A1.14: Bhattacharyya–Schranke für BEC

Wir betrachten in dieser Aufgabe den systematischen (5, 2)–Code mit der 2×5–Generatormatrix

$$\mathbf{G}_{(5,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

der 3 × 5–Prüfmatrix

$$\mathbf{H}_{(5,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und den $2^k = 4$ Codeworten

$$\underline{x}_0 = (0, 0, 0, 0, 0)\,, \quad \underline{x}_1 = (0, 1, 0, 1, 1)\,,$$
$$\underline{x}_2 = (1, 0, 1, 1, 0)\,, \quad \underline{x}_3 = (1, 1, 1, 0, 1)\,.$$

Am Ausgang des digitalen Kanals, der durch das **BEC–Modell** (*Binary Erasure Channel*) mit der Auslöschungswahrscheinlichkeit $\lambda = 0.001$ festgelegt wird, tritt der Empfangsvektor

$$\underline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$$

auf, wobei für $i = 1, \ldots, 5$ gilt: $y_i \in \{0, 1, \mathrm{E}\}$.

Erasure(s)	Empfangsvektoren
keine	(0, 0, 0, 0, 0)
eines	(5 Möglichkeiten)
zwei	(10 Möglichkeiten)
drei	(0, 0, E, E, E) (0, E, 0, E, E) (0, E, E, 0, E) (0, E, E, E, 0) (E, 0, 0, E, E) (E, 0, E, 0, E) (E, 0, E, E, 0) (E, E, 0, 0, E) (E, E, 0, E, 0) (E, E, E, 0, 0)
vier	(0, E, E, E, E) (E, 0, E, E, E) (E, E, 0, E, E) (E, E, E, 0, E) (E, E, E, E, 0)
fünf	(E, E, E, E, E)

Der BEC–Kanal zeichnet sich dadurch aus, dass

- Verfälschungen (0 → 1, 1 → 0) ausgeschlossen sind,
- es aber zu Auslöschungen (0 → E, 1 → E) kommen kann.

Die Grafik zeigt explizit alle möglichen Empfangsvektoren $\underline{y}$ mit drei oder mehr Auslöschungen (englisch: *Erasures*, abgekürzt E) unter der Voraussetzung, dass der Nullvektor (0, 0, 0, 0, 0) gesendet wurde. Bei weniger als drei Auslöschungen liefert bei dem betrachteten (5, 2)–Code der Codewortschätzer immer die richtige Entscheidung: $\underline{z} = \underline{x}$.

Bei drei oder mehr Auslöschungen kann es dagegen zu Fehlentscheidungen kommen. In diesem Fall gilt für die Blockfehlerwahrscheinlichkeit

$$\mathrm{Pr(Blockfehler)} = \mathrm{Pr}(\underline{z} \ne \underline{x}) = \mathrm{Pr}\left\{ [\underline{x}_0 \mapsto \underline{x}_1] \cup [\underline{x}_0 \mapsto \underline{x}_2] \cup [\underline{x}_0 \mapsto \underline{x}_3] \right\}.$$

Das Ereignis $[\underline{x}_0 \to \underline{x}_1]$ sagt nicht unbedingt aus, dass beim betrachteten Empfangsvektor $\underline{y}$ tatsächlich für das Codewort $\underline{x}_1$ entschieden wird, sondern lediglich, dass die Entscheidung für $\underline{x}_1$ aufgrund der Statistik sinnvoller wäre als die Entscheidung für $\underline{x}_0$. Es könnte aber auch für $\underline{x}_2$ oder $\underline{x}_3$ entschieden werden, wenn das **Maximum–Likelihood–Kriterium** hierfür spricht.

Die Berechnung der Blockfehlerwahrscheinlichkeit ist schwierig, da die Ereignisse $[\underline{x}_0 \to \underline{x}_1]$, $[\underline{x}_0 \to \underline{x}_2]$ und $[\underline{x}_0 \to \underline{x}_3]$ nicht notwendigerweise **disjunkt** sind. Eine obere Schranke liefert die **Union Bound:**

$$\mathrm{Pr(Union\ Bound)} = \mathrm{Pr}[\underline{x}_0 \mapsto \underline{x}_1] + \mathrm{Pr}[\underline{x}_0 \mapsto \underline{x}_2] + \mathrm{Pr}[\underline{x}_0 \mapsto \underline{x}_3] \ge \mathrm{Pr(Blockfehler)}\,.$$

Eine weitere Schranke wurde von Bhattacharyya angegeben:

$$\Pr(\text{Bhattacharyya}) = W(\beta) - 1 \geq \Pr(\text{Union Bound}) \geq \Pr(\text{Blockfehler}),$$

wobei beim *Binary Erasure Channel* $\beta = \lambda$ gilt. $W(X)$ ist die **Gewichtsfunktion,** wobei die Pseudo–Variable X hier durch den Bhattacharyya–Parameter β zu ersetzen ist.

Die Bhattacharyya–Schranke liegt je nach Kanal mehr oder weniger weit oberhalb der *Union Bound*. Ihre Bedeutung liegt darin, dass die Schranke für unterschiedliche Kanäle in gleicher Weise angebbar ist.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 1.6.**

Fragebogen zu "A1.14: Bhattacharyya–Schranke für BEC"

a) Wie groß ist die paarweise Fehlerwahrscheinlichkeit zwischen den Codeworten $\underline{x}_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ und $\underline{x}_1 = (0, 1, 0, 1, 1)$?

$\mathrm{Pr}[\underline{x}_0 \rightarrow \underline{x}_1]$ =

b) Welche Aussagen stimmen bezüglich $\mathrm{Pr}[\underline{x}_0 \rightarrow \underline{x}_i]$ mit Laufindex $i = 1, \ ... \ , 3$? Hierbei bezeichnet d_H die Hamming–Distanz zwischen $\underline{x}_0$ und $\underline{x}_i$.

- ☐ Es gilt $\mathrm{Pr}[\underline{x}_0 \rightarrow \underline{x}_i] = \lambda^{d_\mathrm{H}} \cdot (1 - \lambda)^{n - d_\mathrm{H}}$.
- ☐ Es gilt $\mathrm{Pr}[\underline{x}_0 \rightarrow \underline{x}_i] = 1/2 \cdot \lambda^{d_\mathrm{H}}$.
- ☐ $\mathrm{Pr}[\underline{x}_0 \rightarrow \underline{x}_i]$ ist die Verfälschungswahrscheinlichkeit von $\underline{x}_0$ nach $\underline{x}_i$.

c) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten

$\mathrm{Pr}[\underline{x}_0 \rightarrow \underline{x}_2]$ =

$\mathrm{Pr}[\underline{x}_0 \rightarrow \underline{x}_3]$ =

d) Geben Sie die *Union Bound* für die Blockfehlerwahrscheinlichkeit an.

Pr(Union Bound) =

e) Wie lautet im vorliegenden Fall die *Bhattacharyya–Schranke*?

Pr(Bhattacharyya) =

A1.15: Distanzspektren

Wir betrachten wie in **Aufgabe A1.9**

- den (7, 4, 3)–Hamming–Code und
- den erweiterten (8, 4, 4)–Hamming–Code.

Die Grafik zeigt die zugehörigen Codetabellen. In der **Aufgabe A1.12** wurde schon die Syndromdecodierung dieser beiden Codes behandelt.

Codeworte von C_1 Hamming-Code (7, 4)	Codeworte von C_2 HC erweitert auf (8, 4)
(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)	(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0)
(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)	(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1)
(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)	(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1)
(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)	(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1)
(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)	(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)
(0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)	(0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)
(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0)	(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)
(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)	(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)
(1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)	(1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1)
(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)	(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)
(1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)	(1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0)
(1, 1, 0, 0, 0, 1, 1)	(1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)
(1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)	(1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0)
(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)	(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)
(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

In dieser Aufgabe sollen die Unterschiede hinsichtlich des Distanzspektrums $\{W_i\}$ herausgearbeitet werden. Für die Laufvariable gilt $i = 0, \ ... \ , n$:

- Die Integerzahl W_i gibt die Zahl der Codeworte $\underline{x}$ mit dem **Hamming–Gewicht** $w_{\rm H}(\underline{x}) = i$ an.
- Bei den hier betrachteten linearen Code beschreibt W_i gleichzeitig die Anzahl der Codeworte mit der **Hamming–Distanz** i vom Nullwort.
- Häufig weist man der Zahlenmenge $\{W_i\}$ einer Pseudo–Funktion zu, die man **Gewichtsfunktion** (englisch: *Weight Enumerator Function*, WEF) nennt:

$$\{ W_i \} \quad \Leftrightarrow \quad W(X) = \sum_{i=0}^{n} W_i \cdot X^i = W_0 + W_1 \cdot X + W_2 \cdot X^2 + \ ... \ + W_n \cdot X^n \,.$$

Bhattacharyya hat die Pseudo–Funktion $W(X;)$ verwendet, um eine kanalunabhängige (obere) Schranke für die Blockfehlerwahrscheinlichkeit anzugeben:

$${\rm Pr(Blockfehler)} \le {\rm Pr(Bhattacharyya)} = W(\beta) - 1 \,.$$

Der so genannte *Bhattacharyya–Parameter* ist dabei wie folgt gegeben:

$$\beta = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \\ 2 \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot (1- \varepsilon)} \\ \\ \exp[-R \cdot E_{\rm B}/N_0] \end{array} \right.\quad \begin{array}{*{1}c} {\rm f\ddot{u}r\hspace{0.15cm} das\hspace{0.15cm} BEC-Modell},\\ \\ {\rm f\ddot{u}r\hspace{0.15cm} das\hspace{0.15cm} BSC-Modell}, \\ \\ {\rm f\ddot{u}r\hspace{0.15cm} das\hspace{0.15cm} AWGN-Modell}. \end{array}$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf **Kapitel 1.6,** ebenso wie **Aufgabe A1.14** und **Aufgabe A1.16.** Als Kanäle sollen betrachtet werden:

- das **BSC–Modell** (*Binary Symmetric Channel*),
- das **BEC–Modell** (*Binary Erasure Channel*),
- das **AWGN–Kanalmodell.**

Anzumerken ist, dass die Bhattacharyya–Schranke im allgemeinen sehr pessimistisch ist. Die tatsächliche Blockfehlerwahrscheinlichkeit liegt oft deutlich darunter.

Fragebogen zu "A1.15: Distanzspektren "

a) Geben Sie das Distanzspektrum des (7, 4, 3)–Hamming–Codes an.

(7, 4, 3)–Code: W_0 =

W_3 =

W_4 =

W_7 =

b) Wie lautet die Bhattacharyya–Schranke für das BSC–Modell mit $\varepsilon = 0.01$?

(7, 4, 3)–Code: Pr(Bhattacharyya) =

c) Wie lautet bei gleichem Kanal die Schranke des erweiterten Codes?

(8, 4, 4)–Code: Pr(Bhattacharyya) =

d) Mit welchem BEC–Parameter λ erhält man die genau gleichen Schranken?

λ =

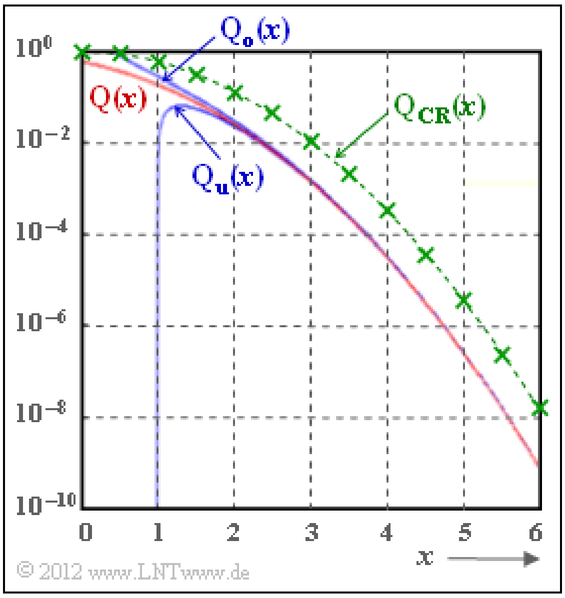
e) Betrachten wir nun das AWGN–Modell. Bestimmen Sie E_B/N_0 in dB derart, dass sich für den (8, 4, 4)–Code die gleiche Bhattacharyya–Schranke ergibt.

(8, 4, 4)–Code: $10 \cdot \lg E_B/N_0$ = dB

f) Ermitteln Sie nun den AWGN–Parameter für den (7, 4, 3)–Hamming–Code.

(7, 4, 3)–Code: $10 \cdot \lg E_B/N_0$ = dB

A1.16: Schranken für AWGN



Wir gehen von der folgenden Konstellation aus:

- ein linearer Blockcode mit der Coderate $R = k/n$ und dem Distanzspektrum $\{W_i\}$, $i = 1, \ldots, n$,
- ein AWGN–Kanal, gekennzeichnet durch „E_B/N_0”

  $\Rightarrow$ umrechenbar in die Rauschleistung σ^2,
- ein Empfänger, basierend auf *Soft Decision* sowie dem *Maximum–Likelihood*–Kriterium.

Unter der für die gesamte Aufgabe gültigen Annahme, dass stets das Nullwort $\underline{x}_1 = (0, 0, \ldots, 0)$ gesendet wird, gilt für die **„paarweise Fehlerwahrscheinlichkeit”** mit einem anderen Codewort $\underline{x}_l$ ($l = 2, \ldots, 2^k$):

$$\Pr[\underline{x}_1 \mapsto \underline{x}_l] = \mathrm{Q}\left(\sqrt{w_\mathrm{H}(\underline{x}_l)/\sigma^2}\right) .$$

Die Herleitung dieser Beziehung finden Sie in **[Liv10]**. In dieser Gleichung wurden verwendet:

- die **komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion** $\mathrm{Q}(x)$,
- das **Hamming–Gewicht** $w_\mathrm{H}(\underline{x}_l)$ des Codewortes $\underline{x}_l$,
- die AWGN–Rauschleistung $\sigma^2 = (2 \cdot R \cdot E_B/N_0)^{-1}$.

Damit lassen sich verschiedene Schranken für die Blockfehlerwahrscheinlichkeit angeben:

- die sogenannte **Union Bound:**

$$p_1 = \sum_{l=2}^{2^k} \Pr[\underline{x}_1 \mapsto \underline{x}_l] = \sum_{l=2}^{2^k} \mathrm{Q}\left(\sqrt{w_\mathrm{H}(\underline{x}_l)/\sigma^2}\right) ,$$

- die so genannte **Truncated Union Bound** (TUB):

$$p_2 = W_{d_\mathrm{min}} \cdot \mathrm{Q}\left(\sqrt{d_\mathrm{min}/\sigma^2}\right) ,$$

- die **Bhattacharyya–Schranke:**

$$p_3 = W(\beta) - 1 , \quad \text{mit } \beta = \exp\left[-1/(2\sigma^2)\right] .$$

  In diesem Fall ist das Distanzspektrum $\{W_i\}$ durch die Gewichtsfunktion zu ersetzen:

$$\{W_i\} \quad \Leftrightarrow \quad W(X) = \sum_{i=0}^{n} W_i \cdot X^i = W_0 + W_1 \cdot X + W_2 \cdot X^2 + \ldots + W_n \cdot X^n .$$

  Beim Übergang von der *Union Bound* p_1 zur Schranke p_3 wird unter Anderem die Funktion $\mathrm{Q}(x)$ durch die *Chernoff–Rubin–Schranke* $\mathrm{Q_{CR}}(x)$ ersetzt. Beide Funktionen sind in obigerer Grafik dargestellt (rote bzw. grüne Kurve).

In der **Aufgabe Z1.16** wird der Zusammenhang zwischen diesen Funktionen numerisch ausgewertet und

Bezug genommen zu den Schranken $Q_o(x)$ und $Q_u(x)$, die in obiger Grafik ebenfalls eingezeichnet sind.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 1.6.** Weiter verweisen wir auf folgendes Flash–Modul:

Komplimentäre Gaußsche Fehlerfunktion (Dateigröße: 235 kB)

Fragebogen zu "A1.16: Schranken für AWGN"

a) Welche Gleichung gilt für die *Union Bound*?

- [ ] p_1 = Summe (über $l = 2, ... , 2^k$) $W_l \cdot \mathrm{Q}[(l/\sigma^2)^{0.5}]$,
- [ ] p_1 = Summe (über $i = 1, ... , n$) $W_i \cdot \mathrm{Q}[(i/\sigma^2)^{0.5}]$.

b) Geben Sie die *Union Bound* für den (8, 4, 4)–Code und $\sigma = 1$, $\sigma = 0.5$ an.

(8, 4, 4)–Code, $\sigma = 1$: p_1 =

$\sigma = 0.5$: p_1 =

c) Was liefert die *Truncated Union Bound* bei gleichen Randbedingungen?

(8, 4, 4)–Code, $\sigma = 1$: p_2 =

$\sigma = 0.5$: p_2 =

d) Welche Aussage gilt immer (für alle Konstellationen)?

- [ ] Die Blockfehlerwahrscheinlichkeit ist nie größer als p_1.
- [ ] Die Blockfehlerwahrscheinlichkeit ist nie größer als p_2.

e) Wie kommt man von p_1 zur Bhattacharyya–Schranke p_3? Dadurch, dass man

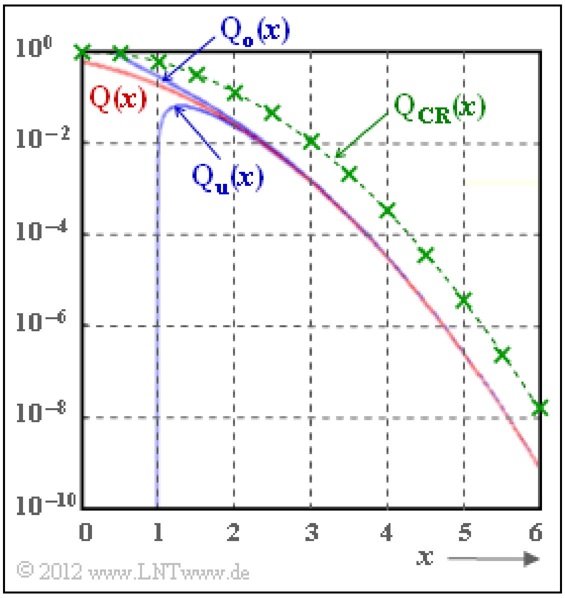
- [ ] die Fehlerfunktion $\mathrm{Q}(x)$ durch die Funktion $\mathrm{Q_{CR}}(x)$ ersetzt,
- [ ] den Bhattacharyya–Parameter $\beta = 1/\sigma$ setzt,
- [ ] statt $\{W_i\}$ die Gewichtsfunktion $W(X)$ verwendet.

f) Geben Sie die Bhattacharyya–Schranke für $\sigma = 1$ und $\sigma = 0.5$ an.

(8, 4, 4)–Code, $\sigma = 1$: p_3 =

$\sigma = 0.5$: p_3 =

Z1.16: Schranken für Q(x)



Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gaußsche Zufallsgröße n mit Streuung σ → Varianz σ^2 betragsmäßig größer ist als ein Wert A, ist gleich

$$\Pr(n > A) = \Pr(n < -A) = \mathrm{Q}(A/\sigma).$$

Hierbei verwendet ist eine der wichtigsten Funktionen für die Nachrichtentechnik (in der Grafik rot eingezeichnet): die **Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion**

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Q(x) ist eine monoton fallende Funktion mit Q(0) = 0.5. Für große Werte von x tendiert Q(x) gegen Null.

Das Integral der Q–Funktion ist analytisch nicht lösbar und wird meist in Tabellenform angegeben. Aus der Literatur bekannt sind aber handhabbare Näherungslösungen bzw. Schranken für positive x–Werte:

- die obere Schranke (obere blaue Kurve in nebenstehender Grafik, nur gültig für $x > 0$):

$$\mathrm{Q_o}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x}\cdot \mathrm{e}^{-x^2/2} \;\ge\; \mathrm{Q}(x)\,,$$

- die untere Schranke (untere blaue Kurve in der Grafik, nur gültig für $x > 1$):

$$\mathrm{Q_u}(x) = \frac{1-1/x^2}{\sqrt{2\pi}\cdot x}\cdot \mathrm{e}^{-x^2/2} \;\le\; \mathrm{Q}(x)\,,$$

- die Chernoff–Rubin–Schranke (grüne Kurve in der Grafik, gezeichnet für $K = 1$):

$$\mathrm{Q_{CR}}(x) = K\cdot \mathrm{e}^{-x^2/2} \;\ge\; \mathrm{Q}(x)\,.$$

In der Aufgabe ist zu untersuchen, in wie weit diese Schranken als Näherungen für Q(x) herangezogen werden können und welche Verfälschungen sich dadurch ergeben.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 1.6** dieses Buches sowie auf das **Kapitel 3.5** im Buch „Stochastische Signaltheorie“. Die Aufgabe bietet auch einige wichtige Hinweise zur Lösung der **Aufgabe A1.16,** in der die Funktion $\mathrm{Q_{CR}}(x)$ zur Herleitung der **Bhattacharyya–Schranke** für den AWGN–Kanal benötigt wird. Weiter verweisen wir auf das folgende Interaktionsmodul:

Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion

Fragebogen zu "Z1.16: Schranken für Q(x)"

a) Welche Werte liefern die obere und die untere Schranke für x = 4?

$\mathbf{Q_o(\mathit{x} = 4)}$ =

$\mathbf{Q_u(\mathit{x} = 4)}$ =

b) Welche Aussagen gelten für die Funktionen $Q_o(x)$ und $Q_u(x)$?

- [ ] Für $x \geq 2$ sind die beiden Schranken brauchbar.
- [ ] Für $x < 1$ ist $Q_u(x)$ unbrauchbar (wegen $Q_u(x) < 0$).
- [ ] Für $x < 1$ ist $Q_o(x)$ unbrauchbar (wegen $Q_o(x) > 1$).

c) Um welchen Faktor liegt die Chernoff–Rubin–Schranke oberhalb von $Q_o(x)$?

$\mathbf{Q_{CR}(\mathit{x})/Q_o(\mathit{x})}$ **:** $\boldsymbol{x}$ **=2** =

$\boldsymbol{x}$ **=4** =

$\boldsymbol{x}$ **=6** =

d) Bestimmen Sie K derart, dass $K \cdot Q_{CR}(x)$ möglichst nahe bei $Q(x)$ liegt und gleichzeitig im gesamten Bereich $Q(x) \leq K \cdot Q_{CR}(x)$ eingehalten wird.

$\boldsymbol{K}$ =