

A3.1: Analyse eines Faltungscoders

Wir betrachten den nebenstehenden Faltungscodierer und gehen von folgender Informationssequenz aus:

$$\underline{u} = (0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, \dots).$$

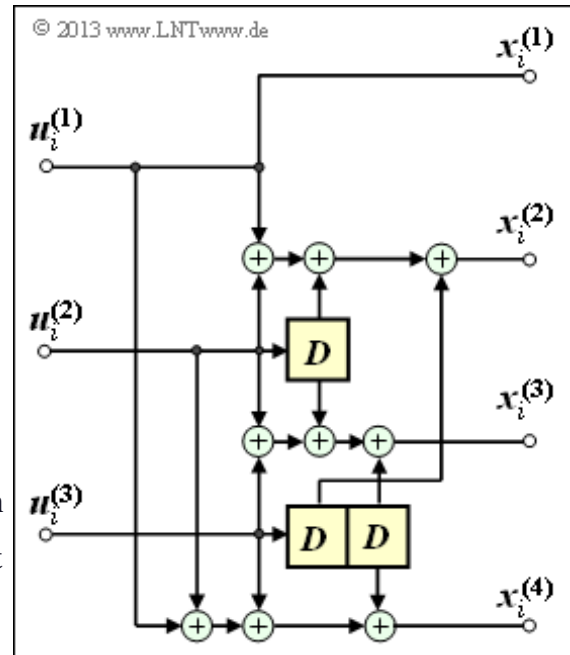
Diese Sequenz wird auf drei Stränge aufgeteilt:

$$\underline{u}^{(1)} = (0, 1, 1, \dots),$$

$$\underline{u}^{(2)} = (1, 1, 0, \dots),$$

$$\underline{u}^{(3)} = (1, 0, 1, \dots).$$

Die zum Zeitpunkt i am Coder anliegenden Bits werden mit $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$ und $u_i^{(3)}$ bezeichnet. Beispielsweise gilt $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(2)} = 1$ sowie $u_3^{(3)} = 1$.



In dieser Aufgabe sollen ermittelt werden:

- die Anzahl k der pro Codierschritt verarbeiteten Informationsbits,
- die Anzahl n der pro Codierschritt ausgegebenen Codebits,
- die Gedächtnisordnung (oder kurz: das Gedächtnis) m ,
- die Gesamteinflusslänge (oder kurz: Einflusslänge) v .

Außerdem sollen Sie für die angegebene Informationssequenz \underline{u} die Codesymbole $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, $x_i^{(3)}$, $x_i^{(4)}$ für die Taktzeitpunkte $i = 1$ und $i = 3$ bestimmen. Dabei ist vorauszusetzen, dass alle Speicherelemente zu Beginn mit Nullen belegt waren.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 3.1**. Der Vollständigkeit halber werden hier auch die Codebits zum Taktschritt $i = 2$ angegeben:

$$x_2^{(1)} = 1, \quad x_2^{(2)} = 0, \quad x_2^{(3)} = 0, \quad x_2^{(4)} = 0.$$

Diese letzte Angabe wird zur Lösung der Aufgabe allerdings nicht benötigt.

Fragebogen zu "A3.1: Analyse eines Faltungscoders"

a) Wie lauten die Codeparameter k und n ?

$$k =$$

$$n =$$

b) Wie groß sind die Gedächtnisordnung m und die Gesamteinflusslänge v ?

$$m =$$

$$v =$$

c) Wie lauten die vier Codebits im ersten Codierschritt ($i = 1$)?

$$x_1^{(1)} =$$

$$x_1^{(2)} =$$

$$x_1^{(3)} =$$

$$x_1^{(4)} =$$

d) Wie lauten die Codebits im dritten Codierschritt ($i = 3$)?

$$x_3^{(1)} =$$

$$x_3^{(2)} =$$

$$x_3^{(3)} =$$

$$x_3^{(4)} =$$

Z3.1: Faltungscodes der Rate 1/2

Die Grafik zeigt zwei Faltungscodierer der Rate $R = 1/2$. Am Eingang liegt die Informationssequenz $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_i, \dots)$ an. Hieraus werden durch Modulo-2-Operationen die beiden Sequenzen

$$\underline{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_i^{(1)}, \dots),$$

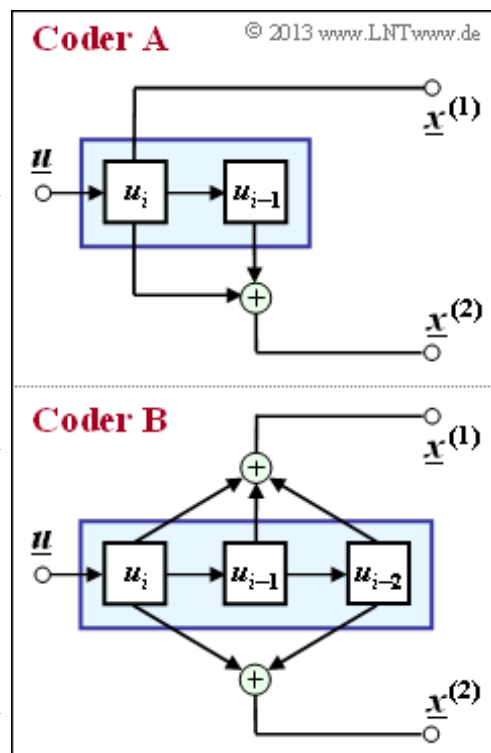
$$\underline{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_i^{(2)}, \dots)$$

erzeugt, wobei $x_i^{(j)}$ mit $j = 1$ bzw. $j = 2$ außer von u_i auch von den vorherigen Informationsbits u_{i-1}, \dots, u_{i-m} abhängen kann. Man bezeichnet m als das Gedächtnis und $v = m + 1$ als die Einflusslänge des Codes bzw. des Codierers. Die betrachteten Coder **A** und **B** unterscheiden sich hinsichtlich dieser Größen.

In der Grafik nicht dargestellt ist das Multiplexen der beiden Teilsequenzen $\underline{x}^{(1)}$ und $\underline{x}^{(2)}$ zur resultierenden Codesequenz $\underline{x} = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots)$.

In den Teilaufgaben (c) bis (e) sollen Sie den jeweiligen Beginn der Sequenzen $\underline{x}^{(1)}$, $\underline{x}^{(2)}$ und \underline{x} ermitteln, wobei von der Informationssequenz $\underline{u} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$ auszugehen ist.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das Themengebiet von **Kapitel 3.1**.



Fragebogen zu "Z3.1: Faltungscodes der Rate 1/2"

a) In welchen Codeparametern unterscheiden sich **Coder A** und **Coder B**?

- k : Anzahl der pro Codierschritt verarbeiteten Informationsbits,
- n : Anzahl der pro Codierschritt ausgegebenen Codebits,
- m : Gedächtnisordnung des Codes bzw. des Coders,
- v : Einflusslänge des Codes.

b) Welcher Coder weist das Gedächtnis $m = 2$ auf?

- Coder A,
- Coder B.

c) Wie lautet die Teilcodesequenz $\underline{x}^{(1)}$ von **Coder B** für $\underline{u} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$?

- $\underline{x}^{(1)} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$,
- $\underline{x}^{(1)} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots)$.

d) Wie lautet die Teilcodesequenz $\underline{x}^{(2)}$ von **Coder B** für $\underline{u} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$?

- $\underline{x}^{(2)} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$,
- $\underline{x}^{(2)} = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, \dots)$.

e) Wie beginnt die gesamte Codesequenz \underline{x} von **Coder B** nach Multiplexing?

- $\underline{x} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \dots)$,
- $\underline{x} = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$.

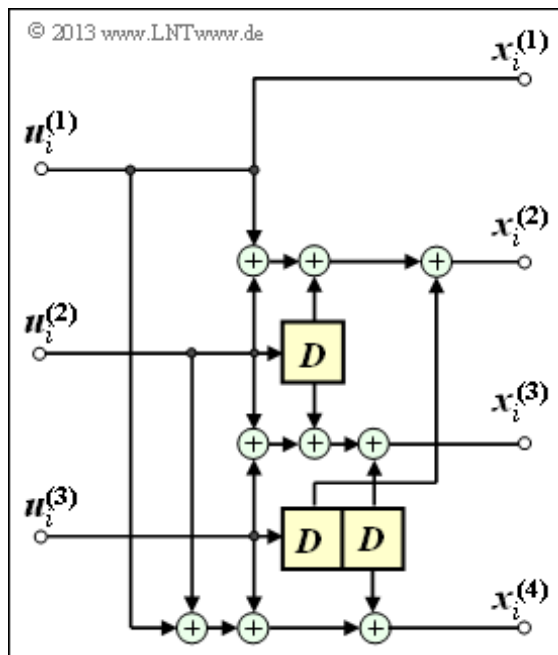
A3.2: G-Matrix eines Faltungscoders

Wir betrachten wie in **Aufgabe A3.1** den nebenstehend gezeichneten Faltungscodierer der Rate 3/4. Dieser wird durch den folgenden Gleichungssatz charakterisiert:

$$\begin{aligned} x_i^{(1)} &= u_i^{(1)}, \\ x_i^{(2)} &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_{i-1}^{(2)} + u_{i-1}^{(3)}, \\ x_i^{(3)} &= u_i^{(2)} + u_i^{(3)} + u_{i-1}^{(2)} + u_{i-2}^{(3)}, \\ x_i^{(4)} &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_i^{(3)} + u_{i-2}^{(3)}. \end{aligned}$$

Bezieht man sich auf die bei $i = 1$ beginnenden und sich zeitlich bis ins Unendliche erstreckenden Sequenzen

$$\begin{aligned} \underline{u} &= (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_i, \dots), \\ \underline{x} &= (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_i, \dots) \end{aligned}$$



mit $\underline{u}_i = (u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(k)})$ bzw. $\underline{x}_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n)})$, so kann der Zusammenhang zwischen der Informationssequenz \underline{u} und der Codesequenz \underline{x} durch die Generatormatrix \mathbf{G} in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\underline{x} = \underline{u} \cdot \mathbf{G}.$$

Für die Generatormatrix eines Faltungscoders mit dem Gedächtnis m ist dabei zu setzen:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \dots & \mathbf{G}_m & & & \\ & \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \dots & \mathbf{G}_m & & \\ & & \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \dots & \mathbf{G}_m & \\ & & & \dots & \dots & & & \dots \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnen $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots$ Teilmatrizen mit jeweils k Zeilen und n Spalten sowie binären Matrixelementen (0 oder 1). Ist das Matrixelement $\mathbf{G}_l(\kappa, j) = 1$, so bedeutet dies, dass das Codebit $x_i^{(j)}$ durch das Informationsbit $u_{i-l}^{(\kappa)}$ beeinflusst wird. Andernfalls ist dieses Matrixelement gleich 0.

Ziel dieser Aufgabe ist es, die zur Informationssequenz

$$\underline{u} = (0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$$

gehörige Codesequenz \underline{x} entsprechend den obigen Vorgaben zu berechnen. Das Ergebnis müsste mit dem Ergebnis von **Aufgabe A3.1** übereinstimmen, das allerdings auf anderem Wege erzielt wurde.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 3.2**.

Fragebogen zu "A3.2: G-Matrix eines Faltungscoders"

a) Aus wie vielen Teilmatrizen G_7 setzt sich die Matrix G zusammen?

Anzahl der Teilmatrizen =

b) Welche Aussagen treffen für die Teilmatrix G_0 zu?

- Insgesamt beinhaltet G_0 acht Einsen.
- Die erste Zeile von G_0 lautet 1 1 0 1.
- Die erste Zeile von G_0 lautet 1 0 0.

c) Welche Aussagen treffen für die Teilmatrix G_1 zu?

- Die erste Zeile lautet 0 0 0 0 .
- Die zweite Zeile lautet 0 1 1 0.
- Die dritte Zeile lautet 0 1 0 0.

d) Ermitteln Sie die ersten neun Zeilen und zwölf Spalten der Generatormatrix G . Welche Aussagen treffen zu?

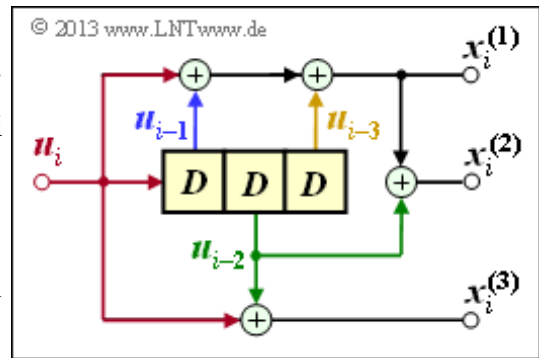
- Es gibt mindestens eine Zeile mit lauter Nullen.
- Es gibt mindestens eine Zeile mit lauter Einsen.
- In den Spalten 1, 5, 9 steht jeweils nur eine einzige Eins.

e) Welche Codesequenz \underline{x} ergibt sich für $\underline{u} = (0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$?

- Es gilt: $\underline{x} = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, \dots)$.
- Es gilt: $\underline{x} = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, \dots)$.
- Es gilt: $\underline{x} = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$.

Z3.2: (3, 1, 3)–Faltungscodierer

Der dargestellte Faltungscodierer wird durch die Parameter $k = 1$ (nur eine Informationssequenz \underline{u}) sowie $n = 3$ (drei Codesequenzen $\underline{x}^{(1)}$, $\underline{x}^{(2)}$, $\underline{x}^{(3)}$) charakterisiert. Aus der Anzahl der Speicherzellen ergibt sich das Gedächtnis $m = 3$. Mit dem Informationsbit u_i zum Codierschritt i erhält man die folgenden Codebits:



$$\begin{aligned} x_i^{(1)} &= u_i + u_{i-1} + u_{i-3}, \\ x_i^{(2)} &= u_i + u_{i-1} + u_{i-2} + u_{i-3}, \\ x_i^{(3)} &= u_i + u_{i-2}. \end{aligned}$$

Daraus lassen sich Teilmatrizen \mathbf{G}_l ableiten, wie auf der **Theorieseite 1** dieses Kapitels beschrieben. Für die Generatormatrix kann somit geschrieben werden:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \cdots & \mathbf{G}_m & & & \\ & \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \cdots & \mathbf{G}_m & & \\ & & \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \cdots & \mathbf{G}_m & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix},$$

und für die Codesequenz $\underline{x} = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)}, \dots)$ gilt:

$$\underline{x} = \underline{u} \cdot \mathbf{G}.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 3.2**.

Fragebogen zu "Z3.2: (3, 1, 3)-Faltungscodierer"

a) Aus wievielen Teilmatrizen G_i setzt sich die Matrix G zusammen?

Anzahl der Teilmatrizen =

b) Welche Dimension besitzen die Teilmatrizen G_i ?

Zeilenzahl der Teilmatrizen =

Spaltenzahl der Teilmatrizen =

c) Welche Aussagen sind richtig?

Es gilt $G_0 = (1, 1, 1)$.

Es gilt $G_1 = (1, 1, 0)$.

Es gilt $G_2 = (0, 1, 1)$.

Es gilt $G_3 = (1, 1, 0)$.

d) Erstellen Sie die Generatormatrix G mit 5 Zeilen und 15 Spalten. Welche Codesequenz ergibt sich für $\underline{u} = (1, 0, 1, 1, 0)$?

Es gilt $\underline{x} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$.

Es gilt $\underline{x} = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, \dots)$.

Es gilt $\underline{x} = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$.

Fragebogen zu "A3.3: \underline{x} über $U(D)$ und $G(D)$ "

a) Wie lauten die Codeparameter? *Hinweis:* Für das Gedächtnis gelte $m \leq 2$.

$$n =$$

$$k =$$

$$m =$$

b) Welche Aussagen sind für die Übertragungsfunktionsmatrix $G(D)$ richtig?

Das $G(D)$ -Element in Zeile 1, Spalte 1 ist „1“.

Das $G(D)$ -Element in Zeile 2, Spalte 2 ist „ $1 + D$ “.

Das $G(D)$ -Element in Zeile 3, Spalte 3 ist „ $1 + D^2$ “.

c) Welche Aussagen treffen für die D -Transformierten der Eingangssequenzen zu?

$U^{(1)}(D) = 1$,

$U^{(2)}(D) = 1 + D$,

$U^{(3)}(D) = D^2$.

d) Wie lauten die ersten drei Bit der Codesequenz $\underline{x}^{(1)}$?

$\underline{x}^{(1)} = (0, 1, 1, \dots)$,

$\underline{x}^{(1)} = (1, 0, 0, \dots)$,

$\underline{x}^{(1)} = (0, 0, 1, \dots)$.

e) Wie lauten die ersten drei Bit der Codesequenz $\underline{x}^{(2)}$?

$\underline{x}^{(2)} = (0, 1, 1, \dots)$,

$\underline{x}^{(2)} = (1, 0, 0, \dots)$,

$\underline{x}^{(2)} = (0, 0, 1, \dots)$.

f) Wie lauten die ersten drei Bit der Codesequenz $\underline{x}^{(3)}$?

$\underline{x}^{(3)} = (0, 1, 1, \dots)$,

$\underline{x}^{(3)} = (1, 0, 0, \dots)$,

$\underline{x}^{(3)} = (0, 0, 1, \dots)$.

Z3.3: Faltung und D-Transformation

In dieser Aufgabe beschreiben wir an einem einfachen Beispiel

- die endliche **Impulsantwort** eines Filters:

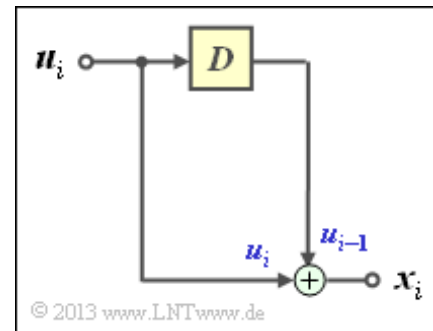
$$\underline{g} = (g_0, g_1, \dots, g_l, \dots, g_m), \quad g_l \in \text{GF}(2) = \{0, 1\},$$

- die **Eingangssequenz** des Filters:

$$\underline{u} = (u_0, u_1, \dots, u_i, \dots), \quad u_i \in \text{GF}(2) = \{0, 1\},$$

- die **Ausgangssequenz** des Filters:

$$\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_i, \dots), \quad x_i \in \text{GF}(2) = \{0, 1\}.$$



Die Nomenklatur für diese (digitale) Filterbeschreibung haben wir an das Buch „Einführung in die Kanalcodierung;“ angepasst. In anderen Büchern bezeichnet oft \underline{x} den Filtereingang, \underline{y} den Filterausgang, und die Impulsantwort wird h genannt.

Allgemein gilt für die Ausgangssequenz entsprechend der **Faltung** (englisch: *Convolution*):

$$\underline{x} = \underline{u} * \underline{g} = (x_0, x_1, \dots, x_i, \dots), \quad \text{mit } x_i = \sum_{l=0}^m g_l \cdot u_{i-l}.$$

Wir repräsentieren nun die Zeitfunktionen \underline{g} , \underline{u} und \underline{x} durch Polynome in einer Dummy-Variablen D und nennen diese die D -Transformierten:

$$\underline{g} \xrightarrow{D} G(D) = \sum_{l=0}^m g_l \cdot D^l = g_0 + g_1 \cdot D + g_2 \cdot D^2 + \dots + g_m \cdot D^m,$$

$$\underline{u} \xrightarrow{D} U(D) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \cdot D^i = u_0 + u_1 \cdot D + u_2 \cdot D^2 + \dots,$$

$$\underline{x} \xrightarrow{D} X(D) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot D^i = x_0 + x_1 \cdot D + x_2 \cdot D^2 + \dots$$

Damit wird aus der (komplizierteren) Faltung eine Multiplikation:

$$\underline{x} = \underline{u} * \underline{g} \xrightarrow{D} X(D) = U(D) \cdot G(D).$$

Formal lässt sich dieser Zusammenhang wie folgt nachweisen:

$$\begin{aligned} X(D) &= \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot D^i = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m g_l \cdot u_{i-l} \cdot D^i = \sum_{l=0}^m g_l \cdot \sum_{j=-l}^{\infty} u_j \cdot D^{j+l} = \\ &= \sum_{l=0}^m g_l \cdot D^l \cdot \sum_{j=0}^{\infty} u_j \cdot D^j \Rightarrow X(D) = U(D) \cdot G(D). \end{aligned}$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass alle u_j für $j < 0$ nicht existieren und zu 0 gesetzt werden können.

Beide Vorgehensweisen zur Berechnung der Ausgangssequenz \underline{x} , nämlich

- über die Faltung
- mit Hilfe der D -Transformation,

sollen für das oben skizzierte Digitale Filter demonstriert werden.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Seite 4** des Kapitels 3.2. Berücksichtigen Sie bei der Lösung die folgende Identität für Berechnungen in $\text{GF}(2)$:

$$1 + D + D^2 + D^3 + \dots = \frac{1}{1 + D}.$$

Fragebogen zu "Z3.3: Faltung und D-Transformation"

a) Wie lauten die vorliegenden Filterkoeffizienten?

$$g_0 =$$

$$g_1 =$$

$$g_2 =$$

b) Die Sequenz $\underline{u} = (1, 0, 0, 1)$ sei endlich. Wie lautet die Ausgangssequenz?

$\underline{x} = (1, 0, 0, \dots)$.

$\underline{x} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$.

$\underline{x} = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$.

$\underline{x} = (1, 1, 1, 1, \dots) \Rightarrow$ „Dauer-Einsfolge“.

c) Die Sequenz $\underline{u} = (1, 1, 1)$ sei endlich. Wie lautet die Ausgangssequenz?

$\underline{x} = (1, 0, 0, \dots)$.

$\underline{x} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$.

$\underline{x} = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$.

$\underline{x} = (1, 1, 1, 1, \dots) \Rightarrow$ „Dauer-Einsfolge“.

d) Wie lautet die Ausgangssequenz für $\underline{u} = (1, 1, 1, 1, \dots) \Rightarrow$ „Dauer-Einsfolge“?

$\underline{x} = (1, 0, 0, \dots)$.

$\underline{x} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$.

$\underline{x} = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$.

$\underline{x} = (1, 1, 1, 1, \dots) \Rightarrow$ „Dauer-Einsfolge“.

e) Für welchen Vektor \underline{u} tritt am Ausgang die Folge $\underline{x} = (1, 1, 1, 1, \dots)$ auf?

$\underline{u} = (1, 1, 1, 1, \dots) \Rightarrow$ „Dauer-Einsfolge“.

$\underline{u} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) \Rightarrow$ alternierende Folge, beginnend mit 1.

$\underline{u} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \Rightarrow$ alternierende Folge, beginnend mit 0.

A3.4: Systematische Faltungscodes

Man spricht von einem systematischen Faltungscodier der Rate $R = 1/2 \Rightarrow k = 1, n = 2$, wenn das Codebit $x_i^{(1)}$ gleich dem momentan anliegenden Informationsbit u_i ist.

Die Übertragungsfunktionsmatrix eines solchen Codes lautet:

$$\mathbf{G}(D) = (1, G^{(2)}(D)).$$

Der in der oberen Grafik dargestellte **Coder A** ist sicher nicht systematisch, da für diesen $G^{(1)}(D) \neq 1$ gilt. Zur Herleitung der Matrix $\mathbf{G}(D)$ verweisen wir auf ein **früheres Beispiel**, in dem für unseren Standard-Rate-1/2-Codier mit Gedächtnis $m = 2$ ermittelt wurde:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(D) &= (G^{(1)}(D), G^{(2)}(D)) = \\ &= (1 + D + D^2, 1 + D^2). \end{aligned}$$

Der **Coder A** unterscheidet sich gegenüber diesem Beispiel nur durch Vertauschen der beiden Ausgänge.

Lautet die Übertragungsfunktionsmatrix eines Codes

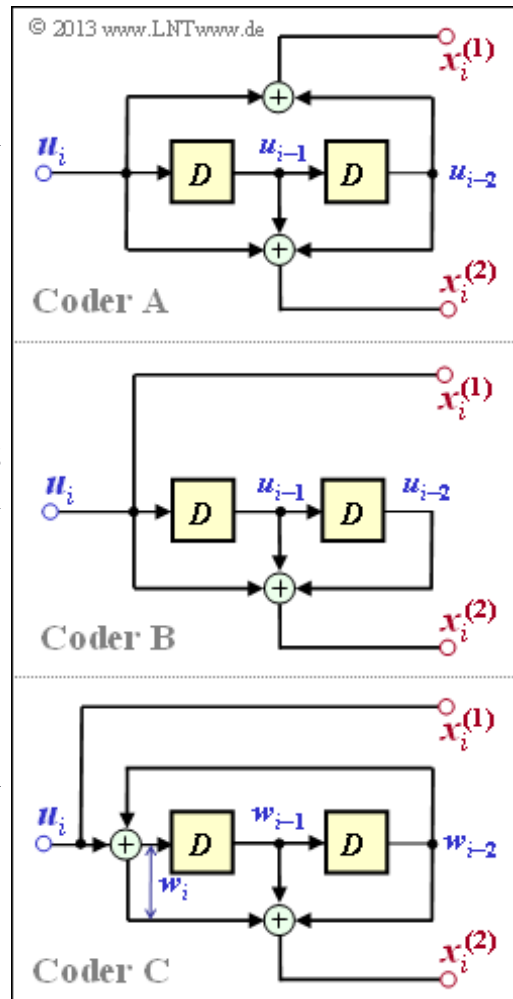
$$\mathbf{G}(D) = (G^{(1)}(D), G^{(2)}(D)),$$

so gilt für die äquivalente systematische Repräsentation dieses Rate-1/2-Faltungscodes allgemein:

$$\mathbf{G}_{\text{sys}}(D) = (1, G^{(2)}(D)/G^{(1)}(D)).$$

In der Teilaufgabe (c) ist zu prüfen, welcher der systematischen Anordnungen (entweder **Code B** oder **Code C** oder auch beide) äquivalent zum Code A ist.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die Thematik von **Kapitel 3.2**.



Fragebogen zu "A3.4: Systematische Faltungscodes"

a) Wie lautet die Übertragungsfunktionsmatrix von **Coder A**?

$\mathbf{G}(D) = (1 + D^2, 1 + D + D^2),$

$\mathbf{G}(D) = (1 + D + D^2, 1 + D^2),$

$\mathbf{G}(D) = (1, 1 + D + D^2).$

b) Wie lautet die äquivalente systematische Übertragungsfunktionsmatrix?

$\mathbf{G}_{\text{sys}}(D) = (1 + D + D^2, 1 + D^2),$

$\mathbf{G}_{\text{sys}}(D) = (1, 1 + D + D^2),$

$\mathbf{G}_{\text{sys}}(D) = (1, (1 + D + D^2)/(1 + D^2)).$

c) Welcher Coder ist zu Coder A äquivalent und systematisch?

Coder B,

Coder C.

Z3.4: Äquivalente Faltungscodes?

Die obere Darstellung zeigt einen Faltungscodierer, der durch folgende Gleichungen beschrieben wird:

$$\begin{aligned} x_i^{(1)} &= u_i^{(1)} + u_{i-1}^{(1)} + u_{i-1}^{(2)}, \\ x_i^{(2)} &= u_i^{(2)} + u_{i-1}^{(2)}, \\ x_i^{(3)} &= u_i^{(2)}. \end{aligned}$$

Gesucht sind die Übertragungsfunktionsmatrizen

- $\mathbf{G}(D)$ dieses nichtsystematischen Codes, und
- $\mathbf{G}_{\text{sys}}(D)$ des äquivalenten systematischen Codes.

Die Matrix $\mathbf{G}_{\text{sys}}(D)$ erhält man in folgender Weise:

- Man spaltet von der $k \times n$ -Matrix $\mathbf{G}(D)$ vorne eine quadratische Matrix $\mathbf{T}(D)$ mit jeweils k Zeilen und Spalten ab. Den Rest bezeichnet man mit $\mathbf{Q}(D)$.
- Anschließend berechnet man die zu $\mathbf{T}(D)$ inverse Matrix $\mathbf{T}^{-1}(D)$ und daraus die gesuchte Matrix für den äquivalenten systematischen Code:

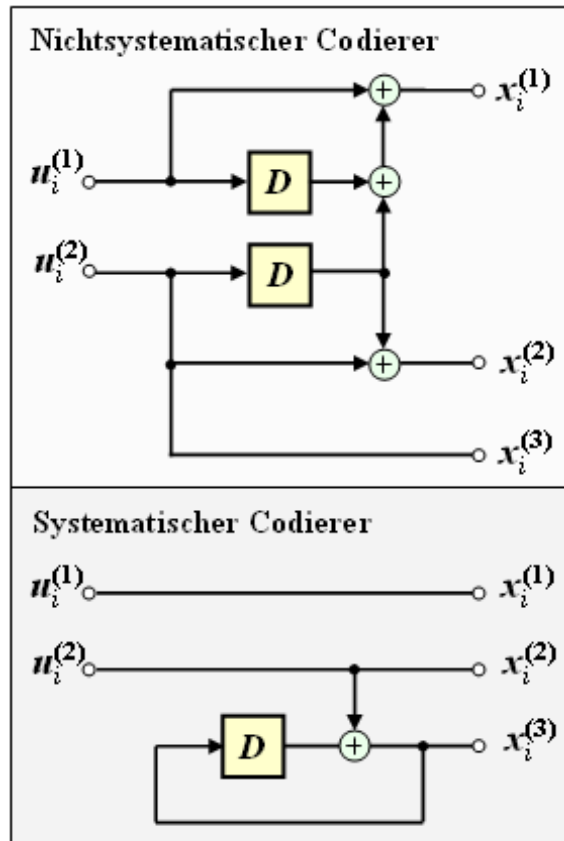
$$\mathbf{G}_{\text{sys}}(D) = \mathbf{T}^{-1}(D) \cdot \mathbf{G}(D).$$

- Da $\mathbf{T}^{-1}(D) \cdot \mathbf{T}(D)$ die $k \times k$ -Einheitsmatrix \mathbf{I}_k ergibt, kann die Übertragungsfunktionsmatrix des äquivalenten systematischen Codes in der gewünschten Form geschrieben werden:

$$\mathbf{G}_{\text{sys}}(D) = [\mathbf{I}_k; \mathbf{P}(D)] \quad \text{mit} \quad \mathbf{P}(D) = \mathbf{T}^{-1}(D) \cdot \mathbf{Q}(D).$$

Die untere Schaltung erzeugt mit Sicherheit einen systematischen Code mit gleichen Parametern k und n . In der Teilaufgabe (e) ist zu klären, ob es sich dabei tatsächlich um den *äquivalenten systematischen Code* handelt. Das heißt, ob sich tatsächlich für die beiden Schaltungen genau die gleiche Menge $\{ \underline{x} \}$ an Codesequenzen ergibt, wenn man alle möglichen Informationssequenzen $\{ \underline{u} \}$ berücksichtigt.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf ein Themengebiet aus **Kapitel 3.2**.



© 2013 www.LNTwww.de

Fragebogen zu "Z3.4: Äquivalente Faltungscodes?"

a) Wie lauten die Parameter des oben dargestellten Codierers?

$$k =$$

$$n =$$

$$R =$$

$$m =$$

$$v =$$

b) Welche Form hat die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(D)$?

- Die erste Zeile von $\mathbf{G}(D)$ lautet $(1+D, 0, 0)$.
- Die erste Zeile von $\mathbf{G}(D)$ lautet $(1+D^2, 0, D^2)$.
- Die zweite Zeile von $\mathbf{G}(D)$ lautet $(D, 1+D, 1)$.
- Die dritte Zeile von $\mathbf{G}(D)$ lautet $(D, 1+D, 1)$.

c) Geben Sie $\mathbf{T}(D)$ und $\mathbf{T}^{-1}(D)$ an. Wie lautet die Determinante?

- $\det \mathbf{T}(D) = 1,$
- $\det \mathbf{T}(D) = D,$
- $\det \mathbf{T}(D) = 1+D^2.$

d) Was gilt für die äquivalente systematische Übertragungsfunktionsmatrix?

- Die erste Zeile von $\mathbf{G}_{\text{sys}}(D)$ lautet $(1, 0, 0)$.
- Die zweite Zeile von $\mathbf{G}_{\text{sys}}(D)$ lautet $(0, 1, 1 + D)$.
- Die zweite Zeile von $\mathbf{G}_{\text{sys}}(D)$ lautet $(0, 1, 1/(1 + D))$.

e) Sind die beiden vorgegebenen Schaltungen tatsächlich äquivalent?

- JA.
- NEIN.

A3.5: Rekursive Filter für GF(2)

Die obere der beiden dargestellten Schaltungen zeigt ein rekursives Filter zweiter Ordnung in allgemeiner Form. Mit

$$A(D) = a_0 + a_1 \cdot D + a_2 \cdot D^2,$$

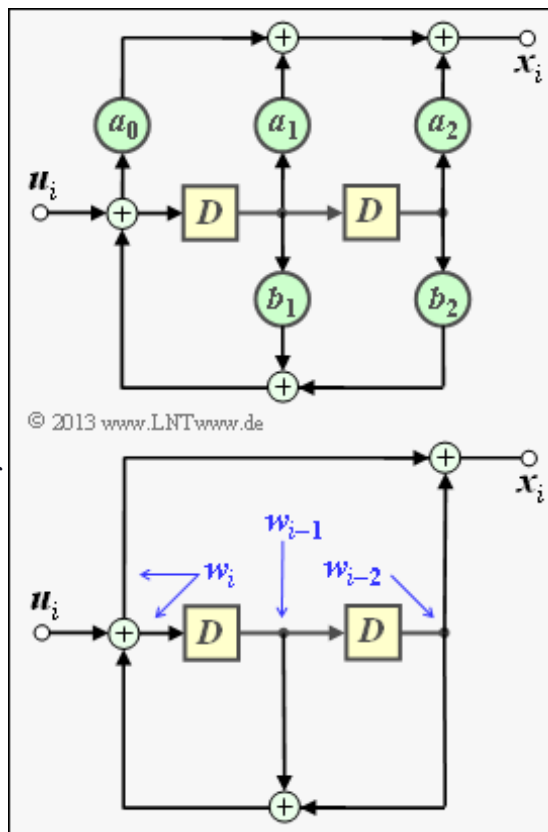
$$B(D) = 1 + b_1 \cdot D + b_2 \cdot D^2$$

erhält man für die Übertragungsfunktion

$$G(D) = \frac{A(D)}{B(D)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot D + a_2 \cdot D^2}{1 + b_1 \cdot D + b_2 \cdot D^2}.$$

Zu beachten ist, dass sich alle Rechenoperationen auf GF(2) beziehen. Damit sind auch die Filterkoeffizienten a_0 , a_1 , a_2 , b_1 und b_2 binär (entweder 0 oder 1).

Die untere Grafik zeigt das für die vorliegende Aufgabe spezifische Filter. Ein Filterkoeffizient ergibt sich zu $a_i = 1$, wenn die Verbindung durchgeschaltet ist ($0 \leq i \leq 2$). Andernfalls ist $a_i = 0$. Die gleiche Systematik gilt für die Koeffizienten b_1 und b_2 .



In den Teilaufgaben (a), ... , (c) sollen Sie für verschiedene Eingangssequenzen

- $\underline{u} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$,
- $\underline{u} = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, \dots)$,
- $\underline{u} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$

die jeweilige Ausgangssequenz \underline{x} anhand der vorgegebenen Schaltung ermitteln. Es ist zu berücksichtigen:

- Besteht die Eingangssequenz \underline{u} aus einer Eins gefolgt von lauter Nullen, so bezeichnet man diese spezifische Ausgangssequenz \underline{x} als die *Impulsantwort* \underline{g} , und es gilt:

$$\underline{g} \circ \overset{D}{-} \bullet G(D).$$

- Andernfalls ergibt sich die Ausgangssequenz als das **Faltungsprodukt** zwischen Eingangssequenz und Impulsantwort:

$$\underline{x} = \underline{u} * \underline{g}.$$

- Die Faltungsoperation lässt sich mit dem Umweg über die **D-Transformation** umgehen.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die **letzte Seite** von Kapitel 3.2.

Fragebogen zu "A3.5: Rekursive Filter für GF(2)"

a) Welche Aussagen gelten für die Impulsantwort g des rekursiven Filters?

- Es gilt $g = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$.
- Es gilt $g = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, \dots)$.
- Die Impulsantwort g ist unendlich weit ausgedehnt.

b) Es sei nun $\underline{u} = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$. Welche Aussagen treffen zu?

- Die Ausgangssequenz lautet: $\underline{x} = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$.
- Die Ausgangssequenz lautet: $\underline{x} = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, \dots)$.
- Die Ausgangssequenz \underline{x} reicht bis ins Unendliche.

c) Nun gelte $\underline{u} = (1, 1, 1)$. Welche Aussagen treffen zu?

- Die Ausgangssequenz \underline{x} beginnt mit $(1, 0, 1)$.
- Die Ausgangssequenz \underline{x} beginnt mit $(1, 1, 1)$.
- Die Ausgangssequenz \underline{x} reicht bis ins Unendliche.

d) Welche Aussagen gelten für die Übertragungsfunktion $G(D)$?

- Es gilt $G(D) = (1 + D^2)/(1 + D + D^2)$.
- Es gilt $G(D) = (1 + D + D^2)/(1 + D^2)$.
- Es gilt $G(D) = 1 + D + D^2 + D^4 + D^5 + D^7 + D^8 + \dots$.

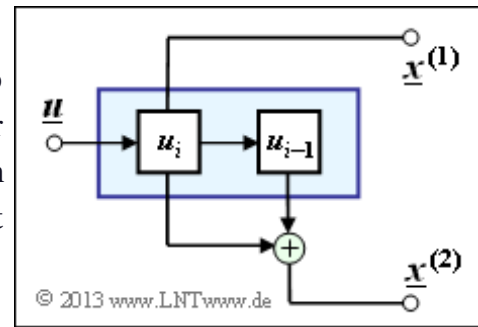
A3.6: Zustandsübergangsdiagramm

Eine Beschreibungsmöglichkeit für Faltungscodierer bietet das so genannte *Zustandsübergangsdiagramm*. Beinhaltet der Coder m Speicherregister \Rightarrow Einflusslänge $v = m + 1$, so gibt es nach der aktuellen Speicherbelegung verschiedene Zustände S_μ mit $0 \leq \mu \leq 2^m - 1$, wobei für den Index gilt:

$$\mu = \sum_{l=1}^m 2^{l-1} \cdot u_{i-l}.$$

Diese Art der Coderbeschreibung soll auf den oben skizzierten Faltungscodierer der Rate $R = 1/2$ angewendet werden.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 3.3**.



Fragebogen zu "A3.6: Zustandsübergangsdiagramm"

a) Wieviele Zustände weist dieser Faltungscodierer auf?

Anzahl der Zustände =

b) Kommt man von jedem Zustand zu allen anderen Zuständen?

- Ja.
- Nein.

c) Welche Aussagen gelten für den Übergang von $s_i = S_1$ zu $s_{i+1} = S_0$?

- Das aktuelle Informationsbit muss $u_i = 0$ sein.
- Das aktuelle Informationsbit muss $u_i = 1$ sein.
- Die zugehörige Codesequenz lautet $\underline{x}_i = (01)$.
- Die zugehörige Codesequenz lautet $\underline{x}_i = (10)$.

d) Welche Aussagen gelten für den Übergang von $s_i = S_1$ zu $s_{i+1} = S_1$?

- Das aktuelle Informationsbit muss $u_i = 0$ sein.
- Das aktuelle Informationsbit muss $u_i = 1$ sein.
- Die zugehörige Codesequenz lautet $\underline{x}_i = (01)$.
- Die zugehörige Codesequenz lautet $\underline{x}_i = (10)$.

e) Welche Informationssequenzen sind möglich?

- $\underline{u} = (1, 1, 0, 0, 1, 1, \dots)$,
- $\underline{u} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$.

f) Welche Codesequenzen sind möglich?

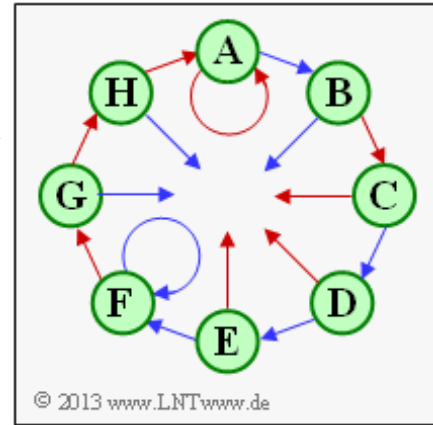
- $\underline{x} = (11, 10, 01, 00, 11, 10, \dots)$,
- $\underline{x} = (11, 00, 10, 01, 11, 00, \dots)$.

Z3.6: Übergangsdiagramm für $m = 3$

Im Zustandsübergangsdiagramm eines Codierers mit Gedächtnis m gibt es 2^m Zustände. Das dargestellte Diagramm mit acht Zuständen beschreibt deshalb einen Faltungscoder mit dem Gedächtnis $m = 3$.

Normalerweise bezeichnet man die Zustände mit $S_0, \dots, S_\mu, \dots, S_7$, wobei der Index μ aus der Belegung des Schieberegisters (Inhalt von links nach rechts: $u_{i-1}, u_{i-2}, u_{i-3}$) festgelegt ist:

$$\mu = \sum_{l=1}^m 2^{l-1} \cdot u_{i-l}.$$



Der Zustand S_0 ergibt sich deshalb für den Schieberegisterinhalt „000“, der Zustand S_1 für „100“ und der Zustand S_7 für „111“.

In obiger Grafik sind allerdings für die Zustände S_0, \dots, S_7 Platzhalter namens A, ... , H verwendet. In den Teilaufgaben (a) und (b) sollen Sie klären, welcher Platzhalter für welchen Zustand steht.

Bei Faltungscodierern der Rate $1/n$, die hier ausschließlich betrachtet werden sollen, gehen von jedem Zustand S_μ zwei Pfeile ab, ein roter für das aktuelle Informationsbit $u_i = 0$ und ein blauer für $u_i = 1$. Auch deshalb ist das gezeigte Zustandsübergangsdiagramm nicht vollständig.

Zu erwähnen ist weiterhin:

- Bei jedem Zustand kommen auch zwei Pfeile an, wobei diese durchaus gleichfärbig sein können.
- Neben den Pfeilen stehen üblicherweise noch die n Codebits. Auch hierauf wurde hier verzichtet.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die beiden ersten Seiten von **Kapitel 3.3**. In der **Aufgabe Z3.7** werden zwei Faltungscodes mit Gedächtnis $m = 3$ untersucht, die beide durch das hier analysierte Zustandsübergangsdiagramm beschrieben werden können.

Fragebogen zu "Z3.6: Übergangsdiagramm für $m = 3$ "

a) Für welche Zustände S_μ stehen die Platzhalter A und F? \Rightarrow Index eingeben.

Zustand A \Rightarrow Index μ =

Zustand F \Rightarrow Index μ =

b) Nennen Sie auch die Zuordnungen der anderen Platzhalter zu den Indizes.

Zustand B \Rightarrow Index μ =

Zustand C \Rightarrow Index μ =

Zustand D \Rightarrow Index μ =

Zustand E \Rightarrow Index μ =

Zustand G \Rightarrow Index μ =

Zustand H \Rightarrow Index μ =

c) Zu welchem Zustand S_μ geht der jeweils zweite Pfeil? \Rightarrow Index eingeben.

Von S_1 zum Zustand mit Index μ =

Von S_3 zum Zustand mit Index μ =

Von S_5 zum Zustand mit Index μ =

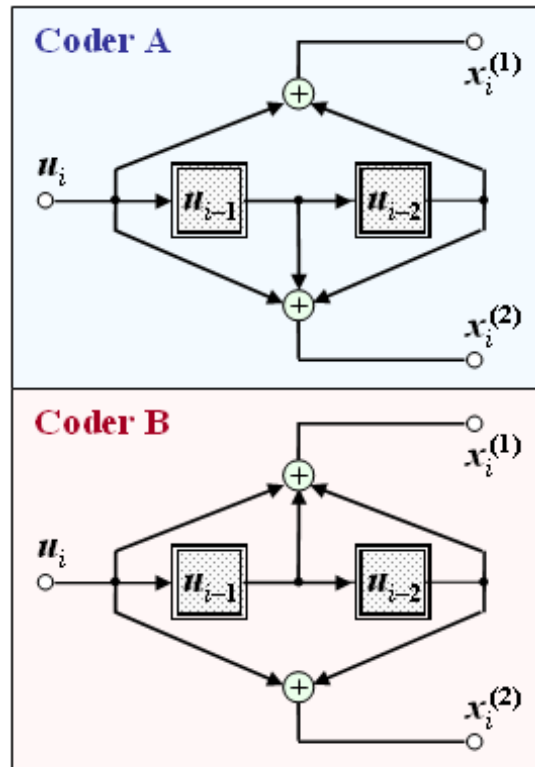
Von S_7 zum Zustand mit Index μ =

A3.7: Vergleich zweier Faltungscoder

Die Grafik zeigt zwei Rate-1/2-Faltungscodierer, jeweils mit dem Gedächtnis $m = 2$:

- Der **Coder A** weist die Übertragungsfunktionsmatrix $G(D) = (1 + D^2, 1 + D + D^2)$ auf.
- Beim **Coder B** sind die beiden Filter vertauscht, und es gilt: $G(D) = (1 + D + D^2, 1 + D^2)$.

Der untere Coder wurde im **Theorieteil** schon ausführlich behandelt. In der vorliegenden Aufgabe sollen Sie zunächst das Zustandsübergangdiagramm für Coder A ermitteln und anschließend die Unterschiede und die Gemeinsamkeiten zwischen den beiden Diagrammen herausarbeiten.



© 2013 www.LNTwww.de

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die ersten Seiten von **Kapitel 3.3**.

Fragebogen zu "A3.7: Vergleich zweier Faltungscoder"

a) Es gelte $\underline{u} = (0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, \dots)$. Welche Sequenzen erzeugt Coder A?

$\underline{x}^{(1)} = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$,

$\underline{x}^{(1)} = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, \dots)$,

$\underline{x}^{(2)} = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$,

$\underline{x}^{(2)} = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, \dots)$.

b) Welche der genannten Zustandsübergänge gibt es bei Coder A?

$s_i = S_0, u_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} = S_0; \quad s_i = S_0, u_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} = S_1.$

$s_i = S_1, u_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} = S_2; \quad s_i = S_1, u_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} = S_3.$

$s_i = S_2, u_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} = S_0; \quad s_i = S_2, u_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} = S_1.$

$s_i = S_3, u_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} = S_2; \quad s_i = S_3, u_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} = S_3.$

c) Wie unterscheiden sich die beiden Zustandsübergangsdiagramme?

Es sind andere Zustandsübergänge möglich.

Bei allen acht Übergängen stehen andere Codesequenzen.

Unterschiede gibt es nur für die Codesequenzen (01) und (10).

Z3.7: Welcher Code ist katastrophal ?

Die nebenstehende Grafik zeigt

- zwei unterschiedliche **Coder A** und **Coder B**, jeweils mit dem Gedächtnis $m = 3$ (oben),
- zwei Zustandsübergangsdiagramme, bezeichnet mit **Diagramm 1** und **Diagramm 2** (unten).

In der letzten Teilaufgabe sollen Sie entscheiden, welches Diagramm zum Coder A gehört und welches zum Coder B.

Zunächst werden die drei Übertragungsfunktionen

- $G(D) = 1 + D + D^2 + D^3$,
- $G(D) = 1 + D^3$, und
- $G(D) = 1 + D + D^3$

analysiert und anschließend die Ausgangssequenzen \underline{x} unter der Voraussetzung

$$\underline{u} = \underline{1} = (1, 1, 1, \dots) \circ \overset{D}{\bullet} U(D) = \frac{1}{1 + D}$$

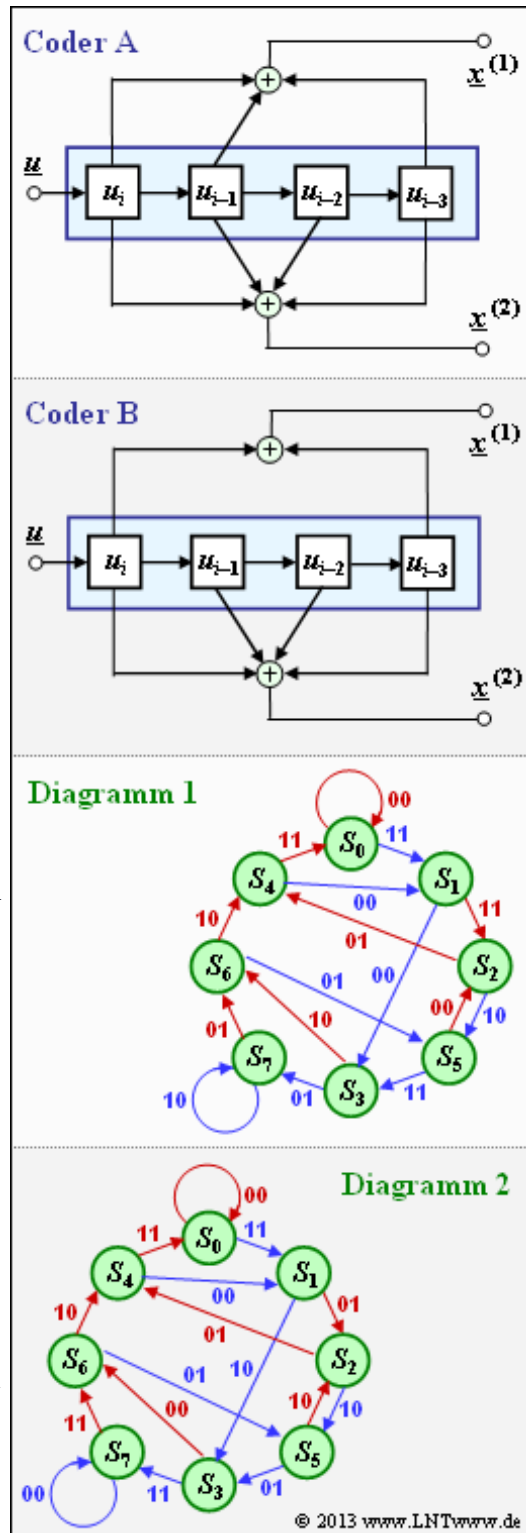
berechnet. Diese Übertragungsfunktionen stehen in direktem Zusammenhang mit den skizzierten Codierern.

Desweiteren ist noch zu klären, welcher der beiden Codes *katastrophal* ist. Von einem solchen spricht man, wenn eine endliche Anzahl von Übertragungsfehlern zu unendlich vielen Decodierfehlern führt.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 3.3**. Angegeben werden noch zwei Polynomprodukte in $GF(2)$:

$$(1 + D) \cdot (1 + D^2) = 1 + D + D^2 + D^3,$$

$$(1 + D) \cdot (1 + D + D^2) = 1 + D^3.$$



Fragebogen zu "Z3.7: Welcher Code ist katastrophal?"

a) Welche Ausgangssequenz \underline{x} ergibt sich für $\underline{u} = \underline{1}$, $G(D) = 1 + D + D^2 + D^3$?

- $\underline{x} = (1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$,
- $\underline{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$,
- $\underline{x} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$.
- Die Ausgangsfolge \underline{x} ist zeitlich begrenzt.

b) Welche Ausgangssequenz \underline{x} ergibt sich für $\underline{u} = \underline{1}$ und $G(D) = 1 + D^3$?

- $\underline{x} = (1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$,
- $\underline{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$,
- $\underline{x} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$.
- Die Ausgangsfolge \underline{x} ist zeitlich begrenzt.

c) Welche Ausgangssequenz \underline{x} ergibt sich für $\underline{u} = \underline{1}$ und $G(D) = 1 + D + D^3$?

- $\underline{x} = (1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$,
- $\underline{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$,
- $\underline{x} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$.
- Die Ausgangsfolge \underline{x} ist zeitlich begrenzt.

d) Wie lautet die Codesequenz \underline{x} von **Coder A** für die Eins-Sequenz am Eingang?

- $\underline{x} = (11, 00, 01, 10, 10, 10, \dots)$,
- $\underline{x} = (11, 10, 11, 00, 00, 00, \dots)$,
- $\underline{x} = (11, 11, 11, 11, 11, 11, \dots)$.
- Die Codesequenz \underline{x} beinhaltet endlich viele Einsen.

e) Wie lautet die Codesequenz \underline{x} von **Coder B** für die Eins-Sequenz am Eingang?

- $\underline{x} = (11, 00, 01, 10, 10, 10, \dots)$,
- $\underline{x} = (11, 10, 11, 00, 00, 00, \dots)$,
- $\underline{x} = (11, 11, 11, 11, 11, 11, \dots)$.
- Die Codesequenz \underline{x} beinhaltet endlich viele Einsen.

f) Welche Aussagen treffen für **Coder B** zu?

- Zu Coder B gehört das Zustandsübergangsdiagramm 1.

Zu Coder B gehört das Zustandsübergangsdiagramm 2.

Der Coder B ist katastrophal.

A3.8: RCPC-Codes

Eine wichtige Anwendung für **punktierte Faltungscodes** sind die *Rate Compatible Punctured Convolutional Codes* (oder kurz RCPC-Codes), die 1988 von Joachim Hagenauer vorgeschlagen wurden [Hag88]. Ausgehend von einem Muttercode C_0 mit der Rate $R_0 = 1/n$ werden durch verschiedene Punktierungsmatrizen \mathbf{P}_l andere Codes C_l mit höherer Coderate $R_l > R_0$ festgelegt.

Rechts sind die zu analysierenden Punktierungsmatrizen $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_4$ dargestellt. Ist bei der Matrix \mathbf{P}_l das Matrixelement $P_{ij} = 1$, so wird das entsprechende Codebit übertragen, während $P_{ij} = 0$ auf eine Punktierung hinweist. Im Fragebogen verwenden wir für das Element P_{ij} der Matrix \mathbf{P}_l auch die kürzere Schreibweise $P_{ij}^{(l)}$.

In der obigen Darstellung sind alle die Nullen in der Matrix \mathbf{P}_l rot markiert, die in der Matrix \mathbf{P}_{l-1} noch Einsen waren. Durch diese Maßnahme wird die Coderate R_{l-1} gegenüber R_l vergrößert.

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

© 2013 www.LNTwww.de

Die RCPC-Codes eignen sich gut zur Realisierung von

- *ungleichem Fehlerschutz* für hybride ARQ-Verfahren,
- Systemen mit *inkrementeller Redundanz*.

Unter Letzterem versteht man, dass nach der herkömmlichen Faltungscodierung aus dem Codewort $\underline{x}^{(0)}$ entsprechend der Punktierungsmatrix \mathbf{P}_l Bits weggelassen werden und das verkürzte Codewort $\underline{x}^{(l)}$ übertragen wird. Kann das punktierte Codewort im Empfänger nicht korrekt decodiert werden, fordert der Empfänger vom Sender weitere Redundanz in Form der zuvor auspunktieren Bits an. Somit wird die Übertragung von nicht benötigter Redundanz verhindert und der Durchsatz an die Kanalsegebeheiten angepasst.



Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die **letzte Seite** von Kapitel 3.5. Die RCPC-Codes wurden 1988 von **Joachim Hagenauer** erfunden, von 1993 bis 2006 Leiter des Lehrstuhls für Nachrichtentechnik (LNT) der Technischen Universität München. Die Verantwortlichen des von Ihnen gerade genutzten Lerntutorials – Günter Söder und Klaus Eichin – danken ihrem langjährigen Chef für die Unterstützung und Förderung unseres LNTwww-Projekts während der ersten Jahre.

Fragebogen zu "A3.8: RCPC-Codes"

a) Welche Aussagen liefern die vorgegeben Punktierungsmatrizen?

- Die Rate des RCPC-Muttercodes ist $R_0 = 1/3$.
- Die Punktierungsperiode ist $p = 8$.
- Das Gedächtnis der RCPC-Codeklasse ist $M = 4$.

b) Welche Coderaten weisen die Codes C_1, \dots, C_4 auf?

Matrix $P_1 \Rightarrow$ Code $C_1: R_1 =$

Matrix $P_2 \Rightarrow$ Code $C_2: R_2 =$

Matrix $P_3 \Rightarrow$ Code $C_3: R_3 =$

Matrix $P_4 \Rightarrow$ Code $C_4: R_4 =$

c) Welche Aussagen gelten für die Matrixelemente $P_{ij}^{(\lambda)}$?

- Aus $P_{ij}^{(l)} = 1$ folgt $P_{ij}^{(\lambda)} = 1$ für alle $\lambda < l$.
- Aus $P_{ij}^{(l)} = 1$ folgt $P_{ij}^{(\lambda)} = 1$ für alle $\lambda > l$.
- Aus $P_{ij}^{(l)} = 0$ folgt $P_{ij}^{(\lambda)} = 0$ für alle $\lambda < l$.
- Aus $P_{ij}^{(l)} = 0$ folgt $P_{ij}^{(\lambda)} = 0$ für alle $\lambda > l$.

A3.9: Viterbi-Algorithmus: Grundlegendes

Die Grafik zeigt ein Trellisdiagramm und definiert gleichzeitig die Fehlergrößen $F_i(S_0)$ und $F_i(S_1)$ zu den Zeitpunkten $i = 0$ bis $i = 5$.

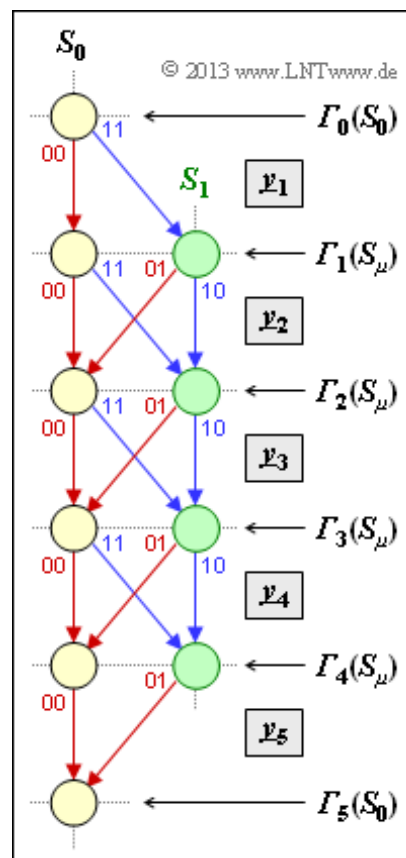
Aus diesem Trellis können zum Beispiel abgelesen werden:

- die Coderate R ,
- das Gedächtnis m ,
- die freie Distanz d_F ,
- die Informationssequenzlänge L ,
- die Sequenzlänge L' inklusive der Terminierung.

In der Aufgabe ist weiter zu klären:

- die Bedeutung des Endwertes $F_5(S_0)$,
- Auswirkungen von einem bzw. zwei Übertragungsfehlern.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 3.4**.



Fragebogen zu "A3.9: Viterbi-Algorithmus: Grundlegendes"

a) Welche der folgenden Aussagen werden durch das Trellis bestätigt?

- Es handelt sich um einen Rate-1/2-Faltungscode.
- Das Gedächtnis des Codes ist $m = 2$.
- Der Faltungscode ist terminiert.
- Die Länge der Informationssequenz ist $L = 5$.

b) Geben Sie die freie Distanz d_F des Faltungscodes an.

$$d_F =$$

c) Welche Aussagen erlaubt der Endwert $\Gamma_5(S_0) = 0$ der Fehlergröße?

- Es ist kein Übertragungsfehler aufgetreten.
- Das Decodierergebnis \underline{v} ist mit Sicherheit richtig (gleich \underline{u}).
- Das Decodierergebnis minimiert die Wahrscheinlichkeit $\Pr(\underline{v} \neq \underline{u})$.

d) Welche Aussagen treffen bei einem einzigen Übertragungsfehler zu?

- Der Fehlergrößenendwert ist $\Gamma_5(S_0) = 1$.
- Das Decodierergebnis \underline{v} ist mit Sicherheit richtig (gleich \underline{u}).
- Das Decodierergebnis minimiert die Wahrscheinlichkeit $\Pr(\underline{v} \neq \underline{u})$.

e) Welche Aussagen treffen bei zwei Übertragungsfehlern zu?

- Der Fehlergrößenendwert ist $\Gamma_5(S_0) = 2$.
- Das Decodierergebnis \underline{v} ist mit Sicherheit richtig (gleich \underline{u}).
- Das Decodierergebnis \underline{v} ist mit Sicherheit falsch (ungleich \underline{u}).

Z3.9: Nochmals Viterbi-Algorithmus

Die Grafik zeigt das Trellisdiagramm des Faltungscodes entsprechend **Aufgabe A3.6**, gekennzeichnet durch folgende Größen:

- Rate $1/2 \Rightarrow k = 1, n = 2$,
- Gedächtnis $m = 1$,
- Übertragungsfunktionsmatrix $G(D) = (1, 1 + D)$,
- Länge der Informationssequenz: $L = 4$,
- Sequenzlänge inclusive Terminierung: $L' = L + m = 5$.

Anhand dieser Darstellung soll die Viterbi-Decodierung schrittweise nachvollzogen werde, wobei von der folgenden Empfangssequenz auszugehen ist: $\underline{y} = (11, 01, 01, 11, 01)$.

In das Trellis eingezeichnet sind:

- Der Initialwert $\Gamma_0(S_0)$ für den Viterbi-Algorithmus wird stets zu 0 gewählt.
- Die beiden Fehlergrößen für den ersten Decodierschritt ($i = 1$) erhält man mit $\underline{y}_1 = (11)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(S_0) &= \Gamma_0(S_0) + d_H((00), (11)) = 2, \\ \Gamma_1(S_1) &= \Gamma_0(S_0) + d_H((11), (11)) = 0. \end{aligned}$$

- Die Fehlergrößen zum Schritt $i = 2 \Rightarrow \underline{y}_2 = (01)$ ergeben sich durch folgende Vergleiche:

$$\begin{aligned} \Gamma_2(S_0) &= \min [\Gamma_1(S_0) + d_H((00), (01)), \Gamma_1(S_1) + d_H((01), (01))] = \\ &= \min [2 + 1, 0 + 0] = 0, \\ \Gamma_2(S_1) &= \min [\Gamma_1(S_0) + d_H((11), (01)), \Gamma_1(S_1) + d_H((10), (01))] = \\ &= \min [2 + 1, 0 + 2] = 2. \end{aligned}$$

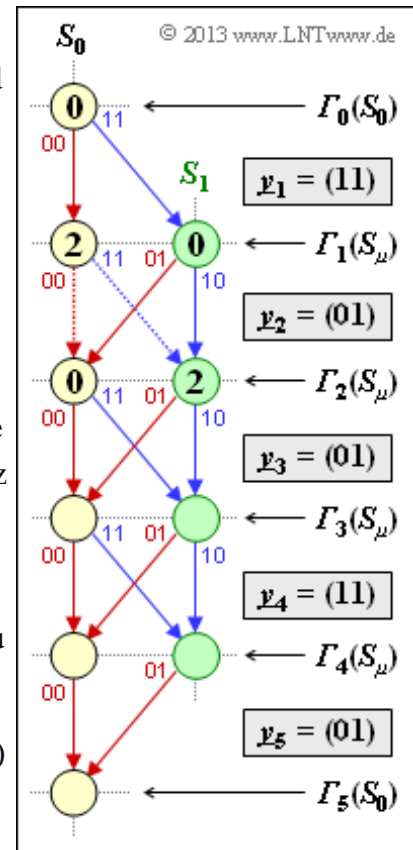
In gleicher Weise sollen Sie

- die Fehlergrößen zu den Zeitpunkten $i = 3, i = 4$ und $i = 5$ (Terminierung) berechnen, und
- die jeweils ungünstigeren Wege zu einem Knoten $\Gamma_i(S_\mu)$ eliminieren. In der Grafik ist dies für $i = 2$ durch punktierte Linien angedeutet.

Anschließend ist der durchgehende Pfad von $\Gamma_0(S_0)$ bis $\Gamma_5(S_0)$ zu finden, wobei die Rückwärtsrichtung zu empfehlen ist. Verfolgt man den gefundenen Pfad in Vorwärtsrichtung, so erkennt man

- die wahrscheinlichste Codesequenz \underline{z} (im Idealfall gleich \underline{x}) an den Beschriftungen,
- die wahrscheinlichste Informationssequenz \underline{v} (im Idealfall gleich \underline{u}) an den Farben.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 3.4**.



Fragebogen zu "Z3.9: Nochmals Viterbi-Algorithmus"

a) Berechnen Sie die minimalen Fehlergrößen für den Zeitpunkt $i = 3$.

$$\Gamma_3(S_0) =$$

$$\Gamma_3(S_1) =$$

b) Berechnen Sie die minimalen Fehlergrößen für den Zeitpunkt $i = 4$.

$$\Gamma_4(S_0) =$$

$$\Gamma_4(S_1) =$$

c) Berechnen Sie die minimale Fehlergröße für den Zeitpunkt $i = 5$ (Ende).

$$\Gamma_5(S_0) =$$

d) Welche endgültigen Ergebnisse liefert der Viterbi-Algorithmus:

$\underline{z} = (11, 01, 00, 11, 01).$

$\underline{z} = (11, 01, 11, 01, 00).$

$\underline{v} = (1, 0, 0, 1, 0).$

$\underline{v} = (1, 0, 1, 0, 0).$

e) Welche Entscheidung wäre ohne Terminierung getroffen worden?

Die gleiche,

eine andere.

Fragebogen zu "A3.10: Fehlergrößenberechnung"

a) Wie lauten die Fehlergrößen für den Zeitpunkt $i = 5$?

$$\Gamma_5(S_0) =$$

$$\Gamma_5(S_1) =$$

$$\Gamma_5(S_2) =$$

$$\Gamma_5(S_3) =$$

b) Wie lauten die Fehlergrößen für den Zeitpunkt $i = 6$?

$$\Gamma_6(S_0) =$$

$$\Gamma_6(S_2) =$$

c) Welcher Endwert ergibt sich bei diesem Trellis, basierend auf $\Gamma_i(S_\mu)$?

Es gilt $\Gamma_7(S_0) = 3$.

Der Endwert lässt auf eine fehlerfreie Übertragung schließen.

Der Endwert lässt auf drei Übertragungsfehler schließen.

d) Welche Aussagen sind für die $\Lambda_i(S_\mu)$ -Auswertung zutreffend?

Die Metriken $\Lambda_i(S_\mu)$ liefern gleiche Informationen wie $\Gamma_i(S_\mu)$.

Für alle Knoten gilt $\Lambda_i(S_\mu) = 2 \cdot [i - \Gamma_i(S_\mu)]$.

Für die Metrikzuwächse gilt $\langle x_i', y_i \rangle \in \{0, 1, 2\}$.

Z3.10: ML–Decodierung von Faltungscodes

Der Viterbi–Algorithmus stellt die bekannteste Realisierungsform für die Maximum–Likelihood–Decodierung eines Faltungscodes dar. Wir gehen hier von folgendem Modell aus:

- Die Informationssequenz \underline{u} wird durch einen Faltungscode in die Codesequenz \underline{x} umgesetzt. Es gelte $u_i \in \{0, 1\}$. Dagegen werden die Codesymbole bipolar dargestellt: $x_i \in \{-1, +1\}$.
- Der Kanal sei durch das **BSC–Modell** gegeben $\Rightarrow y_i \in \{-1, +1\}$ oder es wird der **AWGN–Kanal** vorausgesetzt \Rightarrow reellwertige y_i .
- Bei gegebener Empfangssequenz \underline{y} entscheidet sich der Viterbi–Algorithmus für die Codesequenz \underline{z} entsprechend

$$\underline{z} = \arg \max_{\underline{x}_i \in \mathcal{C}} \Pr(\underline{x}_i | \underline{y}).$$

Dies entspricht dem **Maximum–a–posteriori** (MAP)–Kriterium. Sind die Informationssequenzen \underline{u} gleichwahrscheinlich, so geht dieses in das etwas einfachere **Maximum–Likelihood–Kriterium** über:

$$\underline{z} = \arg \max_{\underline{x}_i \in \mathcal{C}} \Pr(\underline{y} | \underline{x}_i).$$

Als weiteres Ergebnis gibt der Viterbi–Algorithmus zusätzlich die Sequenz \underline{v} als Schätzung für die Informationssequenz \underline{u} aus.

In dieser Aufgabe soll der Zusammenhang zwischen der **Hamming–Distanz** $d_H(\underline{x}, \underline{y})$ sowie der **Euklidischen Distanz**

$$d_E(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^L (x_i - y_i)^2}$$

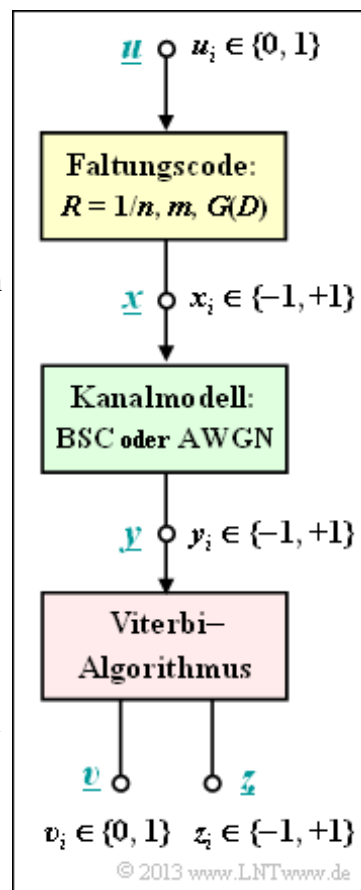
ermittelt werden. Anschließend ist das obige ML–Kriterium mit

- der Hamming–Distanz $d_H(\underline{x}, \underline{y})$,
- der Euklidischen Distanz $d_E(\underline{x}, \underline{y})$, und
- dem **Korrelationswert** $\langle \underline{x} \cdot \underline{y} \rangle$ zu formulieren.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die **Theorieseite 6** von Kapitel 3.4. Zur Vereinfachung wird auf Tilden und Apostroph verzichtet.

Weitere Informationen zu diesem Thema finden Sie auf den folgenden Seiten dieses Buches:

- **MAP– und ML–Kriterium,**
- **ML–Entscheidung beim BSC–Kanal,**
- **ML–Entscheidung beim AWGN–Kanal,**
- **Decodierung linearer Blockcodes – Seite 1.**



Fragebogen zu "Z3.10: ML-Decodierung von Faltungscodes"

a) Wie hängen $d_H(x, y)$ und $d_E(x, y)$ beim BSC-Modell zusammen?

- Es gilt $d_H(x, y) = d_E(x, y)$.
- Es gilt $d_H(x, y) = d_E^2(x, y)$.
- Es gilt $d_H(x, y) = d_E^2(x, y)/4$.

b) Welche der Gleichungen beschreiben die ML-Decodierung beim BSC-Modell?
Die Minimierung/Maximierung bezieht sich jeweils auf alle $\underline{x} \in C$.

- $\underline{z} = \arg \min d_H(\underline{x}, y)$,
- $\underline{z} = \arg \min d_E(\underline{x}, y)$,
- $\underline{z} = \arg \min d_E^2(\underline{x}, y)$.

c) Welche Gleichung beschreibt die ML-Entscheidung beim BSC-Modell?

- $\underline{z} = \arg \min \langle \underline{x} \cdot y \rangle$,
- $\underline{z} = \arg \max \langle \underline{x} \cdot y \rangle$.

d) Welche Gleichungen gelten für die ML-Entscheidung beim AWGN?

- $\underline{z} = \arg \min d_H(\underline{x}, y)$,
- $\underline{z} = \arg \min d_E(\underline{x}, y)$,
- $\underline{z} = \arg \max \langle \underline{x} \cdot y \rangle$.

A3.11: Viterbi-Pfadsuche

Ein Ergebnis von Aufgabe A3.10 war nebenstehende Trellis-Auswertung hinsichtlich der Metriken $\Lambda_i(S_\mu)$. Zu allen Decodierschritten i wurden die (im allgemeinen) $2^m = 4$ Metriken bestimmt, wobei für jeden Knoten der größere von zwei Vergleichswerten ausgewählt wurde. Der Zweig mit dem niedrigeren Wert wurde verworfen. Man erkennt diese Zweige an punktierten Linien.

Ansonsten gelten die gleichen Voraussetzungen wie für die Aufgabe A3.10. Zum Beispiel kennzeichnet auch in nebenstehender Grafik ein roter Pfeil das Informationsbit $u_i = 0$ und ein blauer Pfeil steht für $u_i = 1$.

In der vorliegenden Aufgabe betrachten wir den zweiten und wichtigen Teil des Viterbi-Algorithmuses, nämlich die Suche nach den überlebenden Pfaden $\Phi_i(S_\mu)$. Diese befinden sich zum Zeitpunkt i im Zustand S_μ . Die Suche organisiert man am besten in Rückwärtsrichtung (also in der Grafik von unten nach oben).

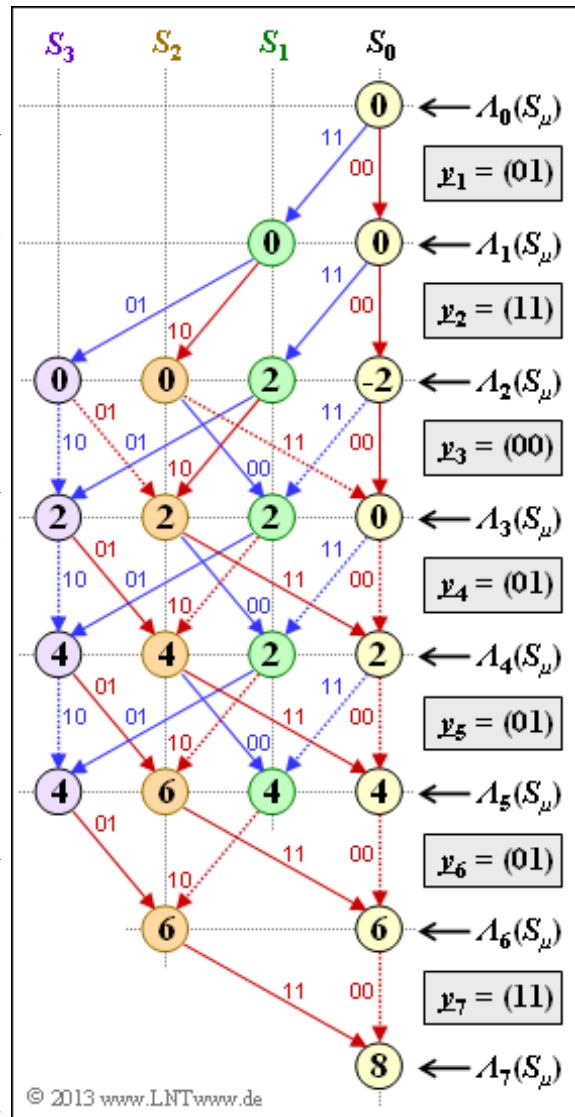
Zum Endzeitpunkt (im Beispiel $i = 7$) gibt es aufgrund der Terminierung nur einen überlebenden Pfad $\Phi_7(S_0)$.

Aus diesem lässt sich extrahieren:

- die vom Decodierer ausgewählte Codesequenz \underline{z}
 \Rightarrow größtmögliche Wahrscheinlichkeit $\Pr(\underline{z} = \underline{x})$,
- die dazugehörige Informationssequenz \underline{u} mit der größtmöglichen Wahrscheinlichkeit $\Pr(\underline{u} = \underline{u})$.

Eine Entscheidung zu einem früheren Zeitpunkt, zum Beispiel bei $i = 5$, erfüllt nicht immer das Maximum-Likelihood-Kriterium. Hier gibt es vier überlebende Pfade $\Phi_5(S_0), \dots, \Phi_5(S_3)$, die zur Zeit $i = 5$ in den Zuständen S_0, \dots, S_3 enden. Einer dieser vier Pfade ist mit Sicherheit Teil des Maximum-Likelihood-Pfades, der für $i \rightarrow \infty$ (bei Terminierung deutlich früher, hier bei $i = 7$) der bestmögliche Pfad ist. Soll aber schon zum Zeitpunkt $i = 5$ ein Zwangsentscheid getroffen werden, so entscheidet man sich meist für den Pfad $\Phi_5(S_\mu)$ mit der größten Metrik $\Lambda_5(S_\mu)$.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu Kapitel 3.4.



Fragebogen zu "A3.11: Viterbi-Pfadsuche"

a) Für welche Codesequenz \underline{z} fällt die Entscheidung zum Zeitpunkt $i = 7$?

- $\underline{z} = (11, 10, 00, 01, 01, 11, 00),$
- $\underline{z} = (00, 11, 10, 00, 01, 01, 11),$
- $\underline{z} = (00, 11, 01, 01, 00, 10, 11).$

b) Wieviele Übertragungsfehler sind (mindestens) aufgetreten?

$$N_{\text{Bitfehler}} =$$

c) Für welche Informationssequenz \underline{v} entscheidet sich der Viterbi-Decoder?

- $\underline{v} = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0),$
- $\underline{v} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0),$
- $\underline{v} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$

d) Wäre bereits bei $i = 6$ eine endgültige Entscheidung möglich gewesen?

- Ja.
- Nein.

e) Welche überlebenden Pfade gibt es zum Zeitpunkt $i = 5$?

- $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_0,$
- $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1,$
- $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2,$
- $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3.$

f) Für welchen Pfad würde man sich zum Zeitpunkt $i = 5$ entscheiden?

- $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_0,$
- $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1,$
- $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2,$
- $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3.$

g) Welcher der Pfade wäre aber wahrscheinlich der richtige?

- $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_0,$
- $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1,$

$S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2,$

$S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3.$

A3.12: Pfadgewichtsfunktion

In Aufgabe A3.6 wurde das Zustandsübergangsdiagramm für den gezeichneten Faltungscoder mit den Eigenschaften

- Rate $R = 1/2$,
- Gedächtnis $m = 1$,
- Übertragungsfunktionsmatrix $G(D) = (1, D)$

ermittelt, das ebenfalls rechts dargestellt ist.

Es soll nun aus dem Zustandsübergangsdiagramm

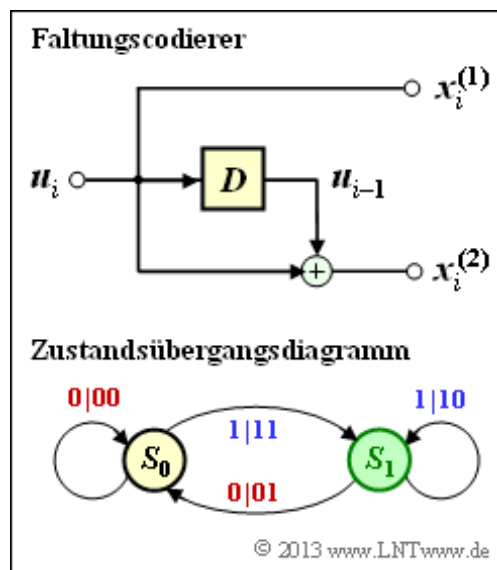
- die Pfadgewichtsfunktion $T(X)$, und
- die erweiterte Pfadgewichtsfunktion $T_{\text{enh}}(X, U)$

bestimmt werden, wobei X und U Dummy-Variablen sind.

Die Vorgehensweise ist im **Theorieteil** zu diesem Kapitel eingehend erläutert. Schließlich ist aus $T(X)$ noch die **freie Distanz** d_F zu bestimmen.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 3.5**. Berücksichtigen Sie bei der Lösung die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$



Fragebogen zu "A3.12: Pfadgewichtsfunktion"

a) Was ist bei der Modifizierung des Übergangsdiagramms zu beachten?

- Der Zustand S_0 muss in S_0 und S_0' aufgespalten werden.
- Der Zustand S_1 muss in S_1 und S_1' aufgespalten werden.
- Der Übergang von S_0 nach S_1 ist mit UX^2 zu beschriften.
- Der Übergang von S_1 nach S_1 ist mit UX zu beschriften.
- Der Übergang von S_1 nach S_0' ist mit X zu beschriften.

b) Welche Gleichungen gelten für die erweiterte Pfadgewichtsfunktion?

- $T_{\text{enh}}(X, U) = U^2X^3$
- $T_{\text{enh}}(X, U) = UX^3/(1 - UX)$
- $T_{\text{enh}}(X, U) = UX^3 + U^2X^4 + U^3X^5 + \dots$

c) Welche Gleichungen gelten für die „einfache“ Pfadgewichtsfunktion?

- $T(X) = X^3/(1 - X)$,
- $T(X) = X^3 + X^4 + X^5 + \dots$

d) Wie groß ist die freie Distanz des betrachteten Codes?

$$d_F =$$

Z3.12: Ring und Rückkopplung

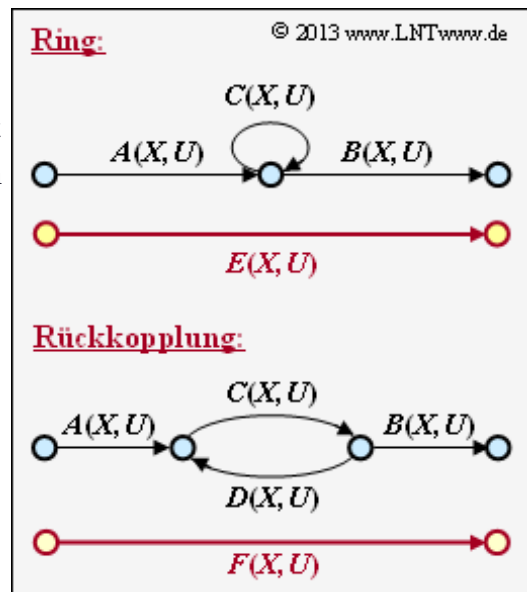
Um die Pfadgewichtsfunktion $T(X)$ eines Faltungscodes aus dem Zustandsübergangsdiagramm bestimmen zu können, ist es erforderlich, das Diagramm so zu reduzieren, bis es durch eine einzige Verbindung vom Startzustand zum Endzustand dargestellt werden kann.

Im Zuge dieser Diagrammreduktion können auftreten:

- serielle und parallele Übergänge,
- ein Ring entsprechend der obigen Grafik,
- eine Rückkopplung entsprechend der unteren Grafik.

Für diese beiden Graphen sind die Entsprechungen $E(X, U)$ und $F(X, U)$ in Abhängigkeit der angegebenen Funktionen $A(X, U)$, $B(X, U)$, $C(X, U)$, $D(X, U)$ zu ermitteln.

Hinweis: Mit dieser Aufgabe sollen einige der Angaben auf Seite 4b von Kapitel 3.5 bewiesen werden. Angewendet werden diese Regeln in Aufgabe A3.12 und Aufgabe A3.13.



Fragebogen zu "Z3.12: Ring und Rückkopplung"

a) Welche der aufgeführten Übergänge sind beim Ring möglich?

- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3,$
- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_2 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3,$
- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3.$

b) Wie lautet die Ersetzung $E(X, U)$ eines Ringes?

- $E(X, U) = [A(X, U) + B(X, U)] / [1 - C(X, U)],$
- $E(X, U) = A(X, U) \cdot B(X, U) / [1 - C(X, U)],$
- $E(X, U) = A(X, U) \cdot C(X, U) / [1 - B(X, U)].$

c) Welche der aufgeführten Übergänge sind bei Rückkopplung möglich?

- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4,$
- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_4,$
- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4,$
- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4.$

d) Wie lautet die Ersetzung $F(X, U)$ einer Rückkopplung?

- $F(X, U) = A(X, U) \cdot B(X, U) \cdot C(X, U) / [1 - C(X, U) \cdot D(X, U)]$
- $F(X, U) = A(X, U) \cdot B(X, U) / [1 - C(X, U) + D(X, U)].$

A3.13: Nochmals $T_{\text{enh}}(X, U)$ und $T(X)$

Auf der Seite 4c des Theorieteils zu Kapitel 3.5 wurde für das Beispiel unseres Rate-1/2-Standardcodes mit Gedächtnis $m = 2$ und der Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}(D) = (1 + D + D^2, 1 + D^2)$$

die Berechnung der Pfadgewichtsfunktionen sehr ausführlich beschrieben. Als Ergebnisse wurden genannt:

$$\begin{aligned} T_{\text{enh}}(X, U) &= \frac{UX^5}{1 - 2UX} = \\ &= UX^5 \cdot [1 + (2UX) + (2UX)^2 + \dots], \\ T(X) &= \frac{X^5}{1 - 2X} = \\ &= X^5 \cdot [1 + (2X) + (2X)^2 + \dots]. \end{aligned}$$

Nun sollen die gleichen Berechnungen für den äquivalenten systematischen Code mit der Übertragungsfunktionsmatrix

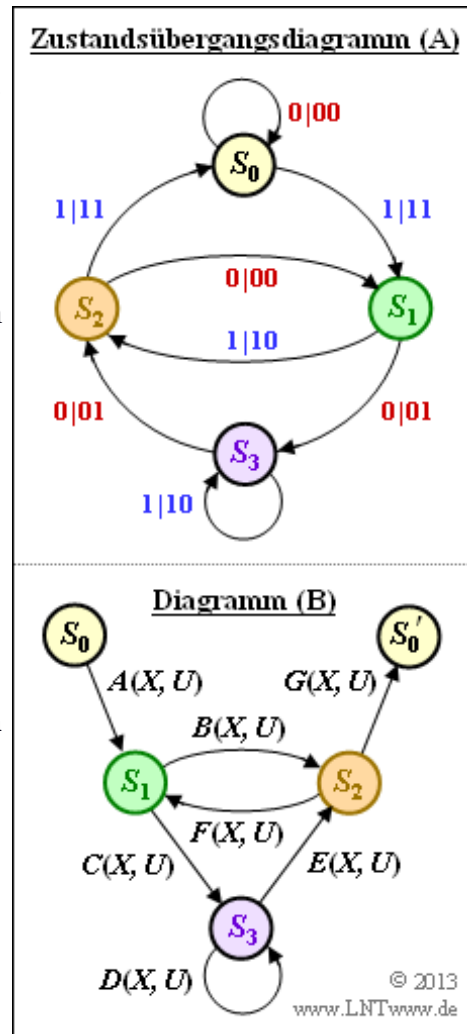
$$\mathbf{G}(D) = (1, (1 + D^2)/(1 + D + D^2))$$

durchgeführt werden.

Die Grafik zeigt das Zustandsübergangsdiagramm (A) und die Struktur des reduzierten Diagramms (B), wobei die Übergänge mit $A(X, U)$, ... , $G(X, U)$ allgemein bezeichnet sind. In der

Teilaufgabe (a) sollen diese Abkürzungen an das Zustandsübergangsdiagramm (A) angepasst werden.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das Kapitel 3.5. Zur Lösung der Teilaufgaben (b) und (c) verweisen wir hier nochmals auf die Seite 4c im Theorieteil.



Fragebogen zu "A3.13: Nochmals $T_{\text{enh}}(X, U)$ und $T(X)$ "

a) Für welche Ausdrücke stehen die nachfolgenden Abkürzungen?

- $A(X, U) = UX^2,$
- $B(X, U) = UX,$
- $C(X, U) = X,$
- $D(X, U) = UX,$
- $E(X, U) = X,$
- $F(X, U) = 1,$
- $G(X, U) = UX^2.$

b) Welche Ausdrücke gelten für die erweiterte Pfadgewichtsfunktion?

- $T_{\text{enh}}(X, U) = UX^5 / (1 - 2UX).$
- $T_{\text{enh}}(X, U) = UX^5 + 2 U^2X^6 + 4U^3X^7 + 8U^4X^8 + \dots,$
- Keiner der Vorschläge ist richtig.

c) Welcher Ausdruck gilt für die „einfache“ Pfadgewichtsfunktion?

- $T(X) = X^5 / (1 - 2X).$
- $T(X) = X^5 + 2X^6 + 4X^7 + 8X^8 + \dots$
- Keiner der Vorschläge ist richtig.

A3.14: Faltungscodes: Schranken

Für den häufig verwendeten Faltungscodes mit

- der Coderate $R = 1/2$,
- dem Gedächtnis $m = 2$,
- der Übertragungsfunktionsmatrix

$$G(D) = (1 + D + D^2, 1 + D^2)$$

lautet die **erweiterte Pfadgewichtsfunktion**:

$$T_{\text{enh}}(X, U) = \frac{UX^5}{1 - 2UX}.$$

Kanalparameter		Schranke nach	
ε	β	Bhattacharyya	Viterbi
$3 \cdot 10^{-2}$	0.341	$1.45 \cdot 10^{-2}$	$4.56 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	???	???	???
$3 \cdot 10^{-3}$	0.109	$1.97 \cdot 10^{-5}$	$2.52 \cdot 10^{-5}$
10^{-3}	0.063	$1.14 \cdot 10^{-6}$	$1.30 \cdot 10^{-6}$
$3 \cdot 10^{-4}$	0.035	$5.65 \cdot 10^{-8}$	$6.07 \cdot 10^{-8}$
10^{-4}	???	???	???

© 2013 www.LNTwww.de

Mit der schon häufiger benutzten Reihenentwicklung $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + \dots$ kann hierfür auch geschrieben werden:

$$T_{\text{enh}}(X, U) = UX^5 \cdot [1 + (2UX) + (2UX)^2 + (2UX)^3 + \dots].$$

Die „einfache“ Pfadgewichtsfunktion $T(X)$ ergibt sich daraus, wenn man die zweite Variable $U = 1$ setzt.

Anhand dieser Funktionen können Fehlerwahrscheinlichkeitsschranken angegeben werden:

- Die *Burstfehlerwahrscheinlichkeit* wird durch die **Bhattacharyya–Schranke** begrenzt:

$$\Pr(\text{Burstfehler}) \leq \Pr(\text{Bhattacharyya}) = T(X = \beta).$$

- Dagegen ist die *Bitfehlerwahrscheinlichkeit* stets kleiner (oder gleich) der **Viterbi–Schranke**:

$$\Pr(\text{Bitfehler}) \leq \Pr(\text{Viterbi}) = \left[\frac{d}{dU} T_{\text{enh}}(X, U) \right]_{\substack{X=\beta \\ U=1}}.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 3.5**. Der Bhattacharyya–Parameter für BSC lautet:

$$\beta = 2 \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot (1 - \varepsilon)}.$$

In obiger Tabelle sind für einige Werte des BSC–Parameters ε angegeben:

- der Bhattacharyya–Parameter β ,
- die Bhattacharyya–Schranke $\Pr(\text{Bhattacharyya})$, und
- die Viterbi–Schranke $\Pr(\text{Viterbi})$.

Im Verlauf dieser Aufgabe sollen Sie die entsprechenden Größen für $\varepsilon = 10^{-2}$ und $\varepsilon = 10^{-4}$ berechnen. Die vollständige Tabelle finden Sie dann in der Musterlösung.

Fragebogen zu "A3.14: Faltungscodes: Schranken"

a) Welcher Bhattacharyya-Parameter ergibt sich für das BSC-Modell?

$$\varepsilon = 10^{-2}: \beta =$$

$$\varepsilon = 10^{-4}: \beta =$$

b) Wie lautet die Bhattacharyya-Schranke?

$$\varepsilon = 10^{-2}: \Pr(\text{Bhattacharyya}) =$$

$$\varepsilon = 10^{-4}: \Pr(\text{Bhattacharyya}) =$$

c) Wie lautet die Viterbi-Schranke?

$$\varepsilon = 10^{-2}: \Pr(\text{Viterbi}) =$$

$$\varepsilon = 10^{-4}: \Pr(\text{Viterbi}) =$$

d) Für welche Werte $\varepsilon < \varepsilon_0$ sind die beiden Schranken nicht anwendbar?

$$\varepsilon_0 =$$