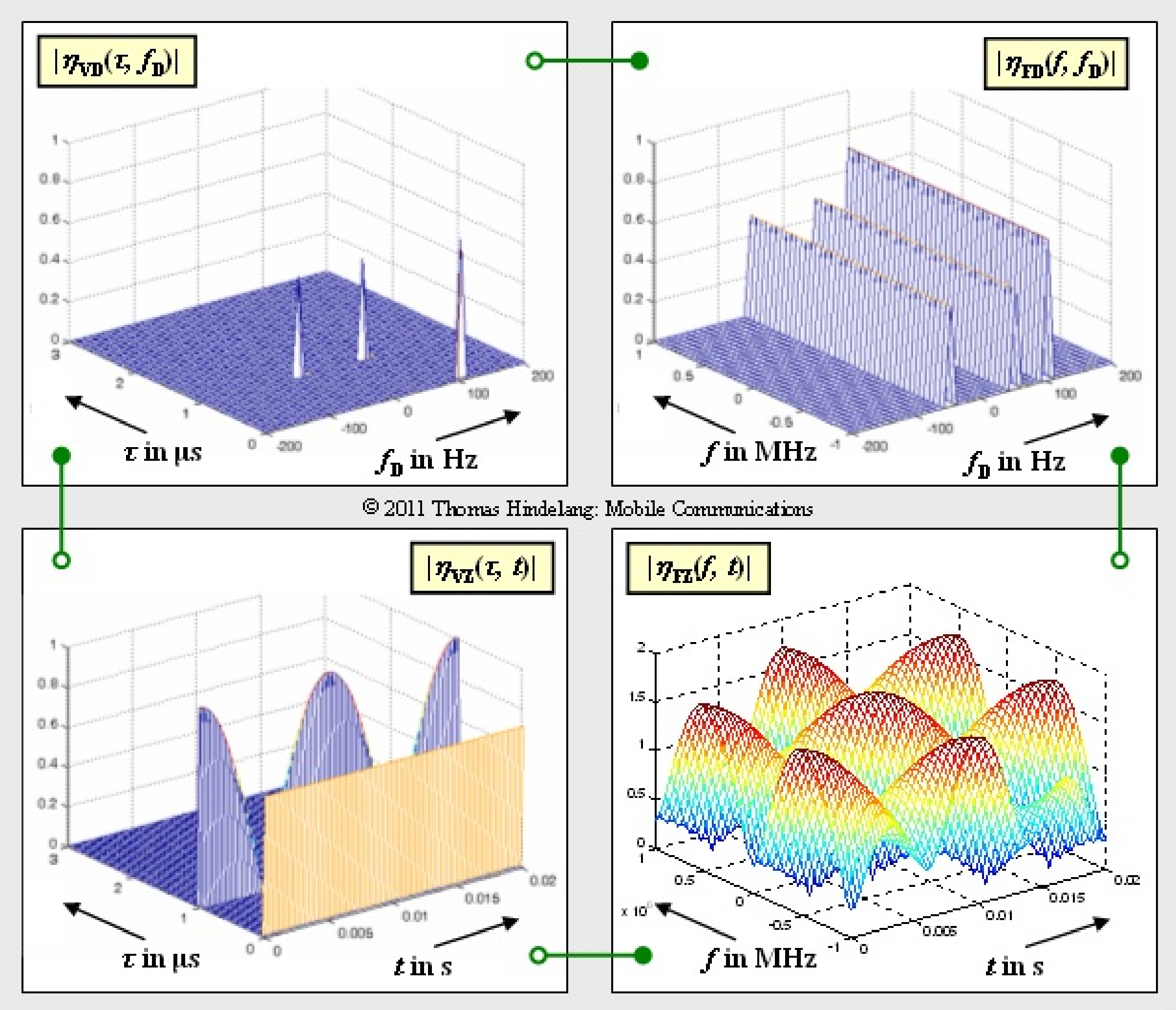
d) Die drei Diracfunktionen von $\eta_{VD}(\tau, f_D)$ liegen bei den Dopplerfrequenzen +100 Hz, +50 Hz und –50 Hz. Für alle anderen Dopplerfrequenzen muss deshalb auch $\eta_{FD}(f, f_D)$ identisch 0 sein. Richtig ist hier also der <u>Lösungsvorschlag 2</u>.

e) Betrachtet man die Scatter–Funktion $\eta_{VD}(\tau, f_D)$ in Richtung der τ–Achse, so erkennt man bei den relevanten Dopplerfrequenzen 100 Hz und ±50 Hz nur jeweils eine Diracfunktion. Hier ergeben sich in Abhängigkeit von f jeweils komplexe Exponentialschwingungen mit konstantem Betrag (woraus folgt, dass der <u>Lösungsvorschlag 1</u> richtig ist):

$$\begin{aligned}|\eta_{\rm FD}(f, f_{\rm D} = 100\ {\rm Hz})| &= 1/\sqrt{2} = {\rm const.} \\ |\eta_{\rm FD}(f, f_{\rm D} = \pm 50\ {\rm Hz})| &= 0.5 = {\rm const.}\end{aligned}$$

f) Wie aus der angegebenen **Grafik** zu ersehen, treffen die <u>Lösungsalternativen 2 und 3</u> zu.

Die Grafik zeigt alle Systemfunktionen. Die Fourierkorrespondenzen (grün eingezeichnet) verdeutlichen die Zusammenhänge zwischen diesen Systemfunktionen.



Hinweis: Vergleichen Sie die zeitvariante Übertragungsfunktion $|\eta_{FZ}(f, t)|$ im Bild unten rechts mit der entsprechenden Grafik für die **Aufgabe A2.4.** Die jeweils dargestellten Betragsfunktionen unterscheiden sich signifikant, obwohl $|\eta_{VZ}(\tau, t)|$ in beiden Fällen gleich ist. In der Aufgabe A2.4 wurde jedoch für $\eta_{VZ}(\tau = 1\ \mu s, t)$ implizit eine Cosinusfunktion vorausgesetzt und hier eine Minus–Cosinusfunktion. Die (nicht explizit) angegebene Verzögerungs–Dopplerfunktion für die Aufgabe A2.4 lautete:

$$\begin{aligned}\eta_{VD}(\tau, f_D) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \delta(\tau) \cdot \delta(f_D - 100\ \text{Hz}) + \\ &+\; \frac{1}{2} \cdot \delta(\tau - 1\,\mu\text{s}) \cdot \delta(f_D - 50\ \text{Hz}) + \frac{1}{2} \cdot \delta(\tau - 1\,\mu\text{s}) \cdot \delta(f_D + 50\ \text{Hz}).\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der Gleichung auf der **Angabenseite** zeigt, dass sich lediglich die Vorzeichen der Diracgewichte bei $\tau = 1$ µs geändert haben.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.5

a) Die Dopplerfrequenz ist für τ_0 positiv. Das heißt, dass sich der Empfänger auf den Sender zu bewegt ⇒ Aussage 2.

b) Die Gleichung für die Dopplerfrequenz lautet allgemein bzw. für den Winkel $\alpha = 0$:

$$f_\text{D} = \frac{v}{c} \cdot f_\text{S} \cdot \cos(\alpha)\,, \quad \alpha = 0\colon\; f_\text{D} = \frac{v}{c} \cdot f_\text{S}\,.$$

Daraus erhält man für die Geschwindigkeit

$$v = \frac{f_\text{D}}{f_\text{S}} \cdot c = \frac{10^2\ \text{Hz}}{2 \cdot 10^9\ \text{Hz}} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s} = 15\,\text{m/s} \;\underline{= 54\,\text{km/h}}\,.$$

c) Die Dopplerfrequenz f_D = 50 Hz rührt vom blauen Pfad her, da sich der Empfänger irgendwie auf den virtuellen Sender S_2 (beim Reflexionspunkt) zubewegt, wenn auch nicht in direkter Richtung. Der Winkel α_2 zwischen der Bewegungsrichtung und der Verbindungslinie S_2 – E beträgt 60°:

$$\cos(\alpha_2) = \frac{f_\text{D}}{f_\text{S}} \cdot \frac{c}{v} = \frac{50\,\text{Hz} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{2 \cdot 10^9\ \text{Hz} \cdot 15\,\text{m/s}} = 0.5 \quad\Rightarrow\quad \alpha_2 \;\underline{= 60^\circ}\,.$$

Richtig sind demnach die Lösungsvorschläge 1 und 4.

d) Richtig sind die Aussagen 1 und 3. Aus f_D = –50 Hz folgt $\alpha_3 = \alpha_2 \pm \pi$, also $\alpha_3 \;\underline{= 240°}$.

e) Alle Aussagen stimmen. Die beiden Diracfunktionen bei ±50 Hz haben die gleiche Laufzeit. Für beide Laufzeiten gilt $\tau_3 = \tau_2 = \tau_1 + \tau_0$. Aus der gleichen Laufzeit folgt aber auch $d_3 = d_2$ und bei gleicher Länge auch die gleichen Dämpfungsfaktoren.

f) Die Laufzeitdifferenz ist τ_0 = 1 µs, wie aus der Gleichung für $s(\tau_0, f_\text{D})$ hervorgeht. Damit ergibt sich die Längendifferenz $\Delta d = \tau_0 \cdot c = 10^{-6}\ \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s} \;\underline{= 300\ \text{m}}$.

g) Der Pfadverlustexponent wurde für diese Aufgabe zu γ = 2 vorausgesetzt. Dann gilt $k_1 = K/d_1$ und $k_2 = K/d_2$. Das Minuszeichen berücksichtigt hierbei die 180°–Phasendrehung auf den Nebenpfaden. Aus den Gewichten der Diracfunktionen kann man $k_1 = 2^{-0.5}$ und $k_2 = -0.5$ ablesen. Daraus folgt:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{k_1}{-k_2} = \frac{1/\sqrt{2}}{0.5} = \sqrt{2} \;\underline{= 1.414}\,.$$

Die Konstante K ist lediglich eine Hilfsgröße, die nicht weiter betrachtet werden muss.

h) Aus $d_2/d_1 = 2^{-0.5}$ und $\Delta d = d_2 - d_1$ = 300 m folgt schließlich:

$$\sqrt{2} \cdot d_1 - d_1 = 300\ \text{m} \quad\Rightarrow\quad d_1 = \frac{300\ \text{m}}{\sqrt{2}-1} \;\underline{= 724\ \text{m}} \quad\Rightarrow\quad d_2 = \sqrt{2} \cdot d_1 \;\underline{= 1024\ \text{m}}\,.$$

Musterlösung zur Aufgabe A2.6

a) Alle Aussagen sind richtig. $\eta_{\rm VZ}(\tau, t)$ ist die zeitvariante Impulsantwort, für die auch die Bezeichnung $h(\tau, t)$ gebräuchlich ist. Wie jede Impulsantwort hat auch $h(\tau, t)$ die Einheit [1/s].

Durch Fouriertransformation der Funktion $\eta_{\rm VZ}(\tau, t)$ bezüglich der Verzögerung τ kommt man zu

$$\eta_{\rm FZ}(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\rm VZ}(\tau, t) \cdot \exp(-{\rm j} \cdot 2\pi f \tau)\ {\rm d}\tau\,.$$

Durch die Integration nach τ (Einheit: s) ist $\eta_{\rm FZ}(f, t)$, die auch als „zeitvariante Übertragungsfunktion" bezeichnet wird, ohne Einheit. In mancher Literatur wird anstelle von $\eta_{\rm FZ}(f, t)$ auch $H(f, t)$ verwendet.

Auch die Verzögerungs–Doppler–Darstellung $\eta_{\rm VD}(\tau, f_{\rm D})$ hat keine Einheit. Diese Funktion ergibt sich aus der zeitvarianten Impulsantwort $\eta_{\rm VZ}(\tau, t)$ durch die Foutiertransformation hinsichtlich t:

$$\eta_{\rm VD}(\tau, f_{\rm D}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\rm VZ}(\tau, t) \cdot \exp(-{\rm j} \cdot 2\pi f_{\rm D} t)\ {\rm d}t\,.$$

Die Funktion $\eta_{\rm FD}(t, f_{\rm D})$ ergibt sich aus den dimensionslosen Funktionen $\eta_{\rm VD}(\tau, f_{\rm D})$ bzw. $\eta_{\rm FZ}(f, t)$ jeweils durch eine Foutiertransformation, was die Einheit [s] = [1/Hz] zur Folge hat.

b) Die Autokorrelationsfunktion ist definitionsgemäß der folgende Erwartungswert:

$$\varphi_{\rm VZ}(\tau_1, t_1, \tau_2, t_2) = {\rm E}\left[\eta_{\rm VZ}(\tau_1, t_1) \cdot \eta_{\rm VZ}^{\star}(\tau_2, t_2)\right]\,.$$

Da die zeitvariante Impulsantwort $\eta_{\rm VZ}(\tau, t)$ die Einheit [1/s] aufweist, hat deren AKF $\varphi_{\rm VZ}$ die Einheit [1/s^2], sowohl mit dem Argument (τ_1, 1_1, τ_2, t_2) als auch mit dem GWSSUS–Argument ($\Delta\tau$, Δt).

Die Diracfunktion $\delta(\Delta\tau)$ hat die Dimension [1/s], da das Integral über alle τ (mit Einheit [s]) den Wert 1 ergeben muss. Daraus folgt für die Verzögerungs–Zeit–Kreuzleistungsdichte $\Phi_{\rm VZ}(\tau, \Delta t)$ die Einheit [1/s], ebenso für die Verzögerungs–Leistungsdichte $\Phi_{\rm V}(\tau) = \Phi_{\rm VZ}(\tau, \Delta t = 0)$. Richtig sind somit bei dieser Teilfrage die Lösungsvorschläge 2 und 3.

c) Richtig sind hier die Aussagen 1 und 3. Ausgehend von der Einheit [1/s] der Funktion $\Phi_{\rm VZ}(\tau, \Delta t)$ kommt man durch Fouriertransformation bezüglich τ bzw. Δt zu den Funktionen $\varphi_{\rm FZ}(\Delta f, \Delta t)$ bzw. $\Phi_{\rm VD}(\tau, f_{\rm D})$. Beide sind dimensionslos.

Das Frequenz–Doppler–Kreuzleistungsdichtespektrum hat die Einheit [s] = [1/Hz], wegen

$$\Phi_{\rm FD}(\Delta f, f_{\rm D}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\rm VD}(\tau, f_{\rm D}) \cdot \exp(-{\rm j} \cdot 2\pi f_{\rm D} \tau)\ {\rm d}\tau\,.$$

Musterlösung zur Aufgabe A2.7

a) Das Integral über die Verzögerungs–Leistungsdichte liefert mit $\Phi_0 = \Phi_V(\tau = 0)$ das Ergebnis

$$\int_0^{+\infty} \Phi_V(\tau)\ d\tau = \Phi_0 \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-\tau/\tau_0)\ d\tau = \Phi_0 \cdot \tau_0 .$$

Damit erhält man für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f_V(\tau) = \frac{\Phi_V(\tau)}{\Phi_0 \cdot \tau_0} = \frac{1}{\tau_0} \cdot \exp(-\tau/\tau_0) .$$

Richtig ist somit der Lösungsvorschlag 2.

b) Das k–te Moment einer **exponentialverteilten Zufallsgröße** ist nach unserer Nomenklatur gleich $m_k = k! \cdot \tau_0^k$. Mit $k = 1$ ergibt sich daraus der lineare Mittelwert $m_1 = m_V$:

$$m_V = \tau_0 \underline{= 1\,\mu s} .$$

c) Nach dem **Satz von Steiner** gilt für die Varianz einer Zufallsgröße allgemein: $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$. Nach der oben angegebenen Gleichung ist $m_2 = 2 \cdot \tau_0^2$. Daraus folgt:

$$\sigma_V^2 = m_2 - m_1^2 = 2 \cdot \tau_0^2 - (\tau_0)^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_V = \tau_0 \underline{= 1\,\mu s} .$$

d) $\Phi_V(\tau)$ ist identisch mit dem in der Hilfsgleichung angegebenen $x(t)$, wenn man t durch τ und λ durch $1/\tau_0$ ersetzt. Damit hat $\varphi_F(\Delta f)$ den gleichen Verlauf wie $X(f)$ mit der Substitution $f \rightarrow \Delta f$:

$$\varphi_F(\Delta f) = \frac{1}{1/\tau_0 + j \cdot 2\pi\Delta f} = \frac{\tau_0}{1 + j \cdot 2\pi \cdot \tau_0 \cdot \Delta f} .$$

Richtig ist die erste Gleichung.

e) Die Kohärenzbandbreite ergibt sich implizit aus der folgenden Gleichung:

$$|\varphi_F(\Delta f = B_K)| \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \cdot |\varphi_F(\Delta f = 0)| = \frac{\tau_0}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |\varphi_F(\Delta f = B_K)|^2 = \frac{\tau_0^2}{1 + (2\pi \cdot \tau_0 \cdot B_K)^2} \stackrel{!}{=} \frac{\tau_0^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad (2\pi \cdot \tau_0 \cdot B_K)^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad B_K = \frac{\sqrt{3}}{2\pi \cdot \tau_0} \approx \frac{0.276}{\tau_0} .$$

Mit $\tau_0 = 1$ µs folgt daraus für die Kohärenzbandbreite B_K $\underline{= 276\text{ kHz}}$.

Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z2.7

a) Bei beiden Kanälen beträgt die Laufzeitdifferenz $\Delta\tau = \tau_{\rm max} - \tau_{\rm min} = 1$ µs. Deshalb ergibt sich bei beiden Kanälen der gleiche Wert $B_{\rm K}'$ = 1000 kHz.

b) Die Grafiken beziehen sich auf die Impulsantwort $h(\tau)$. Um das Verzögerungs–LDS zu erhalten, müssen die Gewichte quadriert werden:

$$\Phi_{\rm V}(\tau) = 1^2 \cdot \delta(\tau) + G^2 \cdot \delta(\tau - \tau_0)\,.$$

Das Integral über $\Phi_{\rm V}(\tau)$ ist demnach $1 + G^2$. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) muss aber die „Fläche 1" ergeben (Summe der beiden Diracgewichte gleich 1). Daraus folgt:

$$f_{\rm V}(\tau) = \frac{1}{1+G^2} \cdot \delta(\tau) + \frac{G^2}{1+G^2} \cdot \delta(\tau - \tau_0)\,.$$

Richtig ist somit nur der Lösungsvorschlag 3. Der erste Vorschlag beschreibt nicht die WDF $f_{\rm V}(\tau)$, sondern die Impulsantwort $h(\tau)$. Die zweite Gleichung gibt das Verzögerungs–LDS $\Phi_{\rm V}(\tau)$ an.

c) Beim Kanal A sind die beiden Impulsgewichte gleich. Damit kann für den Mittelwert $m_{\rm V}$ und die Standardabweichung $\sigma_{\rm V} = T_{\rm V}$ ohne große Rechnung geschrieben werden:

$$m_{\rm V} = \frac{\tau_0}{2} = 0.5\,\mu{\rm s}\,,\hspace{0.2cm} T_{\rm V} = \sigma_{\rm V} = \frac{\tau_0}{2} \hspace{0.1cm}\underline{= 0.5\,\mu{\rm s}}\,.$$

Beim Kanal B sind die Impulsgewichte $1/(1+ 0.5^2) = 0.8$ (für $\tau = 0$) und 0.2 (für $\tau = 1$ µs). Damit erhält man für den linearen und den quadratischen Mittelwert nach den grundlegenden **Gesetzen** der Statistik:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.8 \cdot 0 + 0.2 \cdot 1\,\mu{\rm s} = 0.2\,\mu{\rm s}\,,\\ m_2 &= 0.8 \cdot 0^2 + 0.2 \cdot (1\,\mu{\rm s})^2 = 0.2\,(\mu{\rm s})^2\,. \end{aligned}$$

Zum gesuchten Ergebnis kommt man mit dem **Satz von Steiner:**

$$\sigma_{\rm V}^2 = m_2 - m_1^2 = 0.2\,(\mu{\rm s})^2 - (0.2\,\mu{\rm s})^2 = 0.16\,(\mu{\rm s})^2 \hspace{0.3cm} \Rightarrow \hspace{0.3cm} T_{\rm V} = \sigma_{\rm V} \hspace{0.1cm}\underline{= 0.4\,\mu{\rm s}}\,.$$

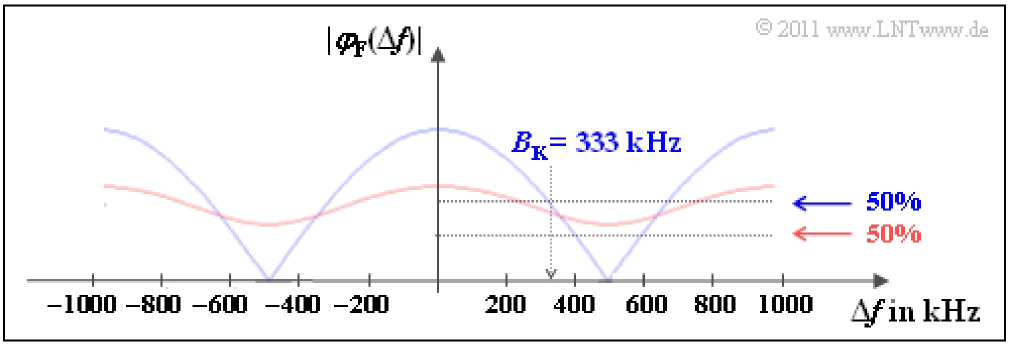
d) Die Frequenzkorrelationsfunktion ist die Fouriertransformierte von $\Phi_{\rm V}(\tau) = \delta(\tau) + \delta(\tau - \tau_0)$:

$$\begin{aligned} &\varphi_{\rm F}(\Delta f) = 1 + {\rm exp}(-{\rm j} \cdot 2\pi \cdot \Delta f \cdot \tau_0) = 1 + \cos(2\pi \cdot \Delta f \cdot \tau_0) - {\rm j} \cdot \sin(2\pi \cdot \Delta f \cdot \tau_0)\\ &\Rightarrow \hspace{0.3cm} |\varphi_{\rm F}(\Delta f)| = \sqrt{2 + 2 \cdot \cos(2\pi \cdot \Delta f \cdot \tau_0)}\,. \end{aligned}$$

Das Funktionsmaximum bei $\Delta f = 0$ ist gleich 2. Deshalb lautet die Bestimmungsgleichung für $B_{\rm K}$:

$$\begin{aligned} &|\varphi_{\rm F}(B_{\rm K})| = 1 \hspace{0.3cm} \Rightarrow \hspace{0.3cm} |\varphi_{\rm F}(B_{\rm K})|^2 = 1 \hspace{0.3cm} \Rightarrow \hspace{0.3cm} 2 + 2 \cdot \cos(2\pi \cdot B_{\rm K} \cdot \tau_0) = 1\\ &\Rightarrow \hspace{0.3cm} \cos(2\pi \cdot B_{\rm K} \cdot \tau_0) = -0.5 \hspace{0.3cm} \Rightarrow \hspace{0.3cm} 2\pi \cdot B_{\rm K} \cdot \tau_0 = \frac{2\pi}{3} \hspace{0.3cm} \Rightarrow \hspace{0.3cm} B_{\rm K} = \frac{1}{3\tau_0} = 333\,{\rm kHz}\,. \end{aligned}$$

Richtig ist somit der Lösungsvorschlag 1. Die Grafik (blaue Kurve) verdeutlicht das Ergebnis.



e) Für den Kanal B lauten die entsprechenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\Phi_{\rm V}(\tau) &= 1^2 \cdot \delta(\tau) + (-0.5)^2 \cdot \delta(\tau - \tau_0)\,,\\ \varphi_{\rm F}(\Delta f) &= 1 + 0.25 \cdot \cos(2\pi \cdot \Delta f \cdot \tau_0) - {\rm j} \cdot 0.25 \cdot \sin(2\pi \cdot \Delta f \cdot \tau_0)\,,\\ |\varphi_{\rm F}(\Delta f)| &= = \sqrt{\frac{17}{16} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot \Delta f \cdot \tau_0)}\\ \Rightarrow \quad & {\rm Max}\,|\varphi_{\rm F}(\Delta f)| = 1.25\,,\ \ {\rm Min}\,|\varphi_{\rm F}(\Delta f)| = 0.75\,.\end{aligned}$$

Man erkennt an diesem Resultat, dass hier die 50%–Kohärenzbandbreite nicht angebbar ist. Richtig ist also der Lösungsvorschlag 4.

Dieses Ergebnis ist der Grund dafür, dass es für die Kohärenzbandbreite in der Literatur unterschiedliche Definitionen gibt, zum Beispiel:

- die 90%–Kohärenzbandbreite ($B_{\rm K,\ 90\%}$ wäre hier 184 kHz),
- die vorne angegebene sehr einfache Näherung $B_{\rm K}'$ (im Beispiel 1 MHz).

Man erkennt bereits an diesen Zahlenwerten, dass alle diesbezüglichen Angaben sehr vage sind und sich die einzelnen „Kohärenzbandbreiten” um Faktoren unterscheiden können.

Musterlösung zur Aufgabe A2.8

a) Aus der Grafik auf der Angabenseite erkennt man folgende Eigenschaft:

$$10 \cdot \lg\left(\frac{\Phi_{\rm V}(\tau_{-30})}{\Phi_0}\right) = 10 \cdot \lg\left[\exp[-\frac{\tau_{-30}}{\tau_0}]\right] \stackrel{!}{=} -30\,{\rm dB}$$

$$\Rightarrow \quad \lg\left[\exp[-\frac{\tau_{-30}}{\tau_0}]\right] = -3 \quad \Rightarrow \quad \ln\left[\exp[-\frac{\tau_{-30}}{\tau_0}]\right] = -3 \cdot \ln(10)$$

$$\Rightarrow \quad \tau_0 = \frac{\tau_{-30}}{3 \cdot \ln(10)} \approx \frac{\tau_{-30}}{6.9}\,.$$

Hierbei bezeichnet τ_{-30} die Verzögerungszeit, die zum logarithmischen Ordinatenwert –30 dB führt. Damit erhält man

- für ländliches Gebiet (*Rural Area*, **RA**) mit τ_{-30} = 0.75 µs:

$$\tau_0 = \frac{0.75\,\mu{\rm s}}{6.9} \approx \underline{0.109\,\mu{\rm s}}\,,$$

- für Städte und Vororte (*Typical Urban*, **TU**) mit τ_{-30} = 6.9 µs:

$$\tau_0 = \frac{6.9\,\mu{\rm s}}{6.9} \underline{\approx 1\,\mu{\rm s}}\,,$$

b) In der **Aufgabe A2.7** wurde gezeigt, dass die Mehrwegeverbreiterung $T_{\rm V}$ gleich τ_0 ist, wenn das Verzögerungs–Leistungsdichtespektrum entsprechend exp($-\tau/\tau_0$) exponentiell abfällt. Es gilt demnach

- für „Rural Area”: $T_{\rm V}$ $\underline{= 0.109\ \mu s}$,
- für „Typical Urban”: $T_{\rm V}$ $\underline{= 1\ \mu s}$.

c) In **Aufgabe A2.7** wurde auch gezeigt, dass für die Kohärenzbandbreite $B_{\rm K} \approx 0.276/\tau_0$ gilt. Daraus folgt $B_{\rm K}$ $\underline{\approx 2500\ \rm kHz}$ („Rural Area”) bzw. $B_{\rm K}$ $\underline{\approx 276\ \rm kHz}$ („Typical Urban”).

d) Richtig ist hier der <u>zweite Lösungsvorschlag</u>. Frequenzselektivität des Mobilfunkkanals ist immer dann gegeben, wenn die Signalbandbreite $B_{\rm S}$ größer ist als die Kohärenzbandbreite $B_{\rm K}$ (oder zumindest in der gleichen Größenordnung liegt). Je kleiner $B_{\rm K}$ ist, um so häufiger ist dies der Fall.

e) Entsprechend der angegebenen Gleichung ist $\Phi_{\rm V}(\tau = 5.001\ \mu s)/\Phi_0$ <u>näherungsweise 0.5</u>. Dagegen gilt für geringfügig kleineres τ (z.B. τ = 4.999 µs) mit guter Näherung:

$$\frac{\Phi_{\rm V}(\tau = 4.999\,\mu{\rm s})}{\Phi_0} = \exp(-\frac{4.999\,\mu{\rm s}}{1\,\mu{\rm s}}) \approx \exp(-5)\ \underline{= 6.74 \cdot 10^{-3}}\,.$$

f) Für die Leistung P_1 aller Signalanteile mit Verzögerungszeiten zwischen 0 und 5 µs gilt:

$$P_1 = \Phi_0 \cdot \int_0^{5\,\mu{\rm s}} \exp[-\tau/\tau_0]\ {\rm d}\tau \ \approx\ \Phi_0 \cdot \int_0^{\infty} \exp[-\tau/\tau_0]\ {\rm d}\tau = \Phi_0 \cdot \tau_0\,.$$

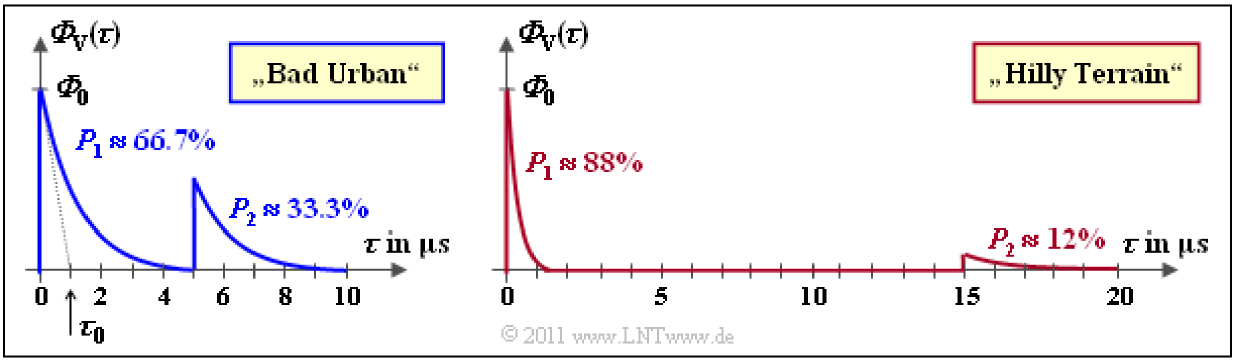
Für den zweiten Anteil erhält man:

$$P_2 = \frac{\Phi_0}{2} \cdot \int_{5\,\mu s}^{\infty} \exp[\frac{5\,\mu s - \tau}{\tau_0}]\, d\tau \approx \frac{\Phi_0}{2} \cdot \int_0^{\infty} \exp[-\tau/\tau_0]\, d\tau = \frac{\Phi_0 \cdot \tau_0}{2}.$$

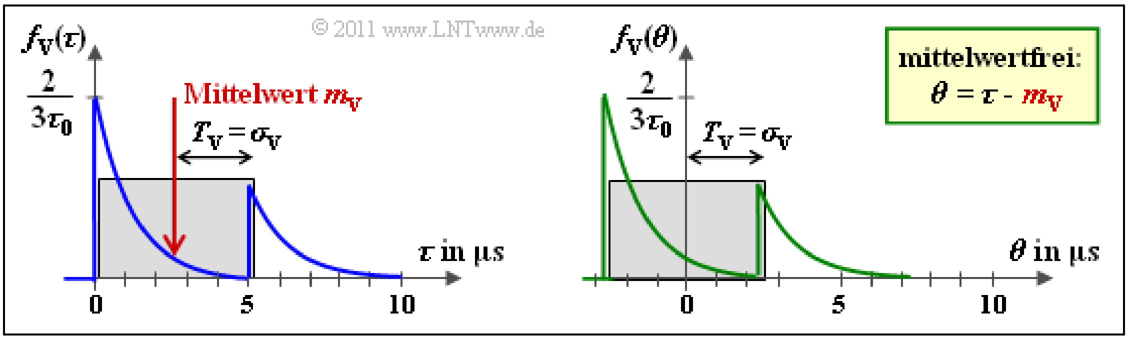
Dementsprechend beträgt der prozentuale Anteil des ersten Anteils:

$$\frac{P_1}{P_1 + P_2} = \frac{2}{3} \underline{\approx 66.7\%}.$$

Die folgende Grafik zeigt $\Phi_V(\tau)$ in linearem Maßstab. Eingezeichnet sind die Flächen P_1 und P_2. Die linke Abbildung gilt für „Bad Urban", die rechte für „Hilly Terrain". Bei Letzerem beträgt der Leistungsanteil aller späteren Echos (später als 15 µs) nur etwa 12%.



g) Die Fläche über das gesamte Leistungsdichtespektrum ergibt $P = 1.5 \cdot \phi_0 \cdot \tau_0$. Normiert man $\Phi_V(\tau)$ auf diesen Wert, so erhält man die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_V(\tau)$, wie in der nächsten Grafik dargestellt (linkes Diagramm).



Mit $\tau_0 = 1$ µs und $\tau_5 = 5$ µs ergibt sich somit für den linearen Mittelwert:

$$m_V = \int_0^{\infty} f_V(\tau)\, d\tau = \frac{2}{3\tau_0} \cdot \int_0^{\tau_5} \tau \cdot \exp[-\frac{\tau}{\tau_0}]\, d\tau + \frac{1}{3\tau_0} \cdot \int_{\tau_5}^{\infty} \tau \cdot \exp[\frac{\tau_5 - \tau}{\tau_0}]\, d\tau.$$

Das erste Integral ist nach der angegebenen Gleichung gleich $2\tau_0/3$. Mit der Substitution $\tau' = \tau - \tau_5$ erhält man schließlich unter Verwendung der vorne angegebenen Integrallösungen:

$$\begin{aligned} m_V &= \frac{2\tau_0}{3} + \frac{1}{3\tau_0} \cdot \int_0^{\infty} (\tau_5 + \tau') \cdot \exp[-\frac{\tau'}{\tau_0}]\, d\tau' = \\ &= \frac{2\tau_0}{3} + \frac{\tau_5}{3\tau_0} \cdot \int_0^{\infty} \exp[-\frac{\tau'}{\tau_0}]\, d\tau' + \frac{1}{3\tau_0} \cdot \int_0^{\infty} \tau' \cdot \exp[-\frac{\tau'}{\tau_0}]\, d\tau' = \\ &= \frac{2\tau_0}{3} + \frac{\tau_5}{3} + \frac{\tau_0}{3} = \tau_0 + \frac{\tau_5}{3} \underline{\approx 2.667\,\mu s}. \end{aligned}$$

Die Varianz σ_V^2 ist gleich dem quadratischen Mittelwert der mittelwertbefreiten Zufallsgröße $\theta = \tau - m_V$, deren WDF in der rechten Grafik dargestellt ist. Daraus lässt sich $T_V = \sigma_V$ angeben.

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, zunächst den quadratischen Mittelwert der Zufallsgröße τ zu berechnen und daraus die Varianz σ_V^2 mit dem Satz von Steiner. Mit den bereits oben beschriebenen Substitutionen und Näherungen erhält man so:

$$\begin{aligned}
m_{V2} \;\approx\; & \frac{2}{3\tau_0} \cdot \int_0^\infty \tau^2 \cdot \exp[-\frac{\tau}{\tau_0}]\ \mathrm{d}\tau + \frac{1}{3\tau_0} \cdot \int_0^\infty (\tau_5 + \tau')^2 \cdot \exp[-\frac{\tau'}{\tau_0}]\ \mathrm{d}\tau' = \\
= \;& \frac{2}{3} \cdot \int_0^\infty \frac{\tau^2}{\tau_0} \cdot \exp[-\frac{\tau}{\tau_0}]\ \mathrm{d}\tau + \frac{\tau_5^2}{3} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\tau_0} \cdot \exp[-\frac{\tau'}{\tau_0}]\ \mathrm{d}\tau' + \\
+ \;& \frac{2\tau_5}{3} \cdot \int_0^\infty \frac{\tau'}{\tau_0} \cdot \exp[-\frac{\tau'}{\tau_0}]\ \mathrm{d}\tau' + \frac{1}{3} \cdot \int_0^\infty \frac{\tau'^2}{\tau_0} \cdot \exp[-\frac{\tau'}{\tau_0}]\ \mathrm{d}\tau'.
\end{aligned}$$

Mit den vorne angegebenen Integralen folgt daraus:

$$m_{V2} \approx \frac{2}{3} \cdot 2\tau_0^2 + \frac{\tau_5^2}{3} \cdot 1 + \frac{2\tau_5}{3} \cdot \tau_0 + \frac{1}{3} \cdot 2\tau_0^2 = 2\tau_0^2 + \frac{\tau_5^2}{3} + \frac{2 \cdot \tau_0 \cdot \tau_5}{3}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \sigma_V^2 \;&=\; m_{V2} - m_V^2 = 2\tau_0^2 + \frac{\tau_5^2}{3} + \frac{2 \cdot \tau_0 \cdot \tau_5}{3} - (\tau_0 + \frac{\tau_5}{3})^2 = \\
&=\; \tau_0^2 + \frac{2\tau_5^2}{9} = (1\,\mu\mathrm{s})^2 + \frac{2 \cdot (5\,\mu\mathrm{s})^2}{9} = 6.55\,(\mu\mathrm{s})^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad T_V = \sigma_V \ \underline{\approx 2.56\,\mu\mathrm{s}}\,.$$

In obiger Grafik sind die Kenngrößen T_V und σ_V eingezeichnet.

Musterlösung zur Aufgabe A2.9

a) Richtig sind hier der Lösungsvorschläge 1 und 2. Doppler–WDF und Doppler–LDS sind im allgemeinen nur formgleich. Da aber im betrachteten Beispiel das Integral über $\Phi_\text{D}(f_\text{D})$ gleich 1 ist, erkennbar am Korrelationswert $\varphi_\text{Z}(\Delta t = 0) = 1$, trifft hier sogar die Identität zu. Bei anderer Wahl des Rayleigh–Parameters σ würde dies allerdings nicht gelten.

b) Aus der Achsensymmetrie von $\Phi_\text{D}(f_\text{D})$ erkennt man, dass der Mittelwert $m_\text{D} = E[f_\text{D}] = 0$ ist. Die Varianz der Zufallsgröße f_D kann somit direkt als quadratischer Mittelwert berechnet werden:

$$\sigma_\text{D}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\text{D}^2 \cdot \Phi_\text{D}(f_\text{D})\,\text{d}f_\text{D} = \int_{-f_\text{D,\,max}}^{+f_\text{D,\,max}} \frac{f_\text{D}^2}{\pi \cdot f_\text{D,\,max} \cdot \sqrt{1-(f_\text{D}/f_\text{D,\,max})^2}}\,\text{d}f_\text{D}\,.$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie und mit der Substitution $u = f_\text{D}/f_\text{D,\,max}$ ergibt sich daraus:

$$\sigma_\text{D}^2 = \frac{2}{\pi} \cdot f_\text{D,\,max}^2 \cdot \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\,\text{d}u\,.$$

Mit dem auf der Angabenseite angegebenen Integral erhält man weiter:

$$\begin{aligned}\sigma_\text{D}^2 &= \frac{2}{\pi} \cdot f_\text{D,\,max}^2 \cdot \left[-\frac{u}{2}\cdot\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2}\cdot \arcsin(u)\right]_0^1 = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot f_\text{D,\,max}^2 \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{f_\text{D,\,max}^2}{2}\,.\end{aligned}$$

Die Dopplerverbreiterung ist gleich der Streuung, also der Wurzel aus der Varianz:

$$B_\text{D} = \sigma_\text{D} = \frac{f_\text{D,\,max}}{\sqrt{2}} = \begin{cases} \underline{35.35\,\text{Hz}} & \text{für } f_\text{D,\,max} = 50\,\text{Hz} \\ \underline{70.7\,\text{Hz}} & \text{für } f_\text{D,\,max} = 100\,\text{Hz} \end{cases}\,.$$

c) Mit den angegebenen Besselwerten erhält man

- für $f_\text{D,\,max} = 50$ Hz:

$$\varphi_\text{Z}(\Delta t = 5\,\text{ms}) = \text{J}_0(2\pi \cdot 50\,\text{Hz} \cdot 5\,\text{ms}) = \text{J}_0(\pi/2)\,\underline{= 0.472}\,,$$

- für $f_\text{D,\,max} = 100$ Hz:

$$\varphi_\text{Z}(\Delta t = 5\,\text{ms}) = \text{J}_0(\pi)\,\underline{= -0.305}\,.$$

d) Die Korrelationsdauer T_D ergibt sich aus der Zeitkorrelationsfunktion $\varphi_\text{Z}(\Delta t)$. T_D ist derjenige Δt–Wert, bei dem $|\varphi_\text{Z}(\Delta t)|$ auf die Hälfte seines Maximalwertes abgeklungen ist. Es muss gelten:

$$\begin{aligned}&\varphi_\text{Z}(\Delta t = T_\text{D}) = \text{J}_0(2\pi \cdot f_\text{D,\,max} \cdot T_\text{D}) \stackrel{!}{=} 0.5 \\ &\Rightarrow\quad 2\pi \cdot f_\text{D,\,max} \cdot T_\text{D} = 1.52 \quad\Rightarrow\quad T_\text{D} = \frac{1.52}{2\pi\, f_\text{D,\,max}} = \frac{0.242}{f_\text{D,\,max}} \\ &\Rightarrow\quad f_\text{D,\,max} = 50\,\text{Hz}\;:\quad T_\text{D} \approx \underline{4.84\,\text{ms}}\,, \\ &\qquad f_\text{D,\,max} = 100\,\text{Hz}\;:\quad T_\text{D} \approx \underline{2.42\,\text{ms}}\,.\end{aligned}$$

e) In den Teilaufgaben (b) und (d) haben wir erhalten:

$$B_{\rm D} = \frac{f_{\rm D,\, max}}{\sqrt{2}}\,, \quad T_{\rm D} = \frac{1.52}{2\pi f_{\rm D,\, max}} \quad \Rightarrow \quad B_{\rm D} \cdot T_{\rm D} = \frac{1.52}{\sqrt{2} \cdot 2\pi} \underline{\approx 0.171}\,.$$

Richtig ist demnach der <u>letzte Lösungsvorschlag</u>.