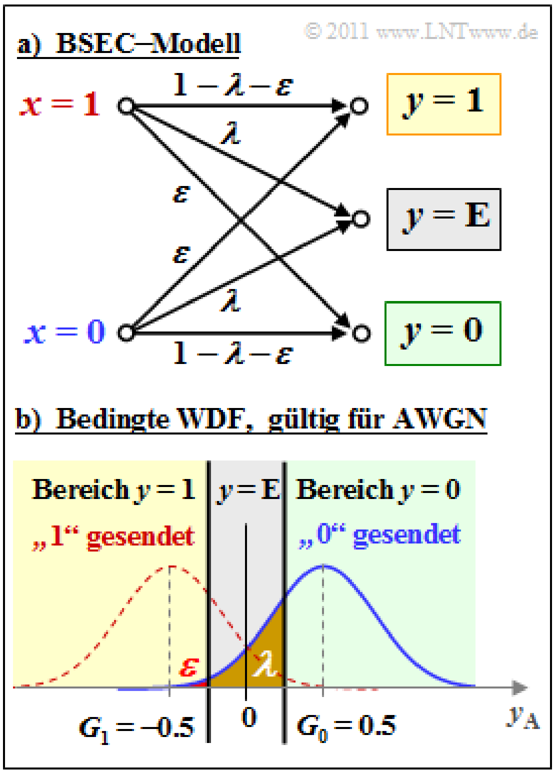
A1.3: BSC–BEC–BSEC–AWGN



Im Theorieteil zu diesem Kapitel werden die folgenden digitalen Kanalmodelle behandelt:

- **Binary Symmetric Channel** (BSC),
- **Binary Erasure Channel** (BEC),
- **Binary Symm. Error & Erasure Ch.** (BSEC).

Die obere Grafik zeigt das BSEC–Modell. Daraus lassen sich auch die beiden anderen Kanalmodelle ableiten:

- Mit $\lambda = 0$ ergibt sich das BSC–Modell.
- Mit $\varepsilon = 0$ ergibt sich das BEC–Modell.

Die untere Grafik zeigt den Zusammenhang zwischen dem BSEC–Modell und dem analogen AWGN–Kanalmodell. Um Verwechslungen zu vermeiden, bezeichnen wir das (analoge) Ausgangssignal des AWGN–Kanals mit y_A, wobei mit dem Rauschterm n gilt: $y_A = \tilde{x} + n$.

Die Tilde weist auf die bipolare Beschreibung des Digitalsignals hin. Es gilt $\tilde{x} = +1$, falls $x = 0$, und $\tilde{x} = -1$, falls $x = 1$.

Man erkennt die ternäre Ausgangsgröße $y \in \{0, 1, \text{E}\}$, die sich aus dem AWGN–Modell durch die Unterteilung in drei Bereiche ergibt. Hierzu werden die Entscheiderschwellen G_0 und G_1 benötigt.

$y = \text{E}$ (*Erasure*) sagt aus, dass die Entscheidung so unsicher ist, dass als Ergebnis weder $y = 0$ noch $y = 1$ gerechtfertigt erscheint. In deutschen Fachbüchern spricht man von einer *Auslöschung*.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 1.2.** Die Streuung des AWGN–Rauschens n wird für die gesamte Aufgabe zu $\sigma = 0.4$ angenommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße n größer ist als A oder kleiner als $-A$, ergibt sich mit dem **komplementären Gaußschen Fehlerintegral** Q(x) wie folgt:

$$\Pr(n > A) = \Pr(n < -A) = \text{Q}(A/\sigma)\,.$$

Es folgen noch einige Zahlenwerte der Q–Funktion:

$$\begin{aligned}\text{Q}(0) &= 50\%\,,\ \ \text{Q}(0.5) = 30.85\%\,,\ \ \text{Q}(1) = 15.87\%\,,\ \ \text{Q}(1.5) = 6.68\%\,,\\ \text{Q}(2) &= 2.28\%\,,\ \ \text{Q}(2.5) = 0.62\%\,,\ \ \text{Q}(3) = 0.14\%\,,\ \ \text{Q}(3.5) = 0.02\%\,,\ \ \text{Q}(4) \approx 0\,.\end{aligned}$$

Bitte beachten Sie weiter: Ausgehend vom AWGN–Kanal ist die Verfälschungswahrscheinlichkeit $\varepsilon = 0$ eigentlich nicht möglich. Für diese Aufgabe behelfen wir uns dadurch, dass alle Wahrscheinlichkeiten in Prozent mit zwei Nachkommastellen angegeben werden sollen. Damit kann $\varepsilon < 0.5 \cdot 10^{-4}$ durch $\varepsilon \approx 0$ angenähert werden.

Fragebogen zu "A1.3: BSC–BEC–BSEC–AWGN"

a) Durch welche Entscheiderschwelle(n) entsteht das BSC–Modell?

- ☐ Eine Entscheiderschwelle bei $G = 0$.
- ☐ Zwei symmetrische Entscheiderschwellen bei $\pm G$.
- ☐ Eine Entscheiderschwelle bei $G_1 = 0$ und eine zweite bei $G_2 = 0.5$.

b) Wie groß ist die BSC–Verfälschungswahrscheinlichkeit ε mit $\sigma = 0.4$?

ε = %

c) Durch welche Entscheiderschwelle(n) entsteht ein BSEC–Modell?

- ☐ Eine Entscheiderschwelle bei $G = 0$.
- ☐ Zwei symmetrische Entscheiderschwellen bei $\pm G$.
- ☐ Eine Entscheiderschwelle bei $G_1 = 0$ und eine zweite bei $G_2 = 0.5$.

d) Welche BSEC–Parameter ergeben sich mit Schwellen bei ± 0.2?

ε = %

λ = %

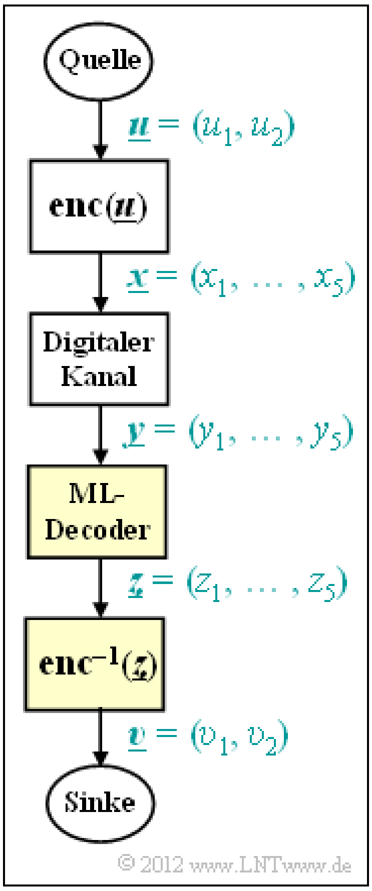
e) Durch welche Entscheiderschwelle(n) entsteht das BEC–Modell? Beachten Sie bitte den letzten Hinweis auf der Angabenseite.

- ☐ Eine Entscheiderschwelle bei $G = 0$.
- ☐ Zwei symmetrische Entscheiderschwellen bei $\pm G$.
- ☐ Eine Entscheiderschwelle bei $G_1 = 0$ und eine zweite bei $G_2 = 0.5$.

f) Berechnen Sie den BEC–Parameter λ für Entscheiderschwellen bei ± 0.6.

λ = %

A1.4: Maximum–Likelihood–Entscheidung



Wir betrachten das digitale Übertragungssystem entsprechend der Grafik. Berücksichtigt sind dabei:

- ein systematischer (5, 2)–Blockcode C mit den Codeworten

$$\begin{aligned}\underline{x}_0 &= (0, 0, 0, 0, 0)\,,\\ \underline{x}_1 &= (0, 1, 0, 1, 0)\,,\\ \underline{x}_2 &= (1, 0, 1, 0, 1)\,,\\ \underline{x}_3 &= (1, 1, 1, 1, 1)\,,\end{aligned}$$

- ein digitales (binäres) Kanalmodell, das den Vektor $\underline{x} \in \mathrm{GF}(2^5)$ in den Vektor $\underline{y} \in \mathrm{GF}(2^5)$ verfälscht,
- ein **Maximum–Likelihood–Decoder** mit der Entscheidungsregel

$$\underline{z} = \arg\max_{\underline{x}_i \in C} \Pr(\underline{x}_i\,|\underline{y}) = \arg\min_{\underline{x}_i \in C} d_{\rm H}(\underline{y}\,,\,\underline{x}_i).$$

In der Gleichung bezeichnet $d_{\rm H}(\underline{y}, \underline{x}_i)$ die **Hamming–Distanz** zwischen Empfangswort $\underline{y}$ und dem (möglicherweise) gesendeten Codewort $\underline{x}_i$.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 1.2.**

Fragebogen zu "A1.4: Maximum–Likelihood–Entscheidung"

a) Es sei $\underline{y} = (1, 0, 0, 0, 1)$. Welche Entscheidungen erfüllen das ML–Kriterium?

- [ ] $\underline{z} = \underline{x}_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$,
- [ ] $\underline{z} = \underline{x}_1 = (0, 1, 0, 1, 0)$,
- [ ] $\underline{z} = \underline{x}_2 = (1, 0, 1, 0, 1)$,
- [ ] $\underline{z} = \underline{x}_3 = (1, 1, 1, 1, 1)$.

b) Es sei $\underline{y} = (0, 0, 0, 1, 0)$. Welche Entscheidungen erfüllen das ML–Kriterium?

- [ ] $\underline{z} = \underline{x}_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$,
- [ ] $\underline{z} = \underline{x}_1 = (0, 1, 0, 1, 0)$,
- [ ] $\underline{z} = \underline{x}_2 = (1, 0, 1, 0, 1)$,
- [ ] $\underline{z} = \underline{x}_3 = (1, 1, 1, 1, 1)$.

c) Welche Entscheidung trifft der ML–Decoder für $\underline{y} = (1, 0, 1, 1, 1)$, wenn ihm mitgeteilt wird, dass die beiden letzten Symbole eher unsicher sind?

- [ ] $\underline{z} = \underline{x}_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$,
- [ ] $\underline{z} = \underline{x}_1 = (0, 1, 0, 1, 0)$,
- [ ] $\underline{z} = \underline{x}_2 = (1, 0, 1, 0, 1)$,
- [ ] $\underline{z} = \underline{x}_3 = (1, 1, 1, 1, 1)$.

d) Zu welchem Informationswort $\underline{v} = (v_1, v_2)$ führt diese Entscheidung?

$\boldsymbol{v_1}$ =

$\boldsymbol{v_2}$ =