A2.12: Decodierung beim RSC(7, 4, 4)$_8$

Wir analysieren den Peterson–Algorithmus, der im Theorieteil zu **Kapitel 2.5** ausführlich dargelegt ist. Vorausgesetzt wird der Reed–Solomon–Code mit den Parametern n = 7, k = 4 und $d_{\rm min}$ = 4, wobei alle Codesymbole aus GF(2^3) stammen und alle Rechenoperationen in GF(2^3) durchzuführen sind.

Die Prüfmatrix dieses Codes lautet:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha^1 & \alpha^3 & \alpha^5 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^2 & \alpha^5 & \alpha^1 & \alpha^4 \end{pmatrix}.$$

Im **Schritt (A)** des hier betrachteten Decodier–Algorithmuses muss das Syndrom $\underline{s} = \underline{y} \cdot \mathbf{H}^{\rm T}$ berechnet werden. Für das hier vorausgesetzte Empfangswort $\underline{y} = (\alpha^1, 0, \alpha^3, 0, 1, \alpha, 0)$ ergibt sich das Syndrom zu $\underline{s} = (\alpha^4, \alpha^5, \alpha^6)$, wie in **Aufgabe Z2.12** noch gezeigt wird.

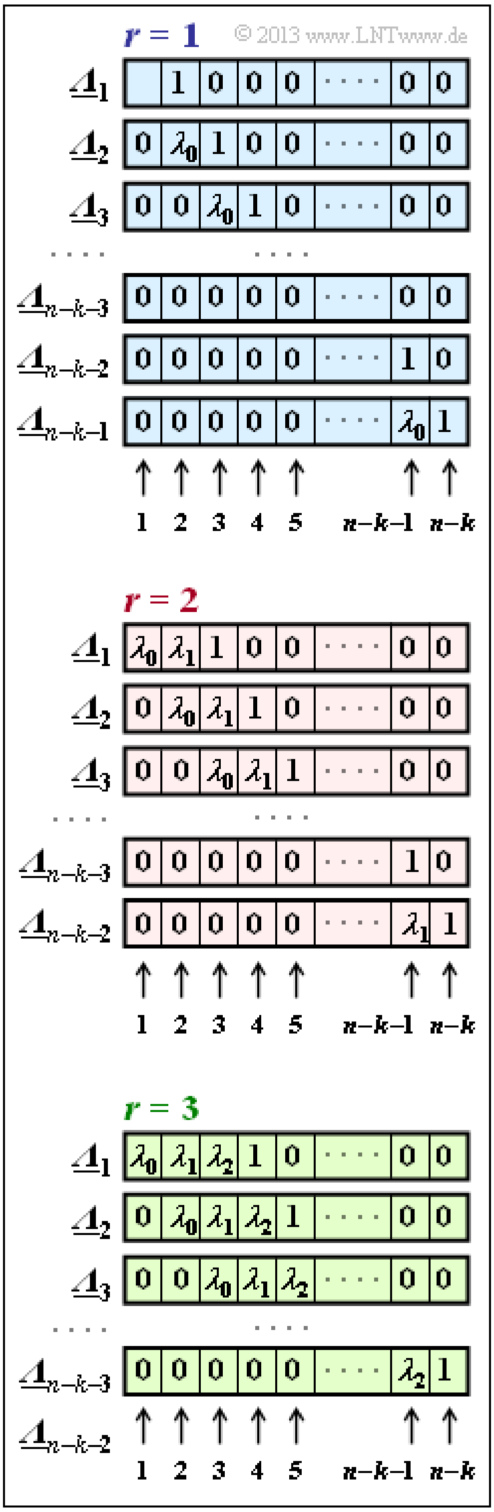
Danach müssen die **ELP–Koeffizientenvektoren** gemäß der nebenstehenden Abbildung aufgestellt und ausgewertet werden, wobei die Belegung davon abhängt, ob man von r = 1, r = 2 oder r = 3 Symbolfehlern im Empfangswort ausgeht.

Sind für die angenommene Symbolfehlerzahl r alle Gleichungen $\underline{\it \Lambda}_l \cdot \underline{s}^{\rm T} = 0$ erfüllt, so weist das Empfangswort $\underline{y}$ tatsächlich genau r Symbolfehler auf.

Die weiteren Schritte können Sie dem Theorieteil entnehmen:

- Schritt (C): **Lokalisierung der Fehlerpositionen,**
- Schritt (D): **Ermittlung der Fehlerwerte.**

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 2.5.**



Fragebogen zu "A2.12: Decodierung beim RSC$(7, 4, 4)_8$"

a) Welche Belegungsschemata sind für diese Aufgabe relevant?

- ☐ Das blau hinterlegte Schema ($r = 1$).
- ☐ Das rot hinterlegte Schema ($r = 2$).
- ☐ Das grün hinterlegte Schema ($r = 3$).

b) Wie lang sind die ELP–Koeffizientenvektoren $\underline{\it \Lambda}_l$?

$\boldsymbol{L}$ =

c) Wie viele solcher Vektoren $\underline{\it \Lambda}_l$ mit Index $l = 1, \text{...}, l_{\rm max}$ gibt es?

$\boldsymbol{l}_{\rm max}$ =

d) Das Syndrom ergibt sich zu $\underline{s} = (\alpha^4, \alpha^5, \alpha^6)$. Ist die Decodierung erfolgreich?

- ○ JA.
- ○ NEIN.

e) Welche Symbole wurden verfälscht?

- ☐ Symbol 0,
- ☐ Symbol 1,
- ☐ Symbol 6.

f) Geben Sie den Wert des verfälschten Symbols $e_i \ne 0$ an.

- ☐ $e_i = \alpha^2$,
- ☐ $e_i = \alpha^3$,
- ☐ $e_i = 1$.

g) Das Syndrom sei nun $\underline{s} = (\alpha^2, \alpha^4, \alpha^5)$. Ist damit die Decodierung erfolgreich?

- ○ JA.
- ○ NEIN.

Z2.12: Reed–Solomon–Syndromberechnung

Wie in der **Aufgabe A2.12** betrachten wir den Reed–Solomon–Code $(7, 4, 4)_8$, der auf dem Galoisfeld GF(q) mit q = 8 = 2^3 basiert. Die Grafik zeigt die zugehörige Umrechnungstabelle.

Gegeben sind die möglichen Codesymbole in Exponentendarstellung (Potenzen von α) sowie in Polynom– und Koeffizientendarstellung.

Potenzen von α	Polynome in α	Vektoren $k_2\ k_1\ k_0$
$\alpha^{-\infty} = 0$	0	000
$\alpha^0 = 1$	1	001
α^1	α	010
α^2	α^2	100
α^3	$\alpha + 1$	011
α^4	$\alpha^2 + \alpha$	110
α^5	$\alpha^2 + \alpha + 1$	111
α^6	$\alpha^2 + 1$	101

Vorgegeben ist das Empfangswort $\underline{y} = (\alpha,\ 0,\ \alpha^3,\ 0,\ 1,\ \alpha,\ 0)$. Anhand des Syndroms

$$\underline{s} = (s_0, s_1, s_2) = \underline{y} \cdot \mathbf{H}^{\rm T}$$

soll überprüft werden, ob einzelne Symbole des Empfangsvektors $\underline{y}$ bei der Übertragung verfälscht wurden. Gegeben ist hierzu die Prüfmatrix $\mathbf{H}$ des betrachteten Codes und deren Transponierte:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha^1 & \alpha^3 & \alpha^5 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^2 & \alpha^5 & \alpha^1 & \alpha^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^{\rm T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 \\ \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^2 \\ \alpha^4 & \alpha^1 & \alpha^5 \\ \alpha^5 & \alpha^3 & \alpha^1 \\ \alpha^6 & \alpha^5 & \alpha^4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die **Seite 4** von Kapitel 2.5.

Fragebogen zu "Z2.12: Reed–Solomon–Syndromberechnung"

a) Empfangen wurde $\underline{y} = (\alpha,\ 0,\ \alpha^3,\ 0,\ 1,\ \alpha,\ 0)$. Geben Sie das erste Element des Syndroms $\underline{s} = (s_0, s_1, s_2)$ an.

- $s_0 = \alpha^4$,
- $s_0 = \alpha^5$,
- $s_0 = \alpha^6$,
- $s_0 = 0,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2$ oder α^3.

b) Wie lautet bei gleichem Empfangswort das zweite Syndromelement?

- $s_1 = \alpha^4$,
- $s_1 = \alpha^5$,
- $s_1 = \alpha^6$,
- $s_1 = 0,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2$ oder α^3.

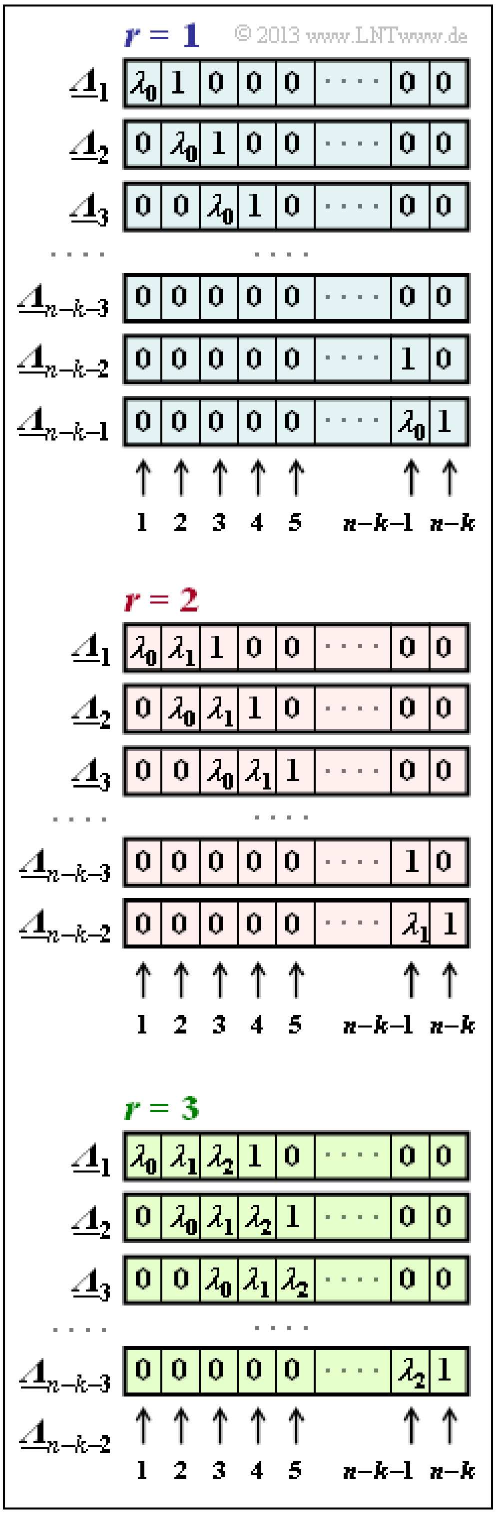
c) Wie lautet bei gleichem Empfangswort das dritte Syndromelement?

- $s_2 = \alpha^4$,
- $s_2 = \alpha^5$,
- $s_2 = \alpha^6$,
- $s_2 = 0,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2$ oder α^3.

d) Bekannt ist, dass das vorliegende Empfangswort $\underline{y}$ decodiert werden kann. Wieviele Symbolfehler beinhaltet das Empfangswort?

$\boldsymbol{r}$ =

A2.13: Nun RSC $(7, 3, 5)_8$–Decodierung



In der **Aufgabe A2.12** haben wir den so genannten Petersen–Algorithmus zur Fehlerkorrektur bzw. zur Decodierung des Reed–Solomon–Codes $(7, 4, 4)_8$ angewendet, der aufgrund der Minimaldistanz $d_{\rm min} = 4$ nur einen Symbolfehler korrigieren kann ($t = 1$).

In dieser Aufgabe betrachten wir nun den RSC$(7, 3, 5)_8$ $\Rightarrow$ $d_{\rm min} = 5$ $\Rightarrow$ $t = 2$, dessen Prüfmatrix wie folgt lautet:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha^1 & \alpha^3 & \alpha^5 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^2 & \alpha^5 & \alpha^1 & \alpha^4 \\ 1 & \alpha^4 & \alpha^1 & \alpha^5 & \alpha^2 & \alpha^6 & \alpha^3 \end{pmatrix}.$$

Für das betrachtete Empfangswort $\underline{y} = (\alpha^2, \alpha^3, \alpha, \alpha^5, \alpha^4, \alpha^2, 1)$ ergibt sich hier das Syndrom zu $\underline{s} = \underline{y} \cdot \mathbf{H}^{\rm T} = (0, 1, \alpha^5, \alpha^2)$.

Die weitere Vorgehensweise bei der Decodierung geschieht entsprechend den folgenden Theorieseiten:

- Schritt (B): **Bestimmung der Symbolfehleranzahl,**
- Schritt (C): **Lokalisierung der Fehlerpositionen,**
- Schritt (D): **Ermittlung der Fehlerwerte.**

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 2.5.** In obiger Grafik sehen Sie die Belegungen der **ELP–Koeffizienten** $\underline{\Lambda}_l$ unter der Annahme, dass es im Empfangswort $r = 1$, $r = 2$ bzw. $r = 3$ Symbolfehler gibt.

Fragebogen zu "A2.13: Nun RSC $(7, 3, 5)_8$–Decodierung"

a) Welche Belegungsschemata könnten für diese Aufgabe relevant sein?

- ☐ Das blau hinterlegte Schema ($r = 1$).
- ☐ Das rot hinterlegte Schema ($r = 2$).
- ☐ Das grün hinterlegte Schema ($r = 3$).

b) Kann das Syndrom $\underline{s} = (0, 1, \alpha^5, \alpha^2)$ durch einen Symbolfehler entstanden sein?

- ○ JA.
- ○ NEIN.

c) Kann das Syndrom $\underline{s} = (0, 1, \alpha^5, \alpha^2)$ durch zwei Symbolfehler entstanden sein?

- ○ JA.
- ○ NEIN.

d) Welche Symbole des Codewortes wurden also verfälscht?

- ☐ Symbol 0,
- ☐ Symbol 1,
- ☐ Symbol 2,
- ☐ Symbol 3,
- ☐ Symbol 4,
- ☐ Symbol 5,
- ☐ Symbol 6.

e) Wie lautet der Fehlervektor $\underline{e}$? Geben Sie auch das Decodierergebnis $\underline{z}$ an.

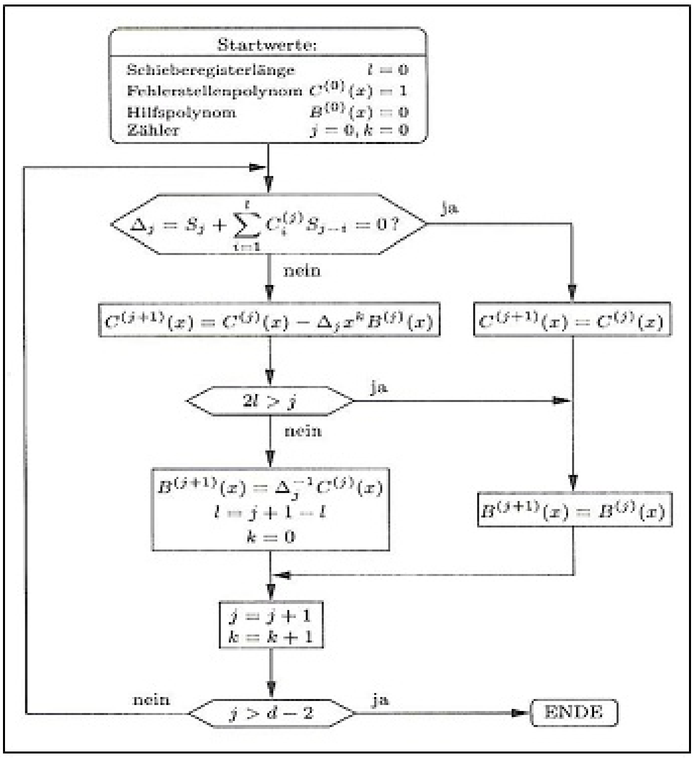
- ☐ $\underline{e} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, \alpha^6)$,
- ☐ $\underline{e} = (\alpha^6, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$,
- ☐ $\underline{e} = (0, 0, 1, \alpha^6, 0, 0, 0)$,
- ☐ $\underline{e} = (0, 0, \alpha^6, 1, 0, 0, 0)$.

A2.14: Petersen–Algorithmus

Im Theorieteil zu **Kapitel 2.5** haben wir die Decodierung von Reed–Solomon–Codes mit dem *Petersen–Algorithmus* behandelt.

- Dessen Vorteil ist, dass die einzelnen Schritte nachvollziehbar sind.
- Sehr von Nachteil ist aber der immens hohe Decodieraufwand.

Schon seit der Erfindung der Reed–Solomon–Codierung im Jahre 1960 beschäftigten sich viele Wissenschaftler und Ingenieure mit der Entwicklung möglichst schneller Algorithmen zur Reed–Solomon—Decodierung, und auch heute ist die *Algebraische Decodierung* noch ein hochaktuelles Forschungsgebiet.



In dieser Aufgabe sollen einige diesbezügliche Begriffe erklärt werden. Auf eine genaue Erklärung dieser Verfahren wurde in LNTwww verzichtet.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 2.5.** Die obige Grafik aus **[Bos98]** zeigt das Flussdiagramm eines der bekanntesten Verfahren zur Decodierung von Reed–Solomon–Codes. Um welchen Algorithmus es sich dabei handelt, wird in der Musterlösung zu dieser Aufgabe genannt.

Fragebogen zu "A2.14: Petersen–Algorithmus"

a) Bei welchen Codes wird die Syndromdecodierung eingesetzt? Bei den

- ☐ binären Blockcodes,
- ☐ Reed–Solomon–Codes,
- ☐ Faltungscodes.

b) Was ist beim Petersen–Algorithmus am aufwändigsten?

- ☐ Überprüfung, ob überhaupt (ein oder mehrere) Fehler vorliegen,
- ☐ die Lokalisierung der Fehler,
- ☐ die Fehlerwertbestimmung.

c) Welche Begriffe beziehen sich auf die Reed–Solomon–Decodierung?

- ☐ Der Berlekamp–Massey–Algorithmus,
- ☐ der BCJR–Algorithmus,
- ☐ der Euklidische Algorithmus,
- ☐ Frequenzbereichsverfahren, basierend auf der DFT,
- ☐ der Viterbi–Algorithmus.