A1.11: Syndromdecodierung

Syndrom $\underline{s}_\mu$	Nebenklassenanführer $\underline{e}_\mu$
$\underline{s}_0 = (0, 0, 0)$	$\underline{e}_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{s}_1 = (0, 0, 1)$	$\underline{e}_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$
$\underline{s}_2 = (0, 1, 0)$	$\underline{e}_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$
$\underline{s}_3 = (0, 1, 1)$	$\underline{e}_3 = (?, ?, ?, ?, ?, ?, ?)$
$\underline{s}_4 = (1, 0, 0)$	$\underline{e}_4 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$
$\underline{s}_5 = (1, 0, 1)$	$\underline{e}_5 = (?, ?, ?, ?, ?, ?, ?)$
$\underline{s}_6 = (1, 1, 0)$	$\underline{e}_6 = (?, ?, ?, ?, ?, ?, ?)$
$\underline{s}_7 = (1, 1, 1)$	$\underline{e}_7 = (?, ?, ?, ?, ?, ?, ?)$

Zur Decodierung eines (7, 4, 3)–Hamming–Codes, der durch seine Prüfmatrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, eignet sich auch die *Syndromdecodierung*. Da alle Hamming–Codes perfekt sind, ergibt sich hiermit ein gleich gutes Ergebnis wie mit der (im allgemeinen Fall) komplizierteren Maximum–Likelihood–Detektion.

Bei der **Syndromdecodierung** geht man wie folgt vor:

- Man bildet aus dem Empfangsvektor $\underline{y}$ das Syndrom (es gilt $m = n - k$):

  $$\underline{s} = \underline{y} \cdot \mathbf{H}^{\rm T} \in {\rm GF}(2^m)\,.$$

- Beim **BSC–Kanal** ist auch das Empfangswort $\underline{y} = \underline{x}$ (Codewort) + $\underline{e}$ (Fehlervektor) ein Element von GF (2^n), und es gilt wegen $\underline{x} \cdot \mathbf{H}^{\rm T} = \underline{0}$ gleichermaßen:

  $$\underline{s} = \underline{e} \cdot \mathbf{H}^{\rm T}\,.$$

- Viele Fehlermuster $\underline{e}$ führen zum gleichen Syndrom $\underline{s}$. Man fasst nun diejenigen Fehlermuster mit dem gleichen Syndrom $\underline{s}_\mu$ zur Nebenklasse Ψ_μ zusammen.
- Als Nebenklassenanführer $\underline{e}_\mu$ bezeichnet man denjenigen Fehlervektor, der innerhalb der Klasse Ψ_μ das geringste Hamming–Gewicht aufweist und dementsprechend am wahrscheinlichsten ist.

Die obige Grafik zeigt die unvollständige Liste der Nebenklassenanführer $\underline{e}_\mu$ für die einzelnen $\underline{s}_\mu$. Die wahrscheinlichsten Fehlervektoren

- $\underline{e}_3$ mit Syndrom $\underline{s}_3 = (0, 1, 1)$,
- $\underline{e}_5$ mit Syndrom $\underline{s}_5 = (1, 0, 1)$,
- $\underline{e}_6$ mit Syndrom $\underline{s}_6 = (1, 1, 0)$,
- $\underline{e}_7$ mit Syndrom $\underline{s}_7 = (1, 1, 1)$

sollen in den Teilaufgaben d) und e) ermittelt werden.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 1.5.** Zugrunde liegt ein Hamming–Code mit den Parametern $n = 7$ und $k = 4$ $\Rightarrow$ $m = 3$. Alle Codeworte haben folgendes Format:

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (u_1, u_2, u_3, u_4, p_1, p_2, p_3)\,.$$

Die Prüfgleichungen sind auf dem Angabenblatt zur **Aufgabe Z1.11** veranschaulicht, in der genau die gleiche Konstellation betrachtet wird wie in der vorliegenden Aufgabe. Verwenden Sie in der letzten Teilaufgabe (f) den BSC–Parameter $\varepsilon = 0.1$.

Fragebogen zu "A1.11: Syndromdecodierung"

a) Wie viele Empfangsworte (N_0) führen zum Syndrom $\underline{s} = \underline{s}_0 = (0, 0, 0)$?

$\boldsymbol{N_0}$ =

b) Wie viele Empfangsworte (N_7) führen zum Syndrom $\underline{s} = \underline{s}_7 = (1, 1, 1)$?

$\boldsymbol{N_7}$ =

c) Welche Eigenschaften weisen alle Nebenklassenanführer $\underline{e}_\mu$ auf?

- [ ] Die letzten 3 Bit von $\underline{e}_\mu$ sind identisch mit $\underline{s}_\mu$.
- [ ] Alle $\underline{e}_\mu$ beinhalten jeweils eine einzige 1.
- [ ] Alle $\underline{e}_\mu$ beinhalten höchstens eine 1.

d) Zu welchem Syndrom $\underline{s}_\mu$ führt der Fehlervektor (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)?

$\underline{e}$ = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0): Index $\boldsymbol{\mu}$ =

e) Berechnen Sie jeweils das Syndrom $\underline{s}_\mu$ (Eingabe: Index μ) für

$\underline{e}$ = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0): Index $\boldsymbol{\mu}$ =

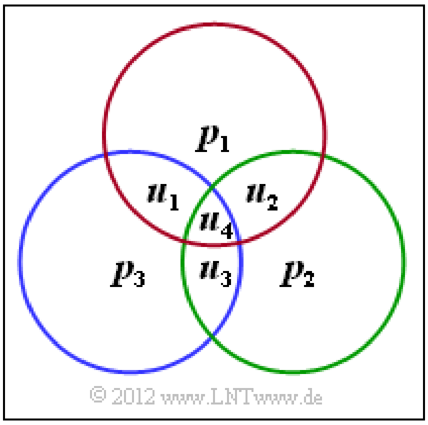
$\underline{e}$ = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0): Index $\boldsymbol{\mu}$ =

$\underline{e}$ = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0): Index $\boldsymbol{\mu}$ =

f) Welche Blockfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich für das BSC–Modell mit der Verfälschungswahrscheinlichkeit $\varepsilon = 0.1$?

Pr(Blockfehler) =

Z1.11: Nochmals Syndromdecodierung



Betrachtet wird die gleiche Konstellation wie in der **Aufgabe A1.11,** nämlich die Decodierung eines (7, 4, 3)–Hamming–Codes mit der Prüfmatrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend lautet das Generatorpolynom:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bei der **Syndromdecodierung** bildet man aus dem Empfangsvektor $\underline{y}$ das Syndrom $\underline{s}$:

$$\underline{s} = \underline{y} \cdot \mathbf{H}^{\rm T} \in {\rm GF}(2^m)\,.$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich beim betrachteten Hamming–Code ein jeder Einzelfehler im Codewort korrigieren. Im fehlerfreien Fall gilt $\underline{s} = \underline{s}_0 = (0, 0, 0)$. Aber auch bei 3 Übertragungsfehlern kann sich unter Umständen $\underline{s}_0 = (0, 0, 0)$ ergeben, so dass diese Fehler unerkannt bleiben.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die im **Kapitel 1.5** behandelte Thematik. Weitere Informationen zur Syndromdecodierung finden Sie im Angabenblatt zur **Aufgabe A1.11.** Die Grafik verdeutlicht die drei Prüfgleichungen entsprechend der Prüfmatrix:

- erste Zeile: rote Gruppierung,
- zweite Zeile: grüne Gruppierung,
- dritte Zeile: blaue Gruppierung.

Fragebogen zu "Z1.11: Nochmals Syndromdecodierung"

a) Handelt es sich um einen systematischen Code?

- ○ Ja,
- ○ Nein.

b) Empfangen wurde $\underline{y} = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$. Ist dies ein gültiges Codewort?

- ○ Ja,
- ○ Nein.

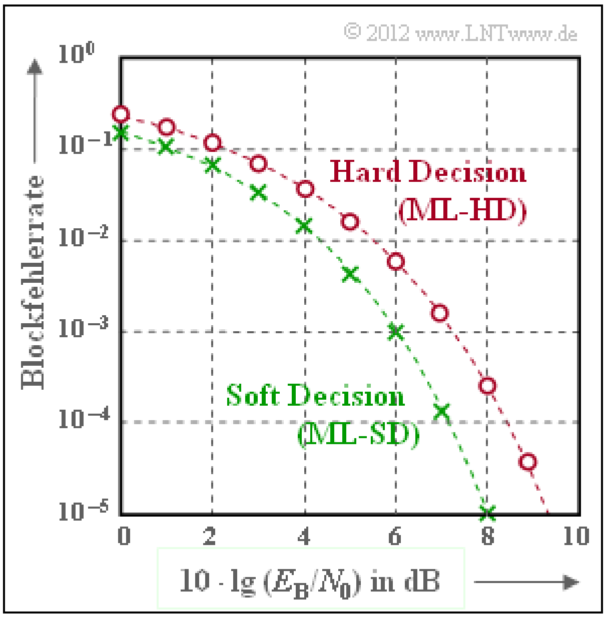
c) Welches Syndrom ergibt sich mit diesem Empfangswort?

- ☐ $\underline{s} = \underline{s}_0 = (0, 0, 0)$,
- ☐ $\underline{s} = \underline{s}_3 = (0, 1, 1)$,
- ☐ $\underline{s} = \underline{s}_7 = (1, 1, 1)$.

d) Welche Empfangsworte führen zum gleichen Syndrom wie in Teilaufgabe (c)?

- ☐ $\underline{y} = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$,
- ☐ $\underline{y} = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$,
- ☐ $\underline{y} = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$.

A1.12: Hard / Soft Decision



Die Abbildung zeigt die Blockfehlerwahrscheinlichkeit für den **(7, 4, 3)–Hamming–Code,** wobei für den Empfänger zwei Varianten berücksichtigt sind:

- Bei Maximum–Likelihood–Detektion mit harten Entscheidungen (*Hard Decision*, HD), die im vorliegenden Fall (perfekter Code) auch durch Syndromdecodierung realisiert werden kann, ergibt sich die rote Kurve (Kreismarkierung).
- Der Kanal kann bei *Hard Decision* vereinfacht durch das **BSC–Modell** ersetzt werden. Der Zusammenhang zwischen dem BSC–Parameter ε und dem AWGN–Quotienten E_B/N_0 (in der Grafik verwendet) ist wie folgt gegeben:

$$\varepsilon = \mathrm{Q}\left(\sqrt{2 \cdot R \cdot E_{\rm B}/N_0}\right).$$

  Hier bezeichnet Q(x) die *komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion* und R die Coderate.

- Die grüne Kurve (Kreuze) zeigt die Blockfehlerwahrscheinlichkeit bei „weichen" Entscheidungen (*Soft Decision*, SD). Dieser Funktionsverlauf lässt sich nicht in geschlossen–mathematischer Form angeben. In der Grafik eingezeichnet ist eine in **[Fri96]** angegebene obere Schranke:

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr(Blockfehler)} \;&\le\; 7 \cdot \mathrm{Q}\left(\sqrt{3 \cdot \frac{2 \cdot R \cdot E_{\rm B}}{N_0}}\right) + \\ &+\; 7 \cdot \mathrm{Q}\left(\sqrt{4 \cdot \frac{2 \cdot R \cdot E_{\rm B}}{N_0}}\right) + \mathrm{Q}\left(\sqrt{7 \cdot \frac{2 \cdot R \cdot E_{\rm B}}{N_0}}\right).\end{aligned}$$

  Der jeweils erste Faktor im Argument der Q–Funktion gibt die möglichen Hamming–Distanzen an: i = 3, 4 und 7. Die Vorfaktoren berücksichtigen die Vielfachheiten $W_3 = W_4 = 7$ und $W_7 = 1$, und $R = 4/7$ beschreibt die Coderate. Für $10 \cdot \lg E_B/N_0 > 8$ dB ist Pr(Blockfehler) kleiner als 10^{-5}.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 1.5.** Verwenden Sie für numerische Ergebnisse das folgende Berechnungsmodul:

Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion

Fragebogen zu "A1.12: Hard / Soft Decision"

a) Wir betrachten bis einschließlich Teilaufgabe (d) stets *Hard Decision*. Welche Blockfehlerwahrscheinlichkeit besitzt der (7, 4, 3)–Hamming–Code?

ε = 0.01: Pr(Blockfehler) =

ε = 0.001: Pr(Blockfehler) =

b) Wie kann man die Fehlerwahrscheinlichkeit eines Hamming–Codes annähern?

- ☐ Pr(Blockfehler) = $n \cdot (n–1)/2 \cdot \varepsilon^2$.
- ☐ Pr(Blockfehler) = $n \cdot \varepsilon^2$.
- ☐ Pr(Blockfehler) = $n \cdot \varepsilon^n$.

c) Welcher Hamming–Code besitzt die kleinste Blockfehlerwahrscheinlichkeit bei konstantem BSC–Parameter ε?

- ○ der Hamming–Code (3, 1, 3) ⇒ *Repetition Code* (3, 1, 3),
- ○ der Hamming–Code (7, 4, 3),
- ○ der Hamming–Code (15, 11, 3).

d) Welcher numerische Zusammenhang besteht zwischen dem BSC–Parameter ε und dem AWGN–Quotienten E_B/N_0?

ε = 0.01: $10 \cdot \lg E_B/N_0$ = dB

ε = 0.001: $10 \cdot \lg E_B/N_0$ = dB

e) Welcher Gewinn (in dB) ist durch *Soft Decision* (SD) zu erzielen, wenn die Blockfehlerwahrscheinlichkeit den Wert 10^{-5} nicht überschreiten soll?

$10 \cdot \lg G_{SD}$ = dB

Z1.12: Vergleich (7, 4, 3) und (8, 4, 4)

BSC ε	Pr(Blockfehler) (7, 4, 3)-Code	Pr(Blockfehler) (8, 4, 4)-Code
$3 \cdot 10^{-1}$	$6.71 \cdot 10^{-1}$	$7.45 \cdot 10^{-1}$
10^{-1}	$1.50 \cdot 10^{-1}$	$1.87 \cdot 10^{-1}$
$3 \cdot 10^{-2}$	$1.71 \cdot 10^{-2}$	$2.23 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	$2.03 \cdot 10^{-3}$	???
$3 \cdot 10^{-3}$	$1.87 \cdot 10^{-4}$	$2.49 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$2.09 \cdot 10^{-5}$	$2.79 \cdot 10^{-5}$

Hinweis: Nur Korrektur von Einzelfehlern

Nun sollen die Blockfehlerwahrscheinlichkeiten

- des (7, 4, 3)–Hamming–Codes und
- des erweiterten (8, 4, 4)–Hamming–Codes

miteinander verglichen werden. Zugrunde gelegt werden

- das **BSC–Kanalmodell** (Parameter ε, insbesondere $\varepsilon = 0.01$ für numerische Ergebnisse),
- die **Syndromdecodierung,** mit der bei beiden Codes eine Maximum–Likelihood–Detektion realisiert wird. Bei richtiger Belegung der Syndromtabelle ergibt sich jeweils die minimale Blockfehlerwahrscheinlichkeit.

Für den (7, 4, 3)–Code wurde in der **Aufgabe A1.12** berechnet:

$$\mathrm{Pr(Blockfehler)} = 1 - (1-\varepsilon)^7 - 7 \cdot \varepsilon \cdot (1-\varepsilon)^6 \,.$$

Die Zahlenwerte sind in der Spalte 2 der obigen Tabelle angegeben. Es handelt sich um die tatsächlichen Werte, also nicht um die in Aufgabe A1.12 hergeleitete Näherung: Pr(Blockfehler) ≈ $21 \cdot \varepsilon^2$.

Anzumerken ist, dass aufgrund des BSC–Kanalmodells nur harte Entscheidungen möglich sind. Mit **Soft–Decision** ergeben sich etwas kleinere Blockfehlerwahrscheinlichkeiten.

Nun soll die Blockfehlerwahrscheinlichkeit für den erweiterten (8, 4, 4)–Code ermittelt werden:

- Die Berechnung in Teilaufgabe d) erfolgt unter der Maßgabe, dass wie beim (7, 4, 3)–Code nur die Fehlermuster mit einer einzigen „1” korrigiert werden. In der rechten Spalte obiger Tabelle sind die Ergebnisse eingetragen, bis auf den Wert für $\varepsilon = 0.01$, der explizit berechnet werden soll.
- In der Teilaufgabe e) soll dagegen berücksichtigt werden, dass beim erweitereten (8, 4, 4)–Code Teile der Syndromtabelle noch mit Gewicht–2–Fehlermustern aufgefüllt werden können.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf **Kapitel 1.5.** Von Interesse für die Lösung dieser Aufgabe ist insbesondere die Seite **Verallgemeinerung der Syndromdecodierung (2).**

Fragebogen zu "Z1.12: Vergleich (7, 4, 3) und (8, 4, 4)"

a) Wieviele Einträge beinhalten die jeweiligen Syndromtabellen?

(7, 4, 3)–Code: $N_{\rm ges}$ =

(8, 4, 4)–Code: $N_{\rm ges}$ =

b) Wieviele Gewicht–2–Fehlermuster gibt es insgesamt?

(7, 4, 3)–Code: N_2' =

(8, 4, 4)–Code: N_2' =

c) Wieviele Fehlermuster in den Syndromtabellen beinhalten zwei Einsen?

(7, 4, 3)–Code: N_2 =

(8, 4, 4)–Code: N_2 =

d) Es gelte nun $\varepsilon = 0.01$. Welche Blockfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich für den erweiterten (8, 4, 4)–Code <u>ohne</u> Gewicht–2–Fehlerkorrektur?

Pr(Blockfehler) =

e) Welches Ergebnis erzielt man demgegenüber <u>mit</u> Gewicht–2–Fehlerkorrektur?

Pr(Blockfehler) =

A1.13: BEC–Decodierung

Wir gehen hier von dem **Modell** auf der letzten Theorieseite im Kapitel 1.5 aus (grün hinterlegte BEC–Konfiguration):

- Jedes Informationswort $\underline{u}$ wird blockweise codiert und liefert das Codewort $\underline{x}$. Der Blockcode sei linear und durch seine Prüfmatrix $\mathbf{H}$ vollständig gegeben.
- Bei der Übertragung werden $n_{\rm E}$ Bit des Codewortes ausgelöscht ⇒ **Binary Erasure Channel** (BEC). Aus dem Codewort $\underline{x}$ wird somit das Empfangswort $\underline{y}$.
- Ist die Anzahl $n_{\rm E}$ der Auslöschungen kleiner als die **minimale Distanz** $d_{\rm min}$ des Codes, so gelingt es, aus $\underline{y}$ das Codewort $\underline{z} = \underline{x}$ ohne Fehler zu rekonstruieren, und man erhält so auch das richtige Informationswort $\underline{v} = \underline{u}$.
- Zur Aufgabenbeschreibung betrachten wir beispielhaft das Hamming–Codewort $\underline{x}$ = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0) und das Empfangswort $\underline{y}$ = (0, 1, E, E, 1, 0, 0).

Ausgelöscht wurden somit durch den Kanal das dritte und vierte Bit. Der Codewortfinder hat somit die Aufgabe, den Vektor $\underline{z}_{\rm E} = (z_3, z_4)$ mit $z_3, z_4 \in \{0, 1\}$ zu bestimmen. Dies geschieht entsprechend der Gleichung

$$\mathbf{H}_{\rm E} \cdot \underline{z}_{\rm E}^{\rm T} = \mathbf{H}_{\rm K} \cdot \underline{z}_{\rm K}^{\rm T}\,,$$

wobei im vorliegenden Beispiel gilt:

$$\underline{z}_{\rm K} = (0, 1, 1, 0, 0)\,, \quad \mathbf{H}_{\rm K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad \mathbf{H}_{\rm E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Diese Gleichung liefert zwei Bestimmungsgleichungen für die zu bestimmenden Bits, deren Lösung zum Ergebnis $z_3 = 0$ und $z_4 = 1$ führt.

Prüfmatrix des HC (7, 4, 3):

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu den Teilaufgaben (b), (c):

$$\mathbf{H}_{\rm K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

$$\underline{z}_{\rm K} = (1, 1, 0, 1)$$

Zu den Teilaufgaben (d), (e):

$$\mathbf{H}_{\rm K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

$$\underline{z}_{\rm K} = (1, 1, 0, 0)$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 1.5.** Der Algorithmus zur Zuordnung des Empfangswortes $\underline{y}$ zum richtigen Codewort $\underline{z} = \underline{x}$ ist im **Theorieteil** ausführlich beschrieben. Wir möchten nochmals daran erinnern, dass wir bei der BEC–Decodierung den ersten Decoderblock ($\underline{y} \rightarrow \underline{z}$) als *Codewortfinder* bezeichnen, da hier Fehlentscheidungen ausgeschlossen sind. Jedes Empfangswort wird richtig decodiert, oder es kann gar nicht decodiert werden. Beim BSC–Modell lassen sich dagegen Decodierfehler nicht vermeiden. Dementsprechend heißt der entsprechende Block dort *Codewortschätzer*.

Fragebogen zu "A1.13: BEC–Decodierung"

a) Empfangen wurde $\underline{y}$ = (1, E, 0, 1, 0, 0, E). Für welche Sequenz entscheidet sich der Codewortschätzer?

- ☐ $\underline{z}$ = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0),
- ☐ $\underline{z}$ = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1),
- ☐ $\underline{z}$ = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1).

b) Welche Konsequenzen ergeben sich aus den roten Eintragungen für $\mathbf{H}_\text{K}$ und $\underline{z}_\text{K}$ (siehe Grafik auf der Angabenseite)?

- ☐ Der Erasure–Vektor lautet $\underline{z}_\text{E} = (z_5, z_6, z_7)$.
- ☐ Das Empfangswort lautet $\underline{y}$ = (1, 1, 0, 1, E, E, E).
- ☐ $\mathbf{H}_\text{E}$ ist eine 2 x 3–Matrix.
- ☐ $\mathbf{H}_\text{E}$ ist eine 3 x 3–Matrix.

c) Nun gelte $\underline{y}$ = (1, 1, 0, 1, E, E, E). Welches Codewort wird ausgewählt?

- ☐ $\underline{z}$ = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0),
- ☐ $\underline{z}$ = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1),
- ☐ $\underline{z}$ = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0).
- ☐ Für das vorliegende $\underline{y}$ ist keine eindeutige Decodierung möglich.

d) Welche Konsequenzen ergeben sich aus den grünen Eintragungen für $\mathbf{H}_\text{K}$ und $\underline{z}_\text{K}$ (siehe Grafik auf der Angabenseite)?

- ☐ Das Empfangswort lautet $\underline{y}$ = (1, 1, 0, E, 0, E, E).
- ☐ $\mathbf{H}_\text{K}$ unterscheidet sich gegenüber Teilfrage (b) in der letzten Zeile.
- ☐ $\mathbf{H}_\text{K}$ unterscheidet sich gegenüber Teilfrage (b) in der letzten Spalte.

e) Nun gelte $\underline{y}$ = (1, 1, 0, E, 0, E, E). Welches Codewort wird ausgewählt?

- ☐ $\underline{z}$ = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0),
- ☐ $\underline{z}$ = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1),
- ☐ $\underline{z}$ = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0).
- ☐ Für das vorliegende $\underline{y}$ ist keine eindeutige Decodierung möglich.

f) Welche Aussagen ergeben sich für die Korrekturfähigkeit beim BEC? n_E gibt dabei Anzahl der Auslöschungen (*Erasures*) an.

- ☐ Für $n_\text{E} < d_\text{min}$ ist stets eine eindeutige Decodierung möglich.
- ☐ Für $n_\text{E} = d_\text{min}$ ist stets eine eindeutige Decodierung möglich.
- ☐ Für $n_\text{E} = d_\text{min}$ ist manchmal eine eindeutige Decodierung möglich.
- ☐ Für $n_\text{E} > d_\text{min}$ ist eine eindeutige Decodierung nie möglich.

Z1.13: Nochmals BEC–Decodierung

Wir betrachten wieder wie in der vorherigen Aufgabe die Decodierung eines **Hamming–Codes** nach der Übertragung über einen Auslöschungskanal ⇒ **Binary Erasure Channel** (abgekürzt BEC).

Der (7, 4, 3)–Hamming–Code wird durch die nebenstehende Codetabelle $\underline{u}_i \rightarrow \underline{x}_i$ vollständig beschrieben, anhand derer alle Lösungen gefunden werden können.

i	$\underline{u}_i$	$\underline{x}_i$
0	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
1	(0, 0, 0, 1)	(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)
2	(0, 0, 1, 0)	(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)
3	(0, 0, 1, 1)	(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)
4	(0, 1, 0, 0)	(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)
5	(0, 1, 0, 1)	(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)
6	(0, 1, 1, 0)	(0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)
7	(0, 1, 1, 1)	(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0)
8	(1, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)
9	(1, 0, 0, 1)	(1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)
10	(1, 0, 1, 0)	(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)
11	(1, 0, 1, 1)	(1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)
12	(1, 1, 0, 0)	(1, 1, 0, 0, 0, 1, 1)
13	(1, 1, 0, 1)	(1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)
14	(1, 1, 1, 0)	(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
15	(1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 1.5.** Im Gegensatz zur **Aufgabe A1.13** soll hier die Lösung nicht streng formal, sondern eher intuitiv gefunden werden.

Fragebogen zu "Z1.13: Nochmals BEC–Decodierung"

a) Wie groß ist die minimale Distanz des vorliegenden Codes?

$d_{\rm min}$ =

b) Ist der Code systematisch?

- JA.
- NEIN.

c) Bis zu wie vielen *Erasures* ist die erfolgreiche Decodierung gewährleistet?

$e_{\rm max}$ =

d) Wie lautet das gesendete Informationswort $\underline{u}$ für $\underline{y}$ = (1, 0, E, E, 0, 1, 0)?

- [ ] $\underline{u}$ = (1, 0, 0, 0),
- [ ] $\underline{u}$ = (1, 0, 0, 1),
- [ ] $\underline{u}$ = (1, 0, 1, 0),
- [ ] $\underline{u}$ = (1, 0, 1, 1).

e) Welche der nachfolgenden Empfangsworte können decodiert werden?

- [ ] $\underline{y}_{\rm A}$ = (1, 0, 0, 1, E, E, E),
- [ ] $\underline{y}_{\rm B}$ = (E, E, 0, E, 0, 1, 0),
- [ ] $\underline{y}_{\rm C}$ = (E, E, E, 1, 0, 1, 0),
- [ ] $\underline{y}_{\rm D}$ = (1, 0, E, E, E, E, 0).