

Überblick zu Kapitel 1 von „Mobile Kommunikation“

Das erste Kapitel beschäftigt sich mit **zeitvarianten Übertragungskanälen**, eine Eigenschaft, die für die mobile Kommunikation von großer Bedeutung ist. Wie im gesamten Buch erfolgt die Beschreibung im äquivalenten Tiefpassbereich. Im Einzelnen werden behandelt:

- die *distanzabhängige Dämpfung* eines Funksignals und verschiedene *Pfadverlustmodelle*,
- der durch das *Lognormal-Fading* modellierbare Einfluss von *Abschattung* („Shadowing“),
- das nichtfrequenzselektive *Rayleigh-Fading* für Kanäle ohne „Line of Sight (LoS)“,
- die Berücksichtigung des *Dopplereffektes* durch das sogenannte *Jakes-Spektrum*,
- das nichtfrequenzselektive *Rice-Fading* für Kanäle mit Direktpfad (Line of Sight).

Geeignete Literatur: [Cla68] – [Eic07] – [Gol06] – [Hag05] – [Hin08] – [Jak74] – [Kra15] – [Mol05] – [PA95] – [Rap99] – [Sk101] – [Söd01] – [Vie16] – [Zan05]

Die grundlegende Theorie wird auf 23 Seiten dargelegt. Dazu beinhaltet dieses erste Kapitel noch 34 Grafiken, sieben Aufgaben und fünf Zusatzaufgaben mit insgesamt 57 Teilaufgaben, sowie drei Lernvideos (LV) und vier Interaktionsmodule (IM):

- **Eigenschaften von TP- und BP-Signalen** (LV zu Kap. 1.1, Dauer 5:18)
- **Eigenschaften des Übertragungskanals** (LV zu Kap. 1.1, Dauer 5:50)
- **Erzeugung einer Exponentialverteilung** (LV zu Kap. 1.1, Dauer 2:00)
- **Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen** (IM zu Kap. 1.1)
- **WDF, VTF und Momente** (IM zu Kap. 1.2)
- **Besselfunktion erster Art und n -ter Ordnung** (IM zu Kap. 1.3)
- **Zur Verdeutlichung des Dopplereffekts** (IM zu Kap. 1.3)

Weitere Informationen zum Thema, zahlreiche Aufgaben und Simulationen finden Sie im Versuch „Mobilfunkkanal“ des Praktikums „Simulation digitaler Übertragungssysteme“ von Prof. Günter Söder am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Technischen Universität München.

Diese Veranstaltung basiert auf dem Windows-Programm MFK des Softwarepakets *LNTwin*.

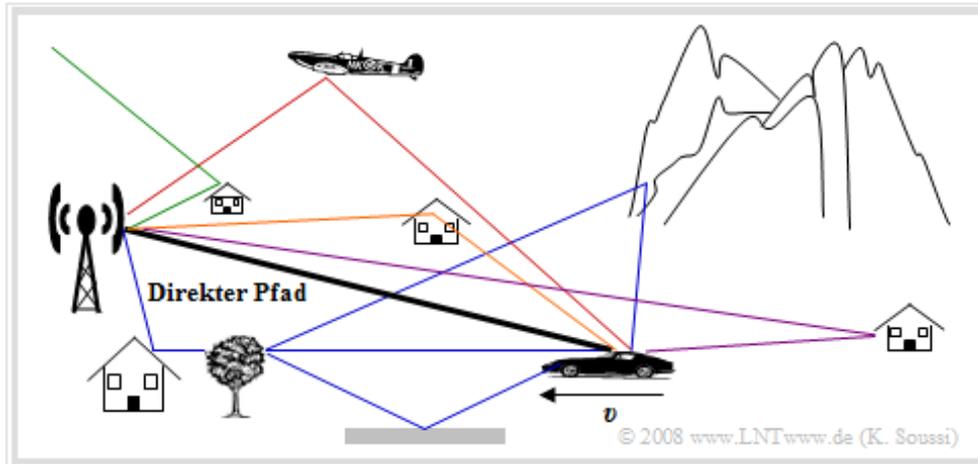
Hinweise zum Herunterladen des Programms und der Versuchsanleitung:

Windows-Programm „MFK“ (Zip-Version)

Praktikumsanleitung (PDF-Version, ca. 872 kB)

Physikalische Beschreibung des Mobilfunkkanals

Die Grafik zeigt ein typisches Mobilfunkszenario mit fester Basisstation und einem mobilen Teilnehmer, der sich mit der Geschwindigkeit v auf die Basisstation zu bewegt. Bei dieser Darstellung erreicht das Funksignal die Mobilstation über einen direkten Pfad. Die Antenne des mobilen Teilnehmers empfängt aber auch noch weitere Signalanteile, die auf Umwegen zum Empfänger gelangen, zum Beispiel aufgrund von Reflexionen an Häusern, einem Gebirge, einem Flugzeug, der Ionosphäre oder dem Erdboden.



Anhand dieses Szenarios lassen sich wichtige Probleme bei der Mobilkommunikation erklären:

- **Pfadverlust** (englisch: *Path Loss*): Dieser erfasst die Dämpfung der elektromagnetischen Welle, die in starkem Maße von der Entfernung zwischen Sender und Empfänger abhängt.
- **Abschattung** (englisch: *Shadowing*, *Long Term Fading*): Diese bezeichnet eine langsame Veränderung der Empfangsbedingungen aufgrund der sich ändernden Umgebung, zum Beispiel, wenn man an einem Gebäude vorbeifährt oder wenn man ein Waldstück verlässt.
- **Mehrwegeausbreitung** (englisch: *Multipath Propagation*): Gelangt das Signal auf mehreren Wegen mit Laufzeitunterschieden zum Empfänger, so kommt es – je nach Signalfrequenz – zu konstruktiven oder destruktiven Überlagerungen bis hin zu völliger Auslöschung. Für bestimmte Frequenzen ist die Topologie günstig, für andere ungünstig. Deshalb wird dieser Effekt auch als *frequenzselektives Fading* bezeichnet.
- **Zeitvarianz** (englisch: *Time Variation*): Der Effekt entsteht durch die Bewegung des Senders und/oder des Empfängers, da zu jeder Zeit ein anderer Kanal vorliegt. Die Übertragungsqualität sinkt rapide, wenn der direkte Pfad durch ein Hindernis abgeschattet ist. Das Empfangssignal setzt sich dann nur aus den auf Umwegen eintreffenden Teilsignalen zusammen, die aufgrund von Streuungen an Bäumen und Sträuchern sowie eventuell Brechungs- und Beugungserscheinungen gegenüber dem direkten Pfad abgeschwächt sind und sich vektoriell zum Gesamtsignal addieren.
- **Dopplereffekt** (englisch: *Doppler Spread*): Je nachdem, ob (und auch in welchem Winkel) sich die Mobilstation auf den Sender zu bewegt oder sich von diesem entfernt, kommt es zu (leichten) Frequenzverschiebungen und damit zu statistischen Bindungen innerhalb des empfangenen Signals, die **Impulsinterferenzen** bewirken.

In Kapitel 1.1 betrachten wir Pfadverlust und Abschattungseffekte genauer. Die Zeitvarianz ist Inhalt von Kapitel 1.2 und 1.4, auch unter Berücksichtigung des Dopplereffektes (Kapitel 1.3). Das Kapitel 2 beschreibt die Mehrwegeausbreitung, die beim Mobilfunk Echos zur Folge hat.

Freiraumausbreitung

Man spricht von **Freiraumausbreitung**, wenn zwischen Sender und Empf채nger (im Abstand d) eine Sichtverbindung besteht wie bei der Satellitenkommunikation oder im Weltraum. Die Radiowellen breiten sich im „leeren Raum“ ungehindert kugelf枚rmig um die Sendeantenne aus, werden aber aufgrund des Energieerhaltungssatzes mit zunehmender Entfernung abgeschw채cht.

Geometrisch kann man sich das so vorstellen, dass der Radius R der Kugel und damit auch die Kugelfl채che immer gr枚脗er und bei konstanter Gesamtenergie der Energieanteil pro Fl채cheneinheit proportional zu $1/R^2$ immer kleiner wird.

Wir gehen von einer unmodulierten Schwingung der Frequenz f_S bzw. der Wellenl채nge $\lambda = c/f_S$ aus, wobei $c = 3 \cdot 10^8$ m/s die Lichtgeschwindigkeit angibt. Die Signalleistung sei P_S .

Harald Friis hat 1944 eine Gleichung f체r die Empfangsleistung $P_E(d)$ im Abstand d angegeben, die allerdings nur im Vakuum g체ltig ist:

$$P_E(d) = \frac{P_S \cdot G_S \cdot G_E \cdot \lambda^2}{16 \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot V_{\text{zus}}} = \frac{P_S \cdot G_S \cdot G_E / V_{\text{zus}}}{K_{\text{FR}}(d)}.$$

G_S bzw. G_E bezeichnen die Antennengewinne von Sender und Empf채nger. $V_{\text{zus}} > 1$ fasst alle Verluste zusammen, die unabh채ngig von der Wellenausbreitung sind, z.B. die Verluste durch die Antennen-Kabelzuf체hrungen. Die **Freiraumd채mpfung** $K_{\text{FR}}(d)$ h채ngt von der Distanz d ab:

$$K_{\text{FR}}(d) = K_{\text{FR}}(d_0) \cdot (d/d_0)^2 \quad \text{mit} \quad K_{\text{FR}}(d_0) = [4 \cdot \pi \cdot d_0 / \lambda]^2.$$

Meist wird die Freiraumd채mpfung logarithmisch mit der Pseudoeinheit „dB“ angegeben. Dann gilt f체r den Leistungsverlust durch die Freiraumd채mpfung („V“ steht f체r „Verlust“ in dB):

$$V_{\text{FR}}(d) = 10 \cdot \lg K_{\text{FR}}(d) = V_0 + 20 \text{ dB} \cdot \lg (d/d_0), \\ V_0 = V_{\text{FR}}(d_0) = 20 \text{ dB} \cdot \lg (4\pi d_0 / \lambda).$$

Zu diesen Gleichungen ist anzumerken:

- Sie gilt nur im Fernfeld der Antenne ($d > d_F$). $d_F = 2 D^2 / \lambda$ ist die **Fraunhofer-Distanz**. F체r D ist hierbei die gr枚脗te physikalische Abmessung der Sendeantenne einzusetzen.
- Die obige Formel gilt nicht f체r $d \rightarrow 0$. Hierf체r erg채be sich der Grenzwert $K_{\text{FR}} \rightarrow 0$, und es erg채be sich unabh채ngig von P_S stets eine unendliche Empfangsleistung $P_E(d \rightarrow 0)$.
- Die Freiraumd채mpfung $K_{\text{FR}}(d)$ nimmt mit zunehmender Entfernung d quadratisch zu und ebenfalls quadratisch mit zunehmender Signalfrequenz f_S , das hei脗t, mit kleiner werdender Wellenl채nge λ .
- Beispielsweise gilt beim GSM/E-Netz ($f_S = 1.8 \text{ GHz} \Rightarrow \lambda \approx 17 \text{ cm}$): $K_{\text{FR}}(d = 1 \text{ km}) = 1.6 \cdot 10^9$.
Beim Empf채nger im Abstand von 1 km kommt also nicht mal ein Milliardstel der Sendeleistung an.

In der **Aufgabe Z1.1** soll die obige Friis-Gleichung numerisch ausgewertet und interpretiert werden. Oft setzt man die Freiraumd채mpfung in Bezug zu einer geeignet zu definierenden Normierungsdistanz d_0 , wobei man h채ufig $d_0 = 1 \text{ m}$ verwendet.

Gebräuchliches Pfadverlustmodell

Im Gegensatz zu Satelliten- und Richtfunk-Übertragungstrecken sind beim Landmobilfunk neben der Freiraumdämpfung weitere störende Effekte zu berücksichtigen, die ebenfalls zu einer Verminderung der Empfangsleistung beitragen, nämlich:

- **Reflexionen:** Durch Überlagerung des Sendesignals mit einer am Erdboden oder an anderen großen glatten Oberflächen reflektierten Signalkomponente können Auslöschungen entstehen, die eine Abnahme der Empfangsleistung bis zur Potenz 4 des Abstandes d zwischen Sender und Empfänger bewirken. Mehr hierzu finden Sie in **[Zan05]** und **[PA95]**.
- **Beugung:** Hiervon spricht man, wenn das Signal nicht reflektiert, sondern – zum Beispiel an einer Gebäudekante – von seiner Ausbreitungsrichtung abgelenkt wird. Eine physikalische Erklärung findet man wieder in **[Zan05]**.
- **Streuung:** Ist die Verbindung Sender – Empfänger durch mehrere Objekte mit unregelmäßiger Oberfläche (zum Beispiel Bäume oder Sträucher) unterbrochen, so trifft das Signal am Empfänger in Form vieler Streusignale mit leicht unterschiedlichen Laufzeiten ein. Die Größe des Hindernisses bestimmt dabei, ob dieses als reflektierendes oder als streuendes Objekt aufzufassen ist.

Diese Effekte sind dafür verantwortlich, dass man Mobilfunk auch ohne direkte Sichtverbindung betreiben kann, und die Grundlage für den wirtschaftlichen Erfolg der Mobilfunksysteme. Negativ wirken sich diese Effekte durch eine geringere Empfangsleistung aus, was durch einen größeren Exponenten als $\gamma = 2$ berücksichtigt werden muss. Wir sprechen dann nicht mehr von Freiraumdämpfung, sondern allgemein vom *Pfaddämpfungsfaktor*:

$$K_P(d) = K_P(d_0) \cdot (d/d_0)^\gamma.$$

Die entsprechende dB-Größe nennen wir **Pfadverlust** („lg“ ist der Logarithmus zur Basis 10):

$$V_P(d) = V_0 + \gamma \cdot 10 \text{ dB} \cdot \lg(d/d_0),$$
$$V_0 = V_P(d_0) = \gamma \cdot 10 \text{ dB} \cdot \lg \frac{4 \cdot \pi \cdot d_0}{\lambda}.$$

Aus diesen Gleichungen ist zu ersehen, dass die Freiraumdämpfung $V_{FR}(d)$ ein Sonderfall von $V_P(d)$ mit $\gamma = 2$ ist. In **[Zan05]** werden einige Zahlenwerte für den Exponenten γ angegeben, die als Mittelwerte über eine Vielzahl von Messungen bestimmt wurden. Unter anderem gilt

- bei freier Sichtverbindung (Satelliten, Richtfunk): $\gamma \approx 2$,
- in städtischer Umgebung: $\gamma = 2.7 \dots 3.5$,
- in abgeschatteter städtischer Umgebung: $\gamma = 3.0 \dots 5.0$,
- innerhalb von Gebäuden ohne Sichtverbindung: $\gamma = 4.0 \dots 6.0$.

Weitere, exaktere Pfadverlustmodelle

Das relativ einfache Pfadverlustmodell entsprechend der letzten Seite ist gut geeignet für Makrozellen, setzt allerdings hohe Antennen der Basisstationen voraus. Es wird beispielsweise als Referenz-Szenario bei der Standardisierung von **Long Term Evolution (LTE)** eingesetzt.

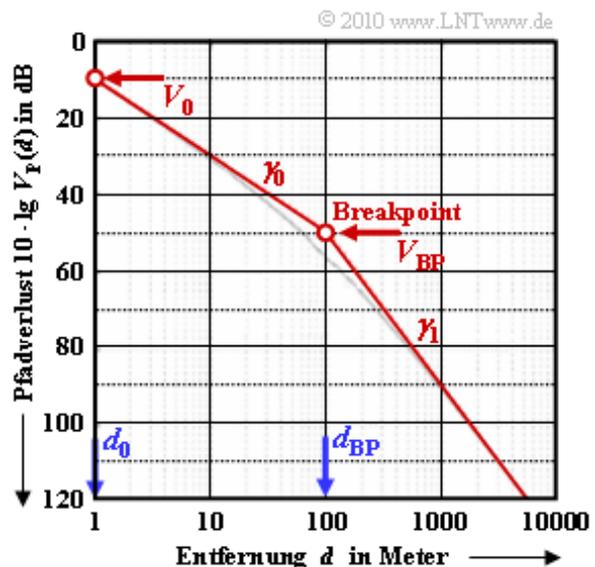
Natürlich kann dieses sehr einfache Zweiparameter-Modell (V_0, γ) nicht alle Anwendungsfälle mit ausreichender Genauigkeit wiedergeben. Vielmehr findet man in der Literatur eine Vielzahl weiterer Modelle für die Leistungsdämpfung, die genauer an spezifische Randbedingungen (Umgebungen) angepasst sind und auch unterschiedliche Zellgrößen berücksichtigen. Bekannt sind zum Beispiel (siehe **[Gol06]**)

- das Okumura-Hata-Modell,
- das Pfadverlustmodell gemäß COST 231,
- das *Dual-Slope*-Modell.

Letzteres wird oft für Simulationen von Mikrozellen im städtischen Bereich eingesetzt. Es lautet mit den Kenngrößen $d_0 = 1$ m und d_{BP} (*Breakpoint*, beispielsweise $d_{BP} = 100$ m):

$$V_P(d) = V_0 + \gamma_0 \cdot 10 \text{ dB} \cdot \lg(d/d_0) + (\gamma_1 - \gamma_0) \cdot 10 \text{ dB} \cdot \lg(1 + d/d_{BP}) .$$

Die Grafik zeigt diesen Verlauf für $V_0 = 10$ dB, $\gamma_0 = 2$ und $\gamma_1 = 4$ im Bereich von einem Meter bis zu mehreren Kilometern (grauer Kurvenzug).



Häufig wird zur Vereinfachung die in der Grafik rot eingezeichnete asymptotische Näherung

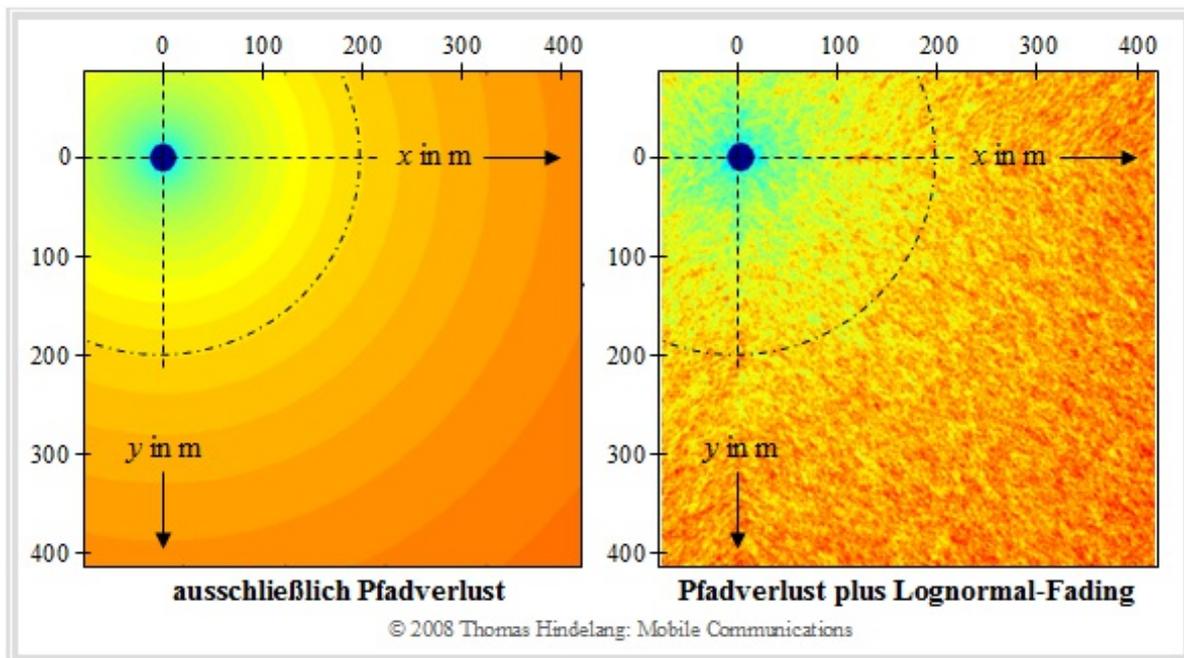
$$V_P(d) = \begin{cases} V_0 + \gamma_0 \cdot 10 \text{ dB} \cdot \lg(d/d_0), & \text{für } d < d_{BP}, \\ V_{BP} + \gamma_1 \cdot 10 \text{ dB} \cdot \lg(d/d_{BP}), & \text{für } d \geq d_{BP} \end{cases}$$

verwendet. Der Wert $V_{BP} = 50$ dB ergibt sich aus der Gleichung für den ersten Abschnitt an der Grenze $d = 100$ m des Gültigkeitsbereiches.

Hinweis: In der **Aufgabe A1.1** wird dieses Modell noch eingehend untersucht.

Zus채tzlicher Verlust durch Abschattungen (Shadowing)

Die bisherigen Pfadverlustmodelle beruicksichtigen nur die distanzabh채ngige Signald채mpfung gem채u der linken Grafik und lassen topologische Gegebenheiten wie den Einfluss von Abschattungen (englisch: *Shadowing*) auuer Acht. Im Landmobilfunk fuhren Abschattungen dazu, dass der Signalpegel auch dann nicht konstant ist, wenn man sich im gleichen Abstand von der Basisstation (auf einem Kreisbogen) bewegt. Diesen Sachverhalt zeigt die rechte Grafik, wobei dunklere Bereiche einen gruuueren Pfadverlust kennzeichnen. Der Unterschied zwischen linkem und rechtem Bild ist auf „Shadowing“ zuruickzufuhren.



Die Auswirkungen von Abschattungen (*Shadowing*) lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Bei ruhenden Sender und Empf채nger ist die Abschattung deterministisch zu betrachten. Sie fuhrt dazu, dass der Pfadverlust aufgrund Abschattung um einen konstanten Wert V_S (in dB) ver채ndert wird:

$$V_P(d) = V_0 + \gamma \cdot 10 \text{ dB} \cdot \lg(d/d_0) + V_S.$$

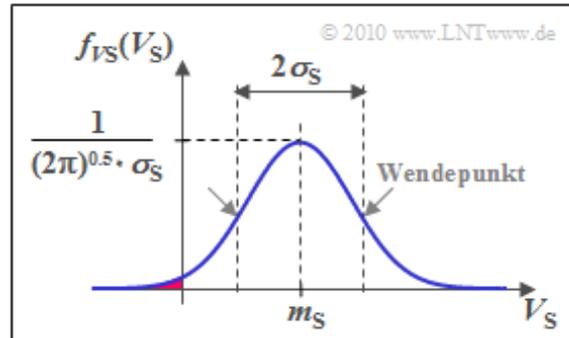
- Bewegt sich der Empf채nger (oder auch der Sender), so 채ndert sich der *Shadowing*-Verlust entsprechend den Koordinaten und demzufolge auch mit der Zeit: $V_S \Rightarrow V_S(x, y)$ bzw. $V_S(t)$.
- Allerdings sind solche Kanal채nderungen aufgrund von Abschattungen sehr langsam. Oft bleiben die Bedingungen uiber mehrere Sekunden gleich und man spricht hier von *Long Term Fading* im Gegensatz zu schnellem Fading wie **Rayleigh-Fading** und **Rice-Fading**.

Lognormal-Kanalmodell (1)

Zur Berücksichtigung des *Shadowing*-Verlustes V_S bei der Systemplanung muss man auf stochastische Modelle zurückgreifen, die sich aus empirischen Untersuchungen ergeben haben. Am bekanntesten ist das **Lognormal-Kanalmodell**, das für die Zufallsvariable V_S eine **Gaußsche WDF** zugrundelegt:

$$f_{V_S}(V_S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_S} \cdot \exp \left[-\frac{(V_S - m_S)^2}{2 \cdot \sigma_S^2} \right]$$

Der Name „Lognormal“ ergibt sich aus der Tatsache, dass die dB-Größe V_S , die über den Logarithmus aus dem linearen Leistungsdämpfungsfaktor abgeleitet wird, normalverteilt (und damit gaußisch) ist.



Das Lognormal-Kanalmodell ist durch zwei Parameter bestimmt:

- Der Mittelwert $m_S = E[V_S]$ gibt den mittleren Shadowing-Verlust an. Für ländliches Gebiet wird mit $m_S = 6$ dB gerechnet, für städtisches Gebiet geht man von 14 dB ... 20 dB aus.
- Auch die Standardabweichung (oder Streuung) σ_S ist für ländliches Gebiet (≈ 6 dB) bzw. für städtische Bedingungen (zwischen 8 dB und 12 dB) unterschiedlich.

Beachten Sie, dass V_S beim Lognormal-Fading auch negative Werte annehmen kann (rote Hinterlegung in obiger Grafik), was der Vorstellung von Abschattung eigentlich widerspricht. In der Praxis hat sich dieses Modell allerdings als sehr gut erwiesen. Den „Gewinn durch Abschattung“ könnte man wie folgt interpretieren:

- In Häuserschluchten kann durch Reflexionen an Gebäuden mehr Energie ankommen, als es nach dem Pfadverlust zu erwarten wäre.
- Der Pfadverlustexponent γ wird stets fest vorgegeben. Im städtischen Gebiet wird häufig von $\gamma = 3.76$ ausgegangen. Aber es gibt Positionen in der Stadt, bei denen γ kleiner ist.
- Zu bedenken ist auch, dass ein solch einfaches Modell nicht alle Details exakt abbildet. Man sollte daher nicht versuchen, alle Modelleigenschaften physikalisch zu interpretieren.

Es ist zweckmäßig, die Pfadverlustanteile in folgender Weise zusammenzufassen:

$$V_P = V_1 + V_2(t) \quad \text{mit} \quad V_1 = V_0 + \gamma \cdot 10 \text{ dB} \cdot \lg(d/d_0) + m_S.$$

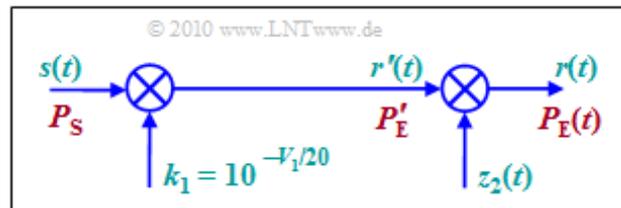
Der zweite Anteil $V_2(t)$ beschreibt nun eine Lognormal-WDF mit Mittelwert 0:

$$f_{V_2}(V_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_S} \cdot \exp \left[-\frac{V_2^2}{2 \cdot \sigma_S^2} \right]$$

Die Entfernungabhängigkeit von V_1 spielt keine große Rolle und wird hier nicht weiter betrachtet.

Lognormal-Kanalmodell (2)

Die Grafik zeigt ein Zeitbereichsmodell, mit dessen Hilfe der Pfadverlust V_P gemäß obiger Gleichung simulativ nachgebildet werden kann.



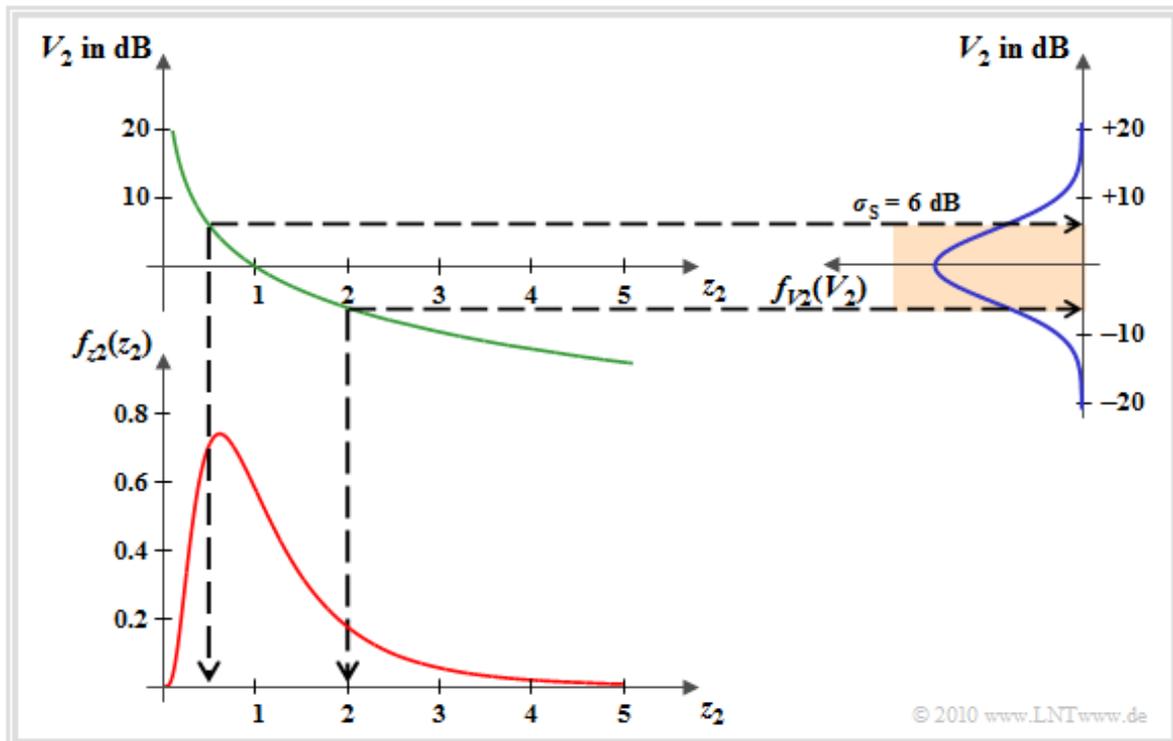
Dazu ist anzumerken:

- Das Eingangssignal $s(t)$ besitze die Leistung P_S . In logarithmischer Darstellung wird die Leistung auf 1 mW bezogen und es wird die Pseudoeinheit „dBm“ hinzugefügt.
- Der Pfadverlust V_1 wird durch die Multiplikation mit k_1 erzeugt. Das Ausgangssignal $r'(t)$ hat dann eine um V_1 (in dB) kleinere Leistung:

$$k_1 = 10^{-V_1/20} \Rightarrow 10 \cdot \lg \frac{P_{E'}}{1 \text{ mW}} = 10 \cdot \lg \frac{P_S}{1 \text{ mW}} + 20 \cdot \lg k_1 = 10 \cdot \lg \frac{P_S}{1 \text{ mW}} - V_1.$$

- Das (mittelwertfreie) Lognormal-Fading wird durch Multiplikation mit der Zufallsgröße $z_2(t)$ nachgebildet. Die WDF ergibt sich aus der Gaußschen Zufallsgröße V_2 durch eine **nichtlineare Transformation** an der Kennlinie $z_2 = g(V_2) = 10^{-V_2/20}$.
- Für $z_2 < 0$ ist diese WDF gleich 0, und für $z_2 \geq 0$ gilt mit der Abkürzung $C = \ln(10)/20$ dB:

$$f_{z_2}(z_2) = \frac{\exp \left[-\ln^2(z_2) / (2 \cdot C^2 \cdot \sigma_S^2) \right]}{\sqrt{2\pi} \cdot C \cdot \sigma_S \cdot z_2}.$$



Die Grafik verdeutlicht diese Transformation. Man erkennt die Gauß-WDF von V_2 (blau) mit Streuung $\sigma_S = 6$ dB, die negativ-logarithmische Kennlinie (grün) und die unsymmetrische WDF (rot) der zu multiplizierenden Größe $z_2(t)$. Wir verweisen hierzu auch auf die **Aufgabe Z1.2**.

Voraussetzungen für das restliche Kapitel 1

Die mittlere Leistung aller am Empfänger ankommenden Signalanteile können mit Hilfe von Pfadverlust- und Abschattungsmodell berechnet werden. Das Lognormal-Abschattungsmodell berücksichtigt langsame Änderungen der Reflektoren aufgrund der Topologie, wobei sich die Empfangsbedingungen in Städten nur alle fünf bis zehn Meter ändern und auf dem Land nur alle 30 bis 100 Meter. Im Folgenden wird der Pfadverlust und der Einfluss von Abschattungen nicht weiter betrachtet, sondern auf 1 normiert.

Pfade können sich konstruktiv oder destruktiv überlagern. Die damit zusammenhängenden Änderungen ergeben sich örtlich im Bereich der halben Wellenlänge. Beim Mobilfunk genügen dabei schon einige wenige Zentimeter, um völlig andere Empfangsbedingungen vorzufinden. Man spricht von **Fast Fading**. Ein solcher Kanal ist grundsätzlich frequenz- und zeitabhängig.

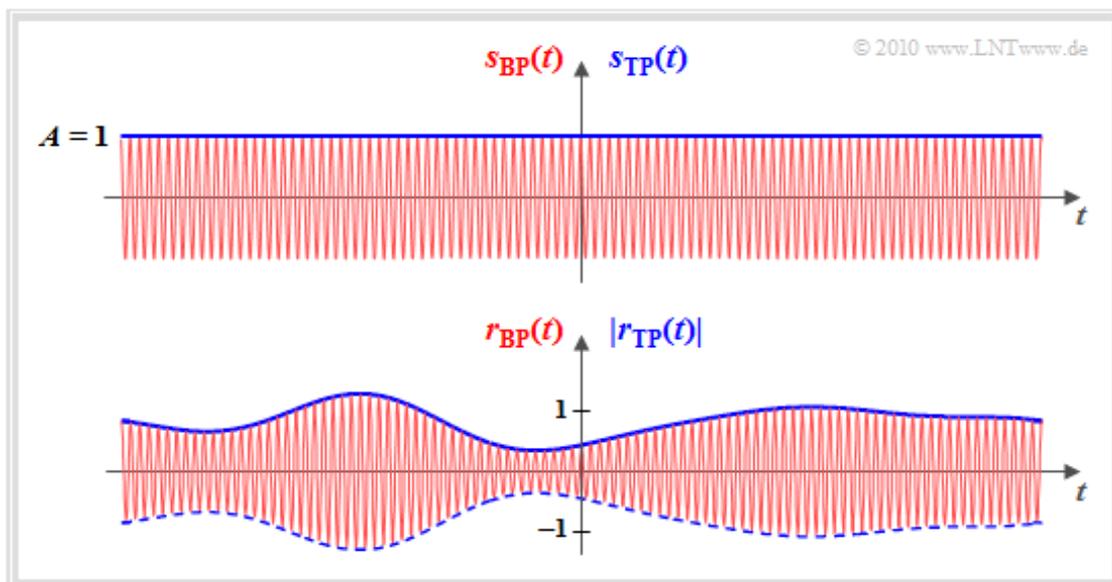
Für den Rest von Kapitel 1 wird die Frequenzabhängigkeit dadurch eliminiert, dass wir von einer einzigen festen Frequenz ausgehen. Es gelten somit ab sofort folgende Voraussetzungen:

- Das Eingangssignal des Mobilfunkkanals sei eine Cosinusschwingung mit der Amplitude $A = 1$ und der Frequenz f_T . Wir bezeichnen diese Schwingung als *Sendesignal* $s_{BP}(t)$.
- Das Ausgangssignal $r_{BP}(t)$ des Mobilfunkkanals – im Folgenden *Empfangssignal* genannt – unterscheidet sich von $s_{BP}(t)$ sowohl in der Amplitude (Hüllkurve) als auch in der Phase.
- Wir betrachten des Weiteren den Mobilfunkkanal stets im **äquivalenten Tiefpassbereich**. Das Sendesignal ist dann $s_{TP}(t) = 1$ und somit reell.
- Das TP-Ausgangssignal $r_{TP}(t)$ ist im Allgemeinen komplexwertig, wobei die Hüllkurve durch $a(t)$ gegeben ist und sich die Phase $\phi(t)$ durch Verschiebungen der Nulldurchgänge bemerkbar macht.

Allgemein gilt dann für das physikalische (Bandpass-)Signal am Ausgang des Mobilfunkkanals:

$$r_{BP}(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi f_T t + \phi(t)) \Rightarrow a(t) = |r_{BP}(t)|, \phi(t) = \arg r_{BP}(t).$$

Die Grafik zeigt Beispiele solcher Bandpass-Signale und deren Tiefpass-Repräsentanten, wobei vereinfachend der Fall $\phi(t) = 0$ und damit ein reelles TP-Empfangssignal dargestellt ist.



Allgemeine Beschreibung des Mobilfunkkanals

Im Folgenden wird zur Vereinfachung der Schreibweise auf den Zusatz „TP“ verzichtet. Somit liegt das reelle Signal $s(t) = 1$ am Eingang des Mobilfunkkanals an und das Ausgangssignal $r(t)$ ist komplexwertig. Zusätzliche Rauschprozesse werden ausgeschlossen.

Das Funksignal $s(t)$ kann den Empfänger über eine Vielzahl von Pfaden erreichen, wobei die einzelnen Signalanteile in unterschiedlicher Weise gedämpft und verschieden lang verzögert werden. Allgemein kann man für das Tiefpass-Empfangssignal ohne Berücksichtigung von thermischem Rauschen schreiben:

$$r(t) = \sum_{k=1}^K \alpha_k(t) \cdot e^{j \cdot \phi_k(t)} \cdot s(t - \tau_k).$$

Hierbei sind folgende Bezeichnungen verwendet:

- Der zeitabhängige Dämpfungsfaktor auf dem k -ten Pfad ist $\alpha_k(t)$.
- Der zeitabhängige Phasenverlauf auf dem k -ten Pfad ist $\phi_k(t)$.
- Die Laufzeit auf dem k -ten Pfad ist τ_k .

Die Anzahl K der sich (zumindest geringfügig) unterscheidenden Pfade ist meist sehr groß und für eine direkte Modellierung ungeeignet. Das Modell lässt sich aber entscheidend vereinfachen, wenn man jeweils Pfade mit näherungsweise gleichen Verzögerungen zusammenfasst. Man unterscheidet somit nur noch M Hauptpfade, die durch großräumige Wegeunterschiede und damit merkliche Laufzeitunterschiede gekennzeichnet sind:

$$r(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_m} \alpha_{m,n}(t) \cdot e^{j \cdot \phi_{m,n}(t)} \cdot s(t - \tau_{m,n}).$$

Die beiden bisher angegebenen Gleichungen sind identisch. Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn man für jeden Hauptpfad m die N_m Laufzeiten, die sich durch Reflexionen an Feinstrukturen sowie eventuell durch Beugungs- und Brechungserscheinungen geringfügig unterscheiden, durch eine mittlere Laufzeit ersetzt:

$$\tau_m = \frac{1}{N_m} \cdot \sum_{n=1}^{N_m} \tau_{m,n}.$$

Damit erhält man das folgende wichtige Zwischenergebnis:

$$r(t) = \sum_{m=1}^M z_m(t) \cdot s(t - \tau_m) \quad \text{mit} \quad z_m(t) = \sum_{n=1}^{N_m} \alpha_{m,n}(t) \cdot e^{j \cdot \phi_{m,n}(t)}.$$

Modellierung von nichtfrequenzselektivem Fading (1)

Ausgehend von der soeben hergeleiteten Gleichung

$$r(t) = \sum_{m=1}^M z_m(t) \cdot s(t - \tau_m) \quad \text{mit} \quad z_m(t) = \sum_{n=1}^{N_m} \alpha_{m,n}(t) \cdot e^{j \cdot \phi_{m,n}(t)}$$

können zwei wichtige Sonderfälle abgeleitet werden:

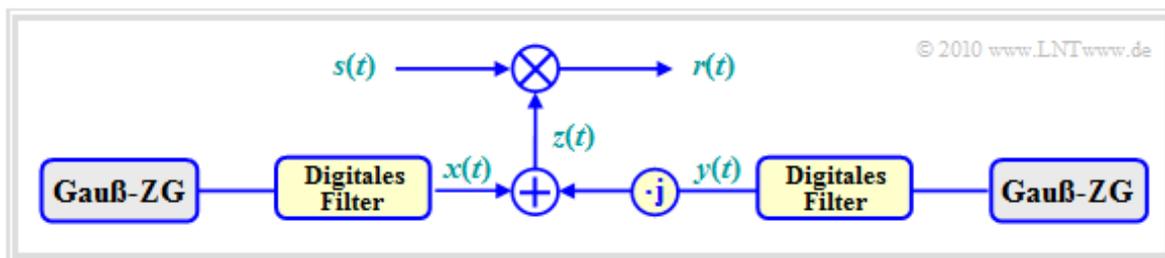
- Gibt es mehr als einen Hauptpfad ($M \geq 2$), so spricht man von *Mehrwegeausbreitung*. Wie im **Kapitel 2** noch gezeigt werden wird, kommt es dann – je nach Frequenz – zu konstruktiven oder destruktiven Überlagerungen bis hin zu völliger Auslöschung. Für manche Frequenzen erweist sich die Mehrwegeausbreitung als günstig, für andere als extrem ungünstig. Man bezeichnet diesen Effekt auch als **frequenzselektives Fading**.
- Bei nur einem Hauptpfad ($M = 1$, auf den Index „1“ verzichten wir in diesem Fall) vereinfacht sich die obige Gleichung wie folgt:

$$r(t) = z(t) \cdot s(t - \tau).$$

Die Verzögerung τ bewirkt hier eine für alle Frequenzen konstante Laufzeit, die nicht weiter betrachtet wird. Es gibt nun keine Überlagerungen von Signalanteilen mit merklichen Laufzeitunterschieden und damit auch keine Frequenzabhängigkeit des Gesamtsignals. Man spricht deshalb von **nichtfrequenzsektivem Fading** oder *Flat-Fading*. Für dieses gilt:

$$r(t) = z(t) \cdot s(t) \quad \text{mit} \quad z(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n(t) \cdot e^{j \cdot \phi_n(t)}.$$

Die Grafik zeigt das Modell zur Erzeugung von nichtfrequenzsektivem Fading. Man spricht auch von **Rayleigh-Fading**.



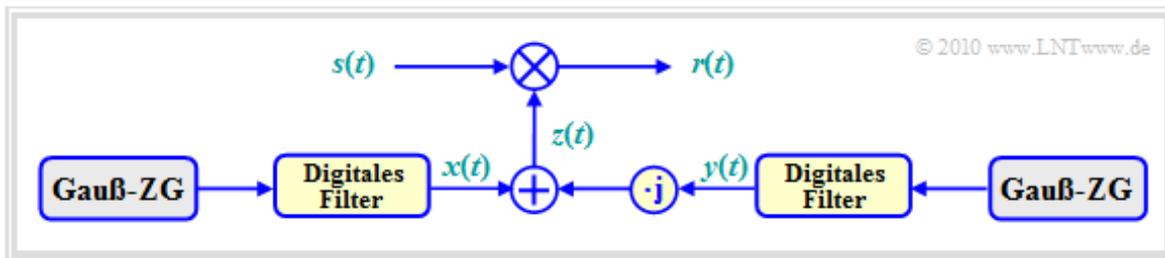
Die Bildbeschreibung folgt auf der nächsten Seite.

Modellierung von nichtfrequenzselektivem Fading (2)

Wir betrachten die multiplikative Verfälschung $z(t)$ entsprechend dem Rayleigh-Modell genauer. Für den komplexen Koeffizienten gilt entsprechend der letzten Seite:

$$z(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n(t) \cdot e^{j \cdot \phi_n(t)} = \sum_{n=1}^N \alpha_n(t) \cdot \cos(\phi_n(t)) + j \cdot \sum_{n=1}^N \alpha_n(t) \cdot \sin(\phi_n(t)).$$

Das Empfangssignal $r(t)$ ergibt sich, wenn man das Sendesignal $s(t)$ mit der Zeitfunktion $z(t)$ multipliziert. Es sei nochmals daran erinnert, dass sich alle Signale bzw. Zeitfunktionen $s(t)$, $z(t)$ und $r(t)$ auf den äquivalenten Tiefpassbereich beziehen.



Zu obiger Gleichung und der Grafik ist anzumerken:

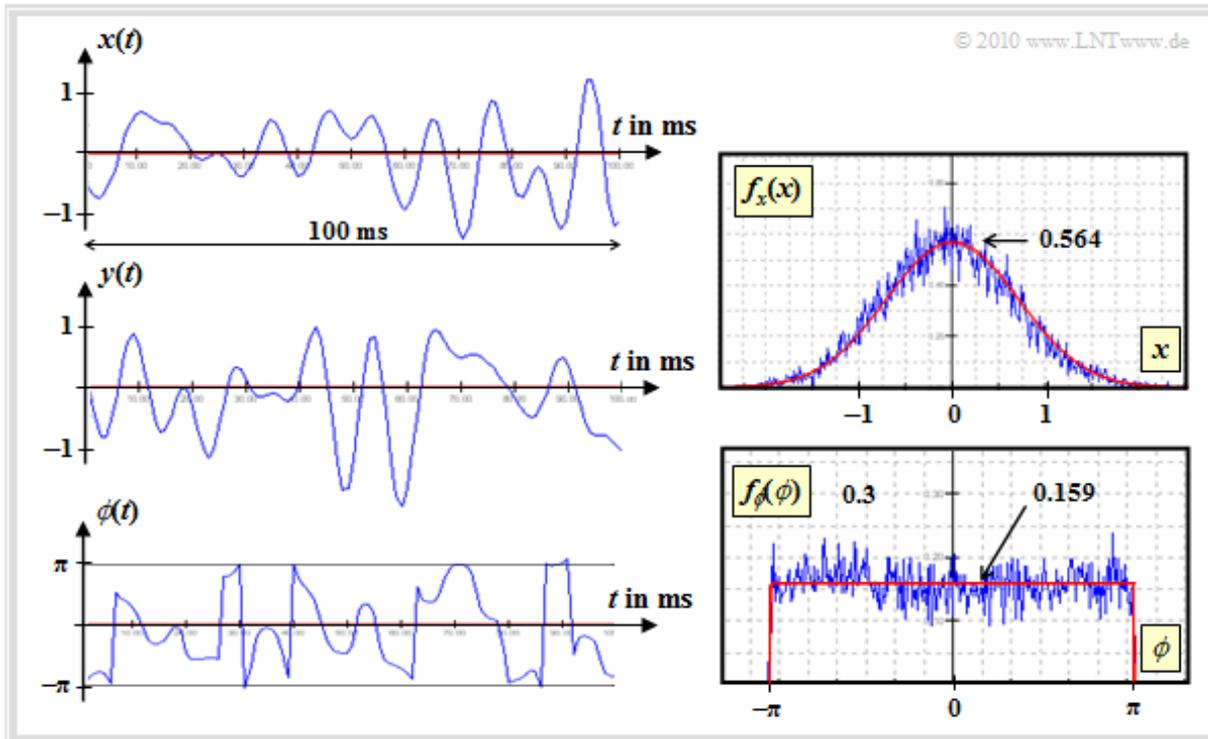
- $\alpha_n(t)$ und $\phi_n(t)$ hängen von den Umgebungsbedingungen ab. $\phi_n(t)$ erfasst die verschiedenen Laufzeiten auf den N Pfaden und den **Dopplereffekt** aufgrund der Bewegung.
- Die Zeitfunktion $z(t)$ ist eine komplexe Größe, deren Real- und Imaginärteil wir im Folgenden wieder mit $x(t)$ und $y(t)$ bezeichnen.
- Eine deterministische Beschreibung der Zufallsgröße $z(t) = x(t) + j \cdot y(t)$ ist nicht möglich, vielmehr müssen diese Funktionen durch stochastische Prozesse modelliert werden.
- Ist die Anzahl N der (leicht) unterschiedlichen Laufzeiten hinreichend groß, so ergeben sich nach dem zentralen Grenzwertsatz **Gaußsche Zufallsgrößen** $x(t)$ und $y(t)$.
- $x(t)$ und $y(t)$ sind jeweils mittelwertfrei und besitzen die gleiche Varianz σ^2 :

$$E[x(t)] = E[y(t)] = 0, \quad E[x^2(t)] = E[y^2(t)] = \sigma^2.$$

- Zu berücksichtigen ist die Orthogonalität von Realteil und Imaginärteil (jeweils Cosinus und Sinus des gleichen Arguments); damit sind sie auch unkorreliert. Nur bei Gaußschen Zufallsgrößen folgt daraus weiter die **statistische Unabhängigkeit** von $x(t)$ und $y(t)$.
- Aufgrund des Dopplereffekts gibt es allerdings statistische Bindungen innerhalb des Realteils $x(t)$ und innerhalb des Imaginärteils $y(t)$. Diese werden im Modell durch zwei **Digitale Filter** erzeugt.

Beispielhafte Signalverl채ufe bei Rayleigh-Fading (1)

Die Grafiken auf dieser und der n채chsten Seite zeigen jeweils durch Simulation gewonnene Signalverl채ufe von 100 ms Dauer und die dazugehorigen Dichtefunktionen. Es handelt sich um Bildschirmabzug des Windows-Programms „Mobilfunkkanal“ aus dem Praktikum [Söd01].



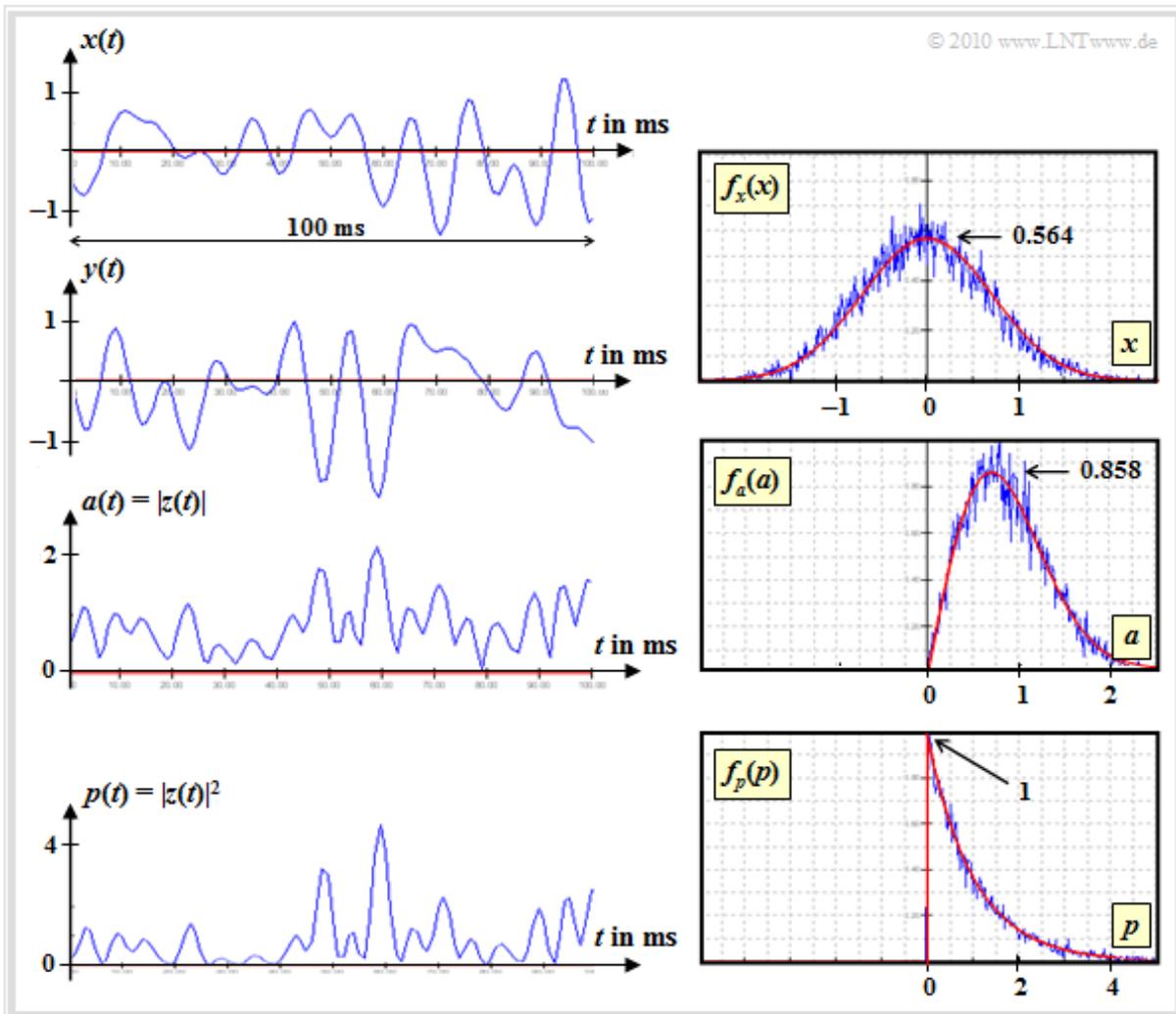
Die Darstellungen lassen sich wie folgt interpretieren:

- Der Realteil ist gaußverteilt (siehe rechte obere Grafik), wie auch aus dem Zeitsignalverlauf $x(t)$ hervorgeht. Rot eingezeichnet ist die Gaußsche WDF $f_x(x)$ und blau das durch Simulation über 10.000 Abtastwerte gewonnene Histogramm.
- Im Programm eingestellt war für diese Darstellung eine **maximale Dopplerfrequenz** von 100 Hz. Deshalb gibt es statistische Bindungen innerhalb der Signale $x(t)$ und $y(t)$. Näheres hierzu finden Sie im **Kapitel 1.3**.
- Die WDF $f_y(y)$ des Imaginärteils ist identisch mit $f_x(x)$. Die Varianz beträgt jeweils $\sigma^2 = 0.5$. Zwischen $x(t)$ und $y(t)$ bestehen keine statistischen Bindungen; die Signale sind orthogonal.
- Die Phase $\phi(t)$ ist gleichverteilt zwischen $\pm\pi$. Wie aus den Sprungstellen im Phasenverlauf zu erkennen, kann $\phi(t)$ durchaus größere Werte annehmen. Alle Bereiche $(2k\pm 1)\pi$ wurden aber bei der Histogrammerstellung auf den Wertebereich $-\pi \dots +\pi$ projiziert (k ganzzahlig).
- Die gleichverteilte Phase wird anhand der (hier nicht dargestellten) 2D-WDF verständlich. Diese ist rotationssymmetrisch und dementsprechend gibt es auch keine Vorzugsrichtung:

$$f_{x,y}(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right].$$

Beispielhafte Signalverl채ufe bei Rayleigh-Fading (2)

Die Grafik zeigt oben nochmals Real- und Imagin채rteil von $z(t) = x(t) + j \cdot y(t)$. Darunter gezeichnet sind Verlauf und WDF von Betrag $a(t) = |z(t)|$ und Betragsquadrat $p(t) = a^2(t) = |z(t)|^2$.



Aus diesen Darstellungen geht hervor:

- Der Betrag besitzt eine **Rayleigh-WDF** \Rightarrow Name „*Rayleigh-Fading*“:

$$f_a(a) = \begin{cases} a/\sigma^2 \cdot \exp[-a^2/(2\sigma^2)] & \text{f\u00fcr } a \geq 0 \\ 0 & \text{f\u00fcr } a < 0 \end{cases}$$

- F\u00fcr die Momente erster bzw. zweiter Ordnung und die Varianz des Betrags $a(t) = |z(t)|$ gilt:

$$E[a] = \sigma \cdot \sqrt{\pi/2}, \quad E[a^2] = 2 \cdot \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Var}[a] = \sigma_a^2 = \sigma^2 \cdot (2 - \pi/2)$$

- Die WDF des Betragsquadrats $p(t)$ ergibt sich durch **nichtlineare Transformation** der WDF $f_a(a)$ und f\u00fchrt zu einer Exponentialverteilung:

$$f_p(p) = \begin{cases} 1/(2\sigma^2) \cdot \exp[-p/(2\sigma^2)] & \text{f\u00fcr } p \geq 0 \\ 0 & \text{f\u00fcr } p < 0 \end{cases}$$

Weitere Informationen zum *Rayleigh-Fading* finden Sie in **Aufgabe A1.3** und **Aufgabe Z1.3**.

Einige allgemeine Bemerkungen zu AKF und LDS

Zur Beschreibung der inneren statistischen Bindungen zwischen den benachbarten Signalwerten $r(t)$ und $r(t + \Delta t)$ eignet sich die **Autokorrelationsfunktion** (AKF):

$$\varphi_r(\Delta t) = 1/2 \cdot E [r(t) \cdot r^*(t + \Delta t)] .$$

Gegenüber der Definition unter obigem Link sind folgende Unterschiede zu erkennen:

- Die AKF-Variable ist hier mit Δt anstelle von τ bezeichnet, da wir in diesem Buch das „ τ “ noch für die 2D-Impulsantwort $h(t, \tau)$ benötigen.
- Das äquivalente Tiefpass-Signal $r(t)$ ist komplex. Durch den Faktor 1/2 bezieht sich aber die AKF $\varphi_r(\Delta t)$ und insbesondere die Leistung $\varphi_r(\Delta t = 0)$ auf das Bandpass-Signal $r_{BP}(t)$.

Beim *Rayleigh-Fading*-Kanalmodell gilt $r(t) = s(t) \cdot z(t)$. Damit ergibt sich für dessen AKF:

$$\varphi_r(\Delta t) = 1/2 \cdot E [s(t) \cdot z(t) \cdot s^*(t + \Delta t) \cdot z^*(t + \Delta t)] = \varphi_s(\Delta t) \cdot \varphi_z(\Delta t) .$$

Für die AKF von Sendesignal $s(t)$ und multiplikativem Faktor $z(t)$ gelten folgende Definitionen:

$$\begin{aligned} \varphi_s(\Delta t) &= 1/2 \cdot E [s(t) \cdot s^*(t + \Delta t)] , \\ \varphi_z(\Delta t) &= E [z(t) \cdot z^*(t + \Delta t)] . \end{aligned}$$

Der Faktor 1/2 ist nur bei der AKF-Berechnung von BP-Signalen im äquivalenten TP-Bereich zu berücksichtigen, nicht jedoch bei $\varphi_z(t)$. Ansonsten würde sich $\varphi_r(\Delta t) \neq \varphi_s(\Delta t) \cdot \varphi_z(\Delta t)$ ergeben.

Aufgrund der Definition $\varphi_z(\Delta t) = E[z(t) \cdot z^*(t + \Delta t)]$ ist die AKF auch bei einer komplexen Zeitfunktion $z(t)$ stets reell und zudem bezüglich Δt gerade. Berücksichtigen wir weiterhin, dass

- $z(t) = x(t) + j \cdot y(t)$ ist,
- $x(t)$ und $y(t)$ gleiche statistische Eigenschaften aufweisen, und
- es zwischen $x(t)$ und $y(t)$ keine statistischen Bindungen gibt,

so lässt sich für die AKF des komplexen Faktors $z(t)$ schreiben:

$$\varphi_z(\Delta t) = \varphi_x(\Delta t) + \varphi_y(\Delta t) = 2 \cdot \varphi_x(\Delta t) .$$

Daraus ergibt sich folgende Vereinfachung:

- Zur Ermittlung der statistischen Bindungen der komplexen Größe $z(t)$ muss nur einer der beiden Gaußschen Zufallsprozesse betrachtet werden. Im Folgenden sei dies $x(t)$.
- Wir berechnen zuerst die Autokorrelationsfunktion $\varphi_x(\Delta t) = E[x(t) \cdot x(t + \Delta t)]$ des Realteils und anschließend auch dessen Leistungsdichtespektrum (LDS)

$$\Phi_x(f_D) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\Delta t) \cdot \exp[-j \cdot 2\pi \cdot f_D \cdot \Delta t] d(\Delta t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \varphi_x(\Delta t) .$$

- Für die entsprechenden Kenngrößen des komplexen Zufallsprozesses $z(t)$ gilt dann:

$$\varphi_z(\Delta t) = 2 \cdot \varphi_x(\Delta t) , \quad \Phi_z(f_D) = 2 \cdot \Phi_x(f_D) .$$

Die LDS-Variable ist die **Dopplerfrequenz** f_D , da beim Mobilfunk der *Dopplereffekt* die Ursache der statistischen Bindungen ist. Dieser Effekt wird auf der nächsten Seite erläutert.

Phänomenologische Beschreibung des Dopplereffektes (1)

Die statistischen Bindungen innerhalb der reellen „Signale“ $x(t)$ und $y(t)$ bzw. innerhalb der komplexen Größe $z(t)$ sind auf den Dopplereffekt zurückzuführen. Dieser wurde Mitte des 19. Jahrhunderts von dem österreichischen Mathematiker, Physiker und Astronomen **Christian Andreas Doppler** theoretisch vorhergesagt und nach ihm benannt.

Definition: Als **Dopplereffekt** bezeichnet man die Veränderung der wahrgenommenen Frequenz von Wellen jeder Art, die sich dann ergibt, wenn sich Quelle (Sender) und Beobachter (Empfänger) relativ zueinander bewegen.

Qualitativ lässt sich der Dopplerreffekt wie folgt beschreiben:

- Nähern sich Beobachter und Quelle einander an, so erhöht sich aus Sicht des Beobachters die Frequenz, egal, ob sich der Beobachter bewegt oder die Quelle oder beide.
- Entfernt sich die Quelle vom Beobachter oder der Beobachter von der Quelle, so nimmt der Beobachter eine niedrigere Frequenz wahr, als tatsächlich gesendet wurde.

Beispiel: Wir betrachten die Tonhöhenänderung des *Martinhorns* eines Rettungswagens. Solange sich das Fahrzeug nähert, hört der Beobachter einen höheren Ton als bei stehendem Wagen. Entfernt sich der Rettungswagen, so wird ein tieferer Ton wahrgenommen.

Den gleichen Effekt stellt man auch bei einem *Autorennen* fest. Die Frequenzänderungen und der „Sound“ sind dabei um so deutlicher, je schneller die Autos fahren.

Den Sachverhalt kann man sich in diesem Lerntutorial mit dem Interaktionsmodul **Dopplereffekt** verdeutlichen. Einige Eigenschaften dieses noch aus dem Physikunterricht bekannten Effekts sollen nun anhand von Bildschirmabzügen aus dieser Flash-Animation dargestellt werden, wobei natürlich die dynamischen Programmeigenschaften verloren gehen.



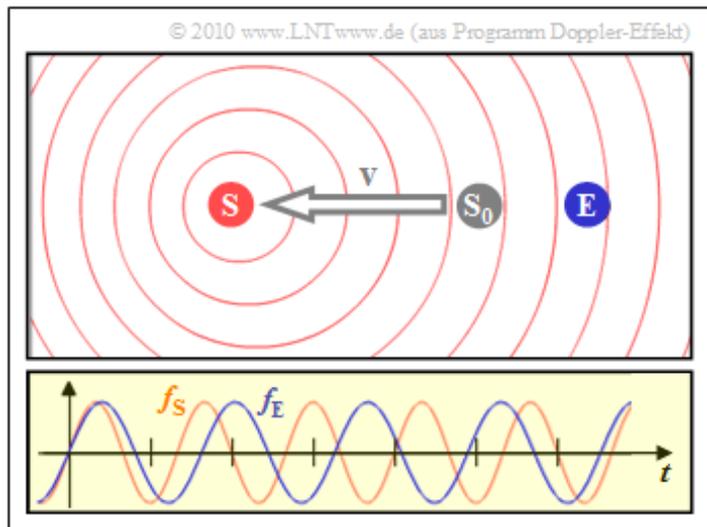
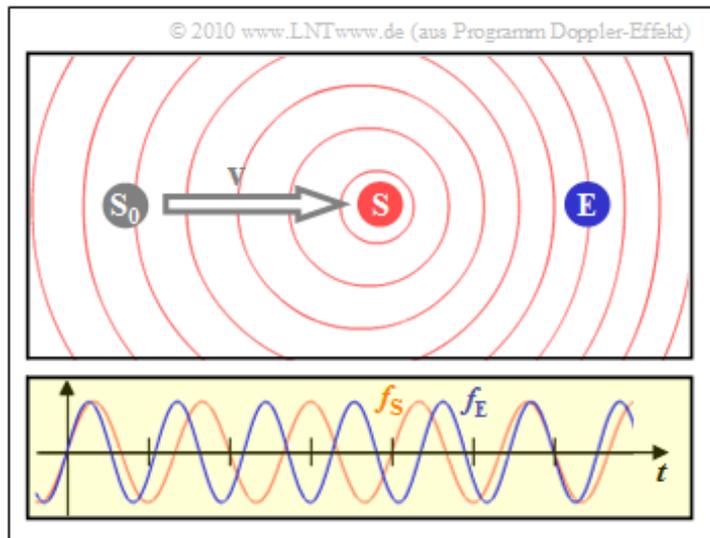
Die Grafik zeigt die Ausgangssituation. Der ruhende Sender (S) gibt eine konstante Frequenz f_S ab. Die Wellenausbreitung ist in der Grafik durch konzentrische Kreise um (S) veranschaulicht. Beim ebenfalls ruhenden Empfänger (E) kommt dann natürlich die Frequenz $f_E = f_S$ an.

Die phänomenologische Erklärung des Dopplereffektes wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.

Phänomenologische Beschreibung des Dopplereffektes (2)

Der nächste Schnappschuss zeigt den Fall, dass sich der Sender (S) mit konstanter Geschwindigkeit v von seinem Startpunkt S_0 auf den Empfänger (E) zu bewegt hat.

Das Diagramm zeigt, dass die vom Empfänger wahrgenommene Frequenz f_E (blaue Schwingung) um etwa 20% größer ist als die Frequenz f_S am Sender (rote Schwingung). Aufgrund der Bewegung des Senders sind nun die Kreise nicht mehr konzentrisch.



Die zweite Szenerie ergibt sich, wenn sich der Sender (S) vom Empfänger entfernt. Dann ist die Empfangsfrequenz f_E (blaue Schwingung) um etwa 20% kleiner als die gesendete Frequenz f_S .

Diese Angaben gelten für unrealistisch große Geschwindigkeit ($v = c/5$). Beim Mobilfunk sind die Abweichungen zwischen f_S und f_E meist nur ein Bruchteil der Sendefrequenz.

Die exakte Gleichung für die Empfangsfrequenz f_E unter Einbeziehung eines Winkels α zwischen der Bewegungsrichtung und der Verbindungslinie Sender–Empfänger lautet:

$$f_E = f_S \cdot \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - v/c \cdot \cos(\alpha)} \quad \text{mit } c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \Rightarrow \text{Lichtgeschwindigkeit.}$$

Wie in **Aufgabe Z1.4** gezeigt werden soll, kann man bei realistischen Geschwindigkeiten ($v \ll c$) von der folgenden Näherung ausgehen, bei der die durch die Relativitätstheorie beschriebenen Effekte unberücksichtigt bleiben:

$$f_E \approx f_S \cdot [1 + v/c \cdot \cos(\alpha)] .$$

Wir weisen Sie noch auf das folgende Interaktionsmodul hin:

Zur Verdeutlichung des Dopplereffekts.

Dopplerfrequenz und deren Verteilung (1)

Wir fassen die Aussagen der letzten Seite nochmals kurz zusammen, wobei wir von der zweiten, also der nichtrelativistischen Gleichung ausgehen:

- Bei einer Relativbewegung zwischen Sender (Quelle) und Empfänger (Beobachter) kommt es zu einer Frequenzverschiebung um die **Dopplerfrequenz** $f_D = f_E - f_S$.
- Eine positive Dopplerfrequenz ($f_E > f_S$) ergibt sich dann, wenn sich Sender und Empfänger (relativ) aufeinander zu bewegen. Eine negative Dopplerfrequenz ($f_E < f_S$) bedeutet, dass sich Sender und Empfänger (direkt oder unter einem Winkel) voneinander entfernen.
- Die maximale Frequenzverschiebung tritt auf, wenn sich Sender und Empfänger direkt aufeinander zu bewegen (\Rightarrow Winkel $\alpha = 0^\circ$). Dieser Maximalwert hängt in erster Näherung von der Sendefrequenz f_S und der Geschwindigkeit v ab (c ist die Lichtgeschwindigkeit):

$$f_{D, \max} = f_S \cdot v/c.$$

- Erfolgt die Relativbewegung unter einem beliebigen Winkel α zu der Verbindungslinie Sender–Empfänger, so entsteht eine Dopplerverschiebung um

$$f_D = f_E - f_S = f_{D, \max} \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow -f_{D, \max} \leq f_D \leq +f_{D, \max}.$$

Unter der Annahme gleichwahrscheinlicher Bewegungsrichtungen (Gleichverteilung für den Winkel α im Bereich $-\pi \leq \alpha \leq +\pi$) ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Dopplerfrequenz im Bereich $f_{D, \max} \leq f_D \leq +f_{D, \max}$:

$$\text{wdf}(f_D) = \frac{1}{2\pi \cdot f_{D, \max} \cdot \sqrt{1 - (f_D/f_{D, \max})^2}}.$$

Außerhalb des Bereichs $|f_D| > f_{D, \max}$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte identisch 0.

Herleitung: Die entstehende Dopplerfrequenz in Abhängigkeit des Bewegungswinkels α lautet:

$$f_D = f_{D, \max} \cdot \cos(\alpha) = g(\alpha).$$

Wir bezeichnen diese Funktion mit $g(\alpha)$ und gehen davon aus, dass α alle Winkelwerte zwischen $\pm\pi$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit annimmt. Dann ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit der Dopplerfrequenz entsprechend dem **Kapitel 3.7** im Buch „Stochastische Signaltheorie“

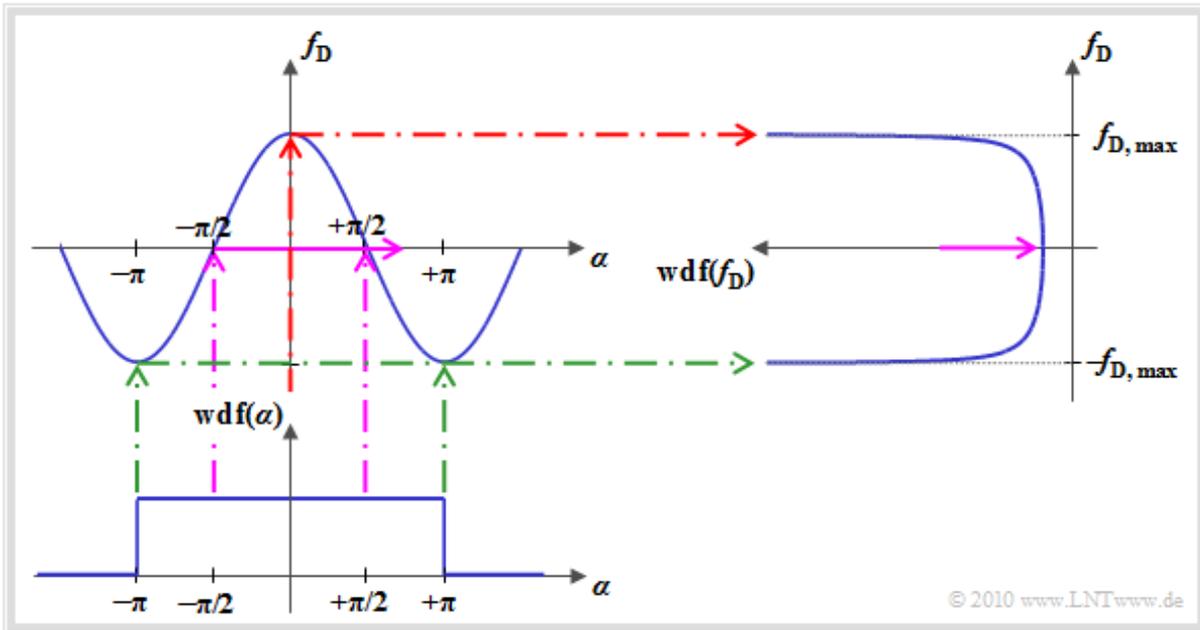
$$\text{wdf}(f_D) = \left. \frac{\text{wdf}(\alpha)}{|g'(\alpha)|} \right|_{\alpha=h(f_D)}$$

mit der Ableitung $g'(\alpha) = -f_{D, \max} \cdot \sin(\alpha)$ und der Umkehrfunktion $\alpha = h(f_D)$. Im betrachteten Beispiel lautet die Umkehrfunktion: $\alpha = \arccos(f_D/f_{D, \max})$.

Die Herleitung wird auf der nächsten Seite fortgesetzt. Diese **überspringen?**

Dopplerfrequenz und deren Verteilung (2)

Die Grafik veranschaulicht den Rechengang zur Bestimmung der Dopplerfrequenz-WDF:



- Da die Kennlinie $g(\alpha) = f_{D, \max} \cdot \cos(\alpha)$ zwischen der Dopplerfrequenz f_D und dem Winkel α auf $\pm f_{D, \max}$ begrenzt ist, ist für f_D kein Wert außerhalb dieses Bereichs möglich.
- Bei der Transformation von Zufallsgrößen muss zwischen Bereichen mit positiver und negativer Steigung der Transformationskennlinie unterschieden werden. Die α -Werte zwischen $-\pi$ und 0 (positive Steigung der Transformationskennlinie) liefern das Ergebnis

$$\begin{aligned} \text{wdf}(f_D) &= \frac{1/(2\pi)}{f_{D, \max} \cdot \sin(\alpha)} \Bigg|_{\alpha = \arccos(f_D/f_{D, \max})} = \frac{(2\pi \cdot f_{D, \max})^{-1}}{\sin(\arccos(f_D/f_{D, \max}))} = \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot f_{D, \max} \cdot \sqrt{1 - (f_D/f_{D, \max})^2}} \end{aligned}$$

- Aus Symmetriegründen trägt der positive α -Bereich in gleicher Weise bei, so dass im inneren Bereich insgesamt gilt:

$$\text{wdf}(f_D) = \frac{1}{\pi \cdot f_{D, \max} \cdot \sqrt{1 - (f_D/f_{D, \max})^2}}$$

- Winkel im Bereich um $\alpha = \pm\pi/2$ führen zu einer kleinen Dopplerfrequenz $\Rightarrow f_D \approx 0$ (violette Markierung). Aufgrund der relativ großen Steigung der cosinusförmigen Kennlinie $g(\alpha)$ bei $\alpha = \pm\pi/2$ ist der WDF-Wert bei $f_D \approx 0$ allerdings sehr klein.
- Kleine Winkel (um $\alpha \approx 0$) führen dagegen zur maximalen Dopplerfrequenz $\Rightarrow f_D \approx f_{D, \max}$ (rote Markierung). Aufgrund der nahezu horizontalen Kennlinie $g(\alpha)$ ist hier die f_D -WDF deutlich größer. Für $f_D = f_{D, \max}$ ergibt sich sogar ein unendlich großer Wert.
- Winkel um $\alpha = \pm\pi$ führen zur Dopplerfrequenz $\Rightarrow f_D \approx -f_{D, \max}$ (grüne Markierung). Auch hier ist die Kennlinie nahezu horizontal und es ergibt sich wiederum ein großer WDF-Wert.

AKF und LDS bei Rayleigh-Fading

Wir setzen nun eine in alle Richtungen gleich abstrahlende Antenne voraus. Dann ist das Doppler-LDS formgleich mit der WDF der Dopplerfrequenzen. Für $\Phi_x(f_D)$ muss die WDF noch mit der Leistung σ^2 des Gaußprozesses multipliziert werden, und für das resultierende LDS $\Phi_z(f_D)$ des komplexen Faktors $z(t) = x(t) + j \cdot y(t)$ gilt nach Verdoppelung:

$$\Phi_z(f_D) = \begin{cases} (2\sigma^2)/(\pi \cdot f_{D, \max}) \cdot [1 - (f_D/f_{D, \max})^2]^{-0.5} & \text{für } |f_D| \leq f_{D, \max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man bezeichnet diesen Verlauf nach **W.C. Jakes** als das **Jakes-Spektrum**. Die Verdoppelung ist notwendig, da wir bisher nur den Beitrag des Realteils $x(t)$ betrachtet haben.

Die zugehörige Autokorrelationsfunktion (AKF) erhält man nach **Fourierücktransformation**:

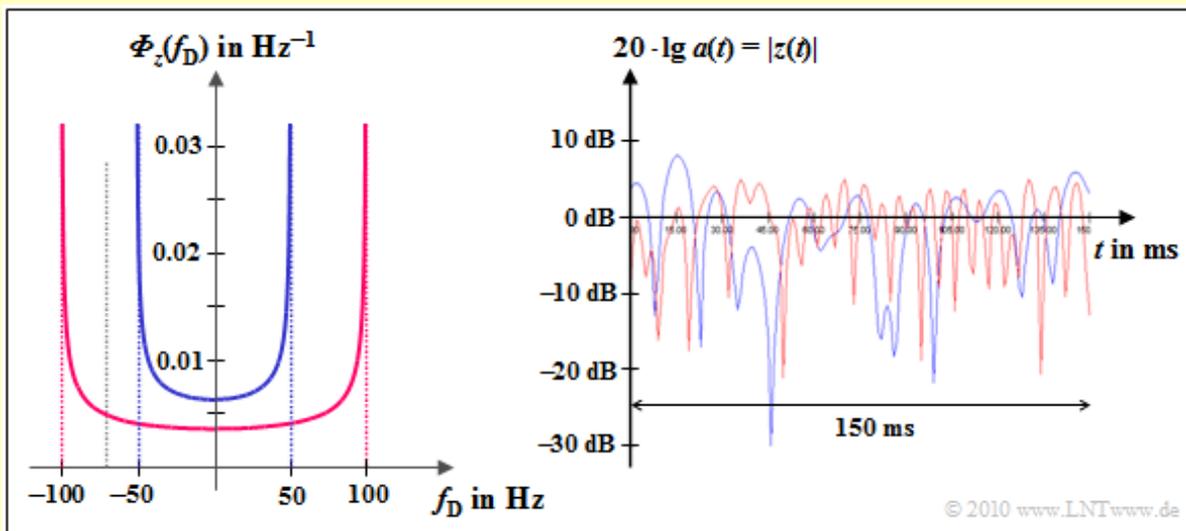
$$\varphi_z(\Delta t) = 2\sigma^2 \cdot J_0(2\pi \cdot f_{D, \max} \cdot \Delta t),$$

mit der *Besselfunktion erster Art und nullter Ordnung* (Definition und Reihenentwicklung):

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-j \cdot u \cdot \cos(\alpha)} d\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (u/2)^{2k}}{k! \cdot \Gamma(k+1)}$$

Besselfunktion erster Art und nullter Ordnung (Interaktionsmodul)

Beispiel: Die Grafik zeigt links das Jakes-Spektrum für die maximale Dopplerfrequenz 50 Hz (blaue Kurve) bzw. für $f_{D, \max} = 100$ Hz (rote Kurve). Beim GSM-D-Netz ($f_S = 900$ MHz) entspricht dies den Fahrzeuggeschwindigkeiten $v = 60$ km/h bzw. $v = 120$ km/h. Beim E-Netz ($f_S = 1800$ MHz) sind die entsprechenden Geschwindigkeiten nur halb so groß.



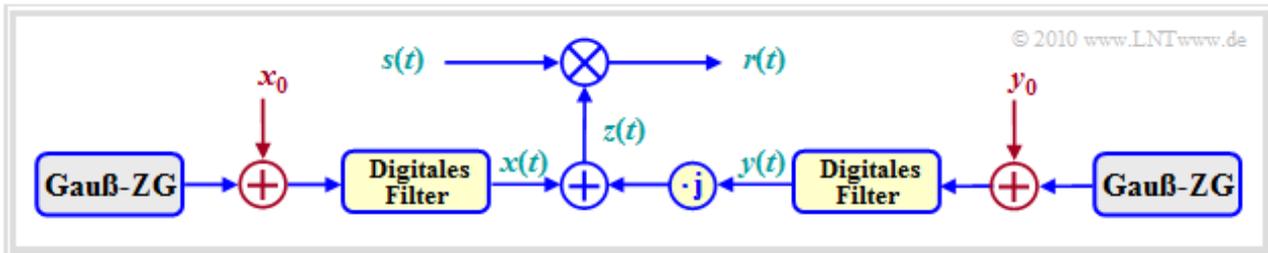
Das rechte Bild zeigt den logarithmierten Betrag von $z(t)$. Man erkennt das doppelt so schnelle Fading des roten Kurvenverlaufs. Die Rayleigh-WDF ist in beiden Fällen gleich.

Kanalmodell und Rice–WDF

Die **Rayleigh–Verteilung** beschreibt den Mobilfunkkanal unter der Annahme, dass kein direkter Pfad vorhanden ist und sich somit der multiplikative Faktor $z(t)$ allein aus diffus gestreuten Komponenten zusammensetzt. Bei Vorhandensein einer Direktkomponente (englisch: *Line of Sight*, LoS) muss man im Modell zu den mittelwertfreien Gaußprozessen $x(t)$ und $y(t)$ noch Gleichkomponenten hinzufügen:

$$\begin{aligned} x(t) &\Rightarrow x(t) + x_0, & y(t) &\Rightarrow y(t) + y_0, \\ z(t) = x(t) + j \cdot y(t) &\Rightarrow z(t) + z_0, & z_0 &= x_0 + j \cdot y_0. \end{aligned}$$

Die Grafik zeigt das **Rice–Fading–Kanalmodell**. Als Sonderfall ergibt sich daraus wieder das Rayleigh–Modell, wenn man $x_0 = y_0 = 0$ setzt.



Das Rice–Fading–Modell lässt sich wie folgt zusammenfassen:

- Der Realteil $x(t)$ ist gaußverteilt (Mittelwert x_0 , und Varianz σ^2). Der Imaginärteil $y(t)$ ist ebenfalls gaußverteilt (Mittelwert y_0 , Varianz σ^2) sowie unabhängig von $x(t)$.
- Für $z_0 \neq 0$ ist der Betrag $|z(t)|$ **riceverteilt**, woraus die Bezeichnung „*Rice–Fading*“ herrührt. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $|z(t)| = a(t)$. Für $a \leq 0$ ist die Betrags–WDF $f_a(a)$ identisch 0, für $a \geq 0$ gilt folgende Gleichung für die Rice–WDF:

$$f_a(a) = \frac{a}{\sigma^2} \cdot \exp\left[-\frac{a^2 + |z_0|^2}{2\sigma^2}\right] \cdot I_0\left[\frac{a \cdot |z_0|}{\sigma^2}\right].$$

Hierbei bezeichnet I_0 die *modifizierte Bessel–Funktion* nullter Ordnung.

$$I_0(u) = J_0(j \cdot u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u/2)^{2k}}{k! \cdot \Gamma(k + 1)}.$$

- Der Mobilfunkkanal ist um so besser für die Digitalsignalübertragung geeignet, je größer die „Direktpfadleistung“ ($|z_0|^2$) gegenüber den Leistungen der Streukomponenten ($2\sigma^2$) ist.
- Ist $|z_0| \gg \sigma$ (Faktor 3 oder mehr), so kann die Rice–WDF mit guter Näherung durch eine Gaußverteilung mit dem Mittelwert $|z_0|$ und der Streuung σ angenähert werden.
- Im Gegensatz zu *Rayleigh* (mit $z_0 = 0$) ist die Phase bei *Rice–Fading* nicht gleichverteilt, sondern es gibt eine Vorzugsrichtung $\phi_0 = \arctan(y_0/x_0)$. Oft setzt man $y_0 = 0 \Rightarrow \phi_0 = 0$.

Beispielhafte Signalverläufe bei Rice-Fading (1)

Die Grafik zeigt Signalverläufe und Dichtefunktionen zweier Mobilfunkkanäle:

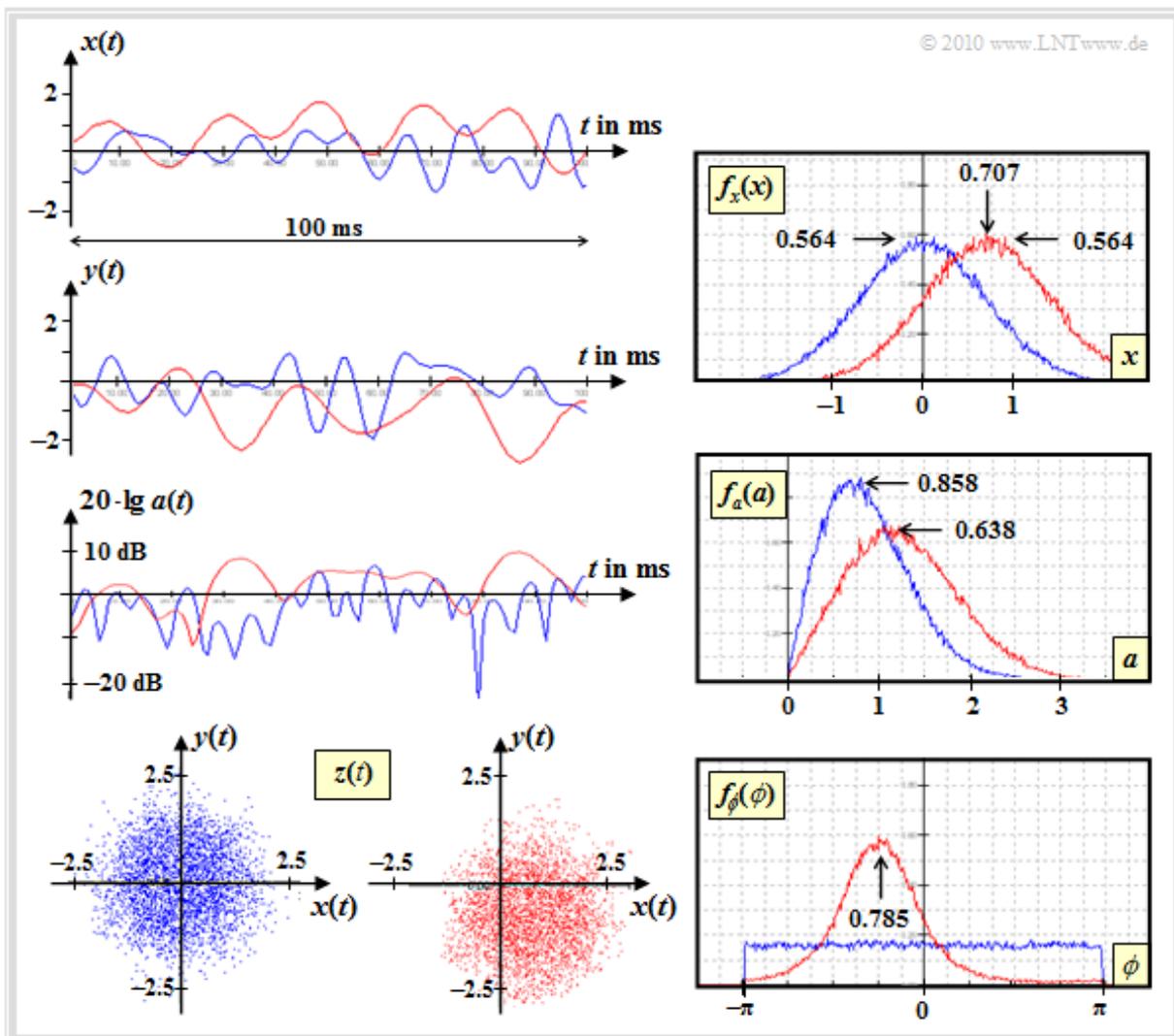
- Rayleigh-Fading mit $E[|z(t)|^2] = 2\sigma^2 = 1$ (blaue Kurven),
- Rice-Fading mit gleichem σ sowie $x_0 = 0.707$ und $y_0 = -0.707$ (rote Kurven).

Für die Erzeugung der Signalausschnitte mit dem auf der letzten Seite gezeigten Modell wurde in beiden Fällen die **maximale Dopplerfrequenz** $f_{D, \max} = 100$ Hz zugrundegelegt. AKF und LDS von Rayleigh- und Rice-Fading unterscheiden sich nur geringfügig. Es gilt:

$$\varphi_z(\Delta t) \Big|_{\text{Rice}} = \varphi_z(\Delta t) \Big|_{\text{Rayleigh}} + |z_0|^2,$$

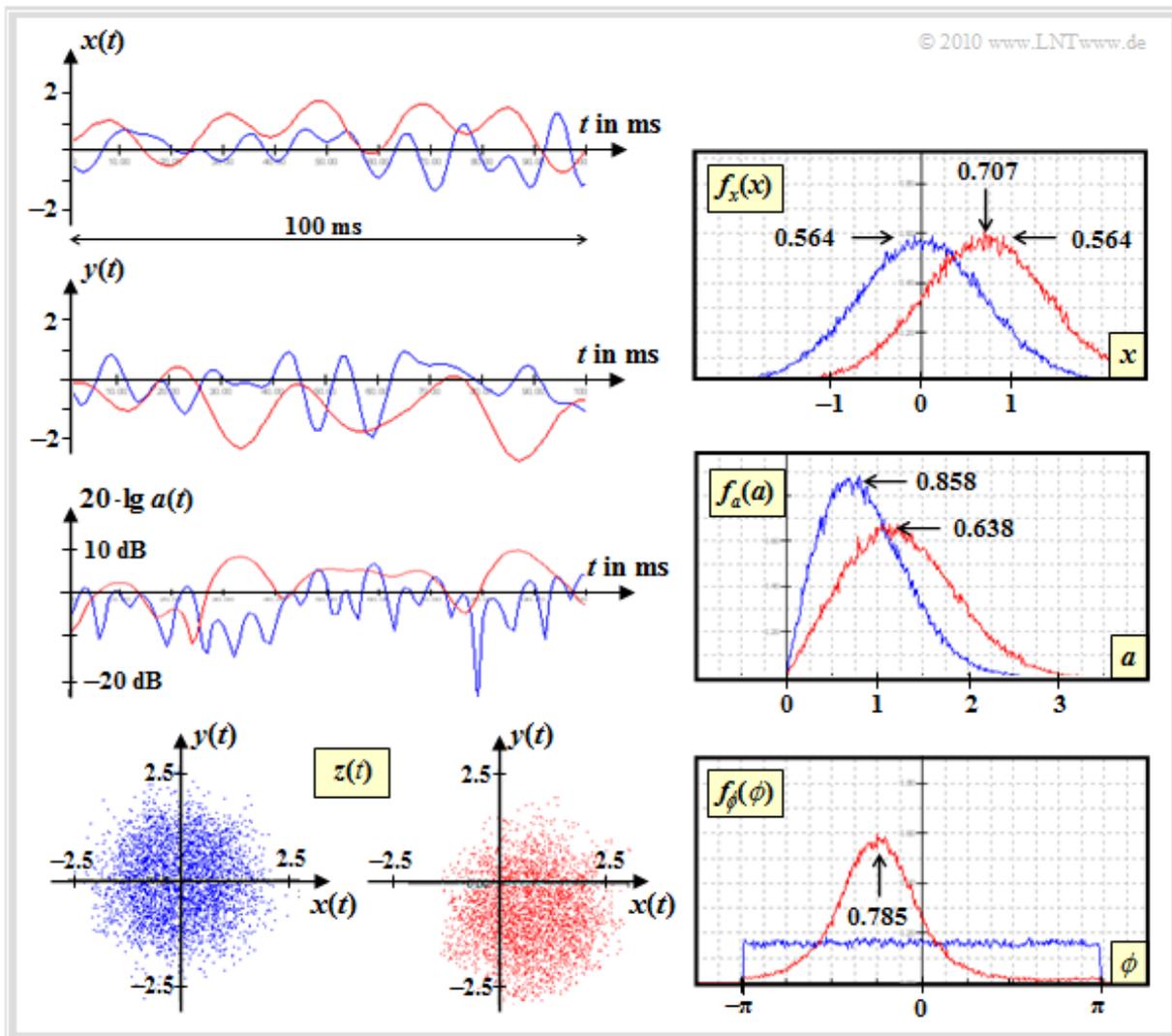
$$\Phi_z(f_D) \Big|_{\text{Rice}} = \Phi_z(f_D) \Big|_{\text{Rayleigh}} + |z_0|^2 \cdot \delta(f_D).$$

Berücksichtigt ist, dass die Spektraldarstellung eines Gleichanteils zu einer Diracfunktion führt.



Die Bildbeschreibung folgt auf der nächsten Seite.

Beispielhafte Signalverläufe bei Rice-Fading (2)



Zu dieser Grafik ist anzumerken:

- Die Realteile $x(t)$ von Rayleigh (blau), Rice (rot) unterscheiden sich durch die Konstante $x_0 = 0.707$. Die statistischen Eigenschaften sind ansonsten gleich: Gaußsche WDF mit Streuung $\sigma = 0.707$, entweder mittelwertfrei (Rayleigh) oder mit Mittelwert x_0 (Rice).
- Im Imaginärteil $y(t)$ erkennt man bei Rice zusätzlich die Gleichkomponente $y_0 = -0.707$. Die (in der Grafik nicht dargestellte) WDF $f_y(y)$ ist somit eine Gaußkurve mit der Streuung $\sigma = 0.707$ um den Mittelwert -0.707 , also achsensymmetrisch zur skizzierten WDF $f_x(x)$.
- Die (logarithmische) Betragsdarstellung $\Rightarrow a(t) = |z(t)|$ zeigt, dass die rote Kurve meist oberhalb der blauen liegt. Dies wird auch aus der WDF deutlich. Beim Rice-Kanal ist die Fehlerwahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung von AWGN-Rauschen niedriger als bei Rayleigh, da der Empfänger über den Rice-Direktpfad viel nutzbare Energie erhält.
- Die WDF $f_\phi(\phi)$ zeigt den Vorzugswinkel $\phi \approx -45^\circ$ des Rice-Kanals. Der komplexe Faktor $z(t)$ befindet sich großteils im 4. Quadranten (wegen $x_0 > 0, y_0 < 0$), während beim Rayleigh-Kanal alle Quadranten gleichwahrscheinlich sind.