A2.15: $\Pr(\underline{v} \ne \underline{u})$ vs. E_B/N_0

E_B/N_0 log.	E_B/N_0 lin.	BSC ε	3–BSC ε_S	$\Pr(\underline{v} \ne \underline{u})$
0 dB	1.000	0.176	0.441	0.666
1 dB	1.259	0.149	0.384	0.545
2 dB	1.585	0.123	0.325	0.470
3 dB	1.995	0.095	0.259	0.263
4 dB	2.512	0.071	≈ 0.2	0.148
5 dB	3.162	0.0505	???	???
???	???	???	≈ 0.1	$2.57 \cdot 10^{-2}$
7 dB	5.012	0.0192	0.0565	$5.30 \cdot 10^{-3}$
8 dB	6.310	≈ 0.01	≈ 0.03	???
???	???	???	≈ 0.01	$3.40 \cdot 10^{-5}$
10 dB	10.000	0.0017	≈ 0.005	???
???	???	???	≈ 0.001	$3.49 \cdot 10^{-8}$
12 dB	15.849	0.00012	0.00035	$1.63 \cdot 10^{-9}$

Am Beispiel des RSC $(7, 3, 5)_8$ mit den Parametern

- $n = 7$ (Anzahl der Codesymbole),
- $k = 3$ (Anzahl der Informationssymbole),
- $t = 2$ (Korrekturfähigkeit)

soll die Berechnung der Blockfehlerwahrscheinlichkeit beim **Bounded Distance Decoding** (BDD) gezeigt werden. Die entsprechende Gleichung lautet:

$$\Pr(\text{Blockfehler}) = \sum_{f=t+1}^{n} \binom{n}{f} \cdot {\varepsilon_S}^f \cdot (1-\varepsilon_S)^{n-f}\,.$$

Die Berechnung erfolgt für den **AWGN–Kanal,** der durch den Parameter E_B/N_0 gekennzeichnet ist. Dieser Quotient lässt sich über die Beziehung

$$\varepsilon = {\rm Q}\left(\sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot E_B}{N_0}}\right)$$

in das **BSC–Modell** überführen, wobei R die Coderate bezeichnet (hier: $R = 3/7$) und ${\rm Q}(x)$ das **komplementäre Gaußsche Fehlerintegral** angibt. Da aber beim betrachteten Code die Symbole aus $\mathrm{GF}(2^3)$ entstammen, muss das BSC–Modell mit Parameter ε ebenfalls noch an die Aufgabenstellung adaptiert werden. Für die Verfälschungswahrscheinlichkeit des ***m*–BSC–Modells** gilt:

$$\varepsilon_S = 1 - (1-\varepsilon)^m\,,$$

wobei hier $m = 3$ zu setzen ist (3 Bit pro Codesymbol).

Für einige E_B/N_0–Werte sind alle Ergebnisse bereits in obiger Tabelle eingetragen. Die gelb hinterlegten Zeilen werden hier kurz erläutert.

- Für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 4$ dB ergibt sich $\varepsilon \approx {\rm Q}(1.47) \approx 0.071$ und $\varepsilon_S \approx 0.2$. Der einfachste Weg zur Berechnung der Blockfehlerwahrscheinlichkeit führt hier über das Komplement:

$$\Pr(\text{Blockfehler}) = 1 - \left[\binom{7}{0} \cdot 0.8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0.2 \cdot 0.8^6 + \binom{7}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^5\right] \approx 0.148\,.$$

- Für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 12$ dB erhält man $\varepsilon \approx 1.2 \cdot 10^{-4}$ und $\varepsilon_S \approx 3.5 \cdot 10^{-4}$. Mit dieser sehr kleinen Verfälschungswahrscheinlichkeit dominiert der $f = 3$–Term und man erhält

$$\Pr(\text{Blockfehler}) \approx \binom{7}{3} \cdot (3.5 \cdot 10^{-4})^3 \cdot (1 - 3.5 \cdot 10^{-4})^4 \approx 1.63 \cdot 10^{-9}\,.$$

In dieser Aufgabe sollen Sie für die rot hinterlegten Zeilen ($10 \cdot \lg E_B/N_0 = 5$ dB, 8 dB und 10 dB) die Blockfehlerwahrscheinlichkeiten berechnen.

Die blau hinterlegten Zeilen zeigen einige Ergebnisse der **Zusatzaufgabe Z2.15.** Dort wird $\Pr(\underline{v} \ne \underline{u})$ für

ε_S = 10%, 1% und 0.1% berechnet. In den Teilaufgaben (d) und (e) sollen Sie den Zusammenhang zwischen dieser Größe ε_S und dem AWGN–Parameter E_B/N_0 herstellen und somit die obige Tabelle vervollständigen.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 2.6.** Wir weisen Sie auf folgende Interaktionsmodule hin:

Komplementäre Gaußsche Fehlerfunktionen

Wahrscheinlichkeiten der Binominalverteilung

Fragebogen zu "A2.15: Pr($\underline{v} \ne \underline{u}$) vs. E_B/N_0

a) Wie groß ist die Blockfehlerwahrscheinlichkeit für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 5$ dB?

E_B/N_0 = 5 dB: Pr(Blockfehler) =

b) Wie groß ist die Blockfehlerwahrscheinlichkeit für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 8$ dB?

E_B/N_0 = 8 dB: Pr(Blockfehler) =

c) Wie groß ist die Blockfehlerwahrscheinlichkeit für $10 \cdot \lg E_B/N_0 = 10$ dB?

E_B/N_0 = 10 dB: Pr(Blockfehler) =

d) Wie hängt $\varepsilon_S = 0.1$ mit $10 \cdot \lg E_B/N_0$ zusammen? *Hinweis:* Verwenden Sie das angegebene Flash–Modul zur Berechnung von Q(x).

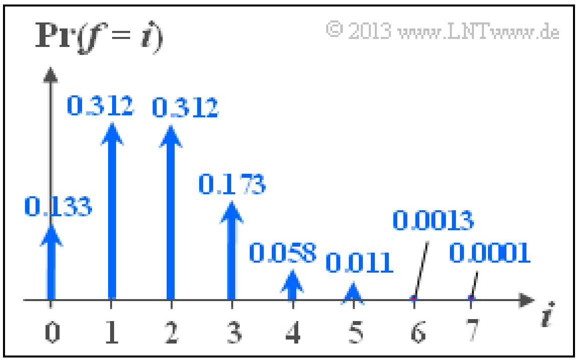
ε_S = 0.1: $10 \cdot \lg E_B/N_0$ = dB

e) Ermitteln Sie auch die E_B/N_0–Werte (in dB) für $\varepsilon_S = 0.01$ und $\varepsilon_S = 0.001$ und vervollständigen Sie die Tabelle.

ε_S = 0.01: $10 \cdot \lg E_B/N_0$ = dB

ε_S = 0.001: $10 \cdot \lg E_B/N_0$ = dB

Z2.15: Nochmals Pr($\underline{v} \neq \underline{u}$) für BDD



Bei Verwendung eines Reed–Solomon–Codes mit der Korrekturfähigkeit t und **Bounded Distance Decoding** (BDD) erhält man mit

- der Codewortlänge n und
- der Symbolverfälschungswahrscheinlichkeit ε_S

für die Blockfehlerwahrscheinlichkeit:

$$\Pr(\text{Blockfehler}) = \sum_{f=t+1}^{n} \binom{n}{f} \cdot {\varepsilon_S}^f \cdot (1-\varepsilon_S)^{n-f} .$$

In dieser Aufgabe soll die Blockfehlerwahrscheinlichkeit für den RSC $(7, 3, 5)_8$ und verschiedene ε_S–Werte berechnet und angenähert werden. Obige Gleichung erinnert an die **Binominalverteilung.** Die Grafik zeigt die Wahrscheinlichkeiten der Binominalverteilung für die Parameter n = 7 (Codewortlänge) und ε_S = 0.25 (Symbolverfälschungswahrscheinlichkeit).

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 2.6.** Zur Kontrolle können Sie das folgende interaktive Flash–Modul nutzen:

Wahrscheinlichkeiten der Binominalverteilung

Fragebogen zu "Z2.15: Nochmals Pr($\underline{v} \ne \underline{u}$) für BDD"

a) Welche Blockfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich für $\varepsilon_S = 0.1$?

ε_S = 0.1: Pr(Blockfehler) =

b) Welche Blockfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich für $\varepsilon_S = 0.01$?

ε_S = 0.01: Pr(Blockfehler) =

c) Welches Ergebnis erhält man, wenn man nur den Term $f = t + 1$ berücksichtigt?

Näherung: Pr(Blockfehler) =

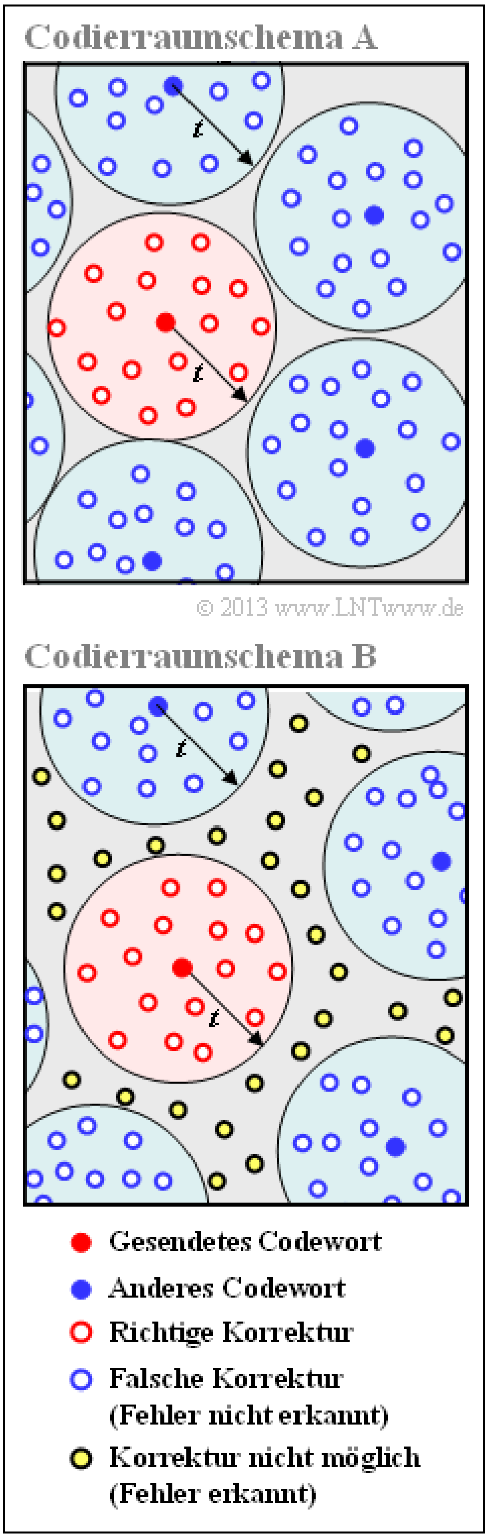
d) Welches Ergebnis erhält man näherungsweise für $\varepsilon_S = 10^{-3}$?

$\varepsilon_S = 10^{-3}$: Pr(Blockfehler) =

e) Welches ε_S benötigt man für die Blockfehlerwahrscheinlichkeit 10^{-10}?

Pr(Blockfehler) = 10^{-10}: ε_S =

A2.16: BDD–Entscheidungskriterien



Wir gehen von einem Blockcode der Länge n mit Symbolen $c_i \in \mathrm{GF}(2^m)$ aus, der bis zu t Symbole korrigieren kann. Jedes mögliche Empfangswort $\underline{y}_i$ kann dann als ein Punkt in einem hochdimensionalen Raum angesehen werden. Geht man von der Basis $\mathrm{GF}(2) = \{0, 1\}$ aus, so beträgt die Dimension $n \cdot m$.

Die Grafik zeigt einen solchen Raum in stark vereinfachender 2–Darstellung. Die Abbildung ist wie folgt zu interpretieren:

- Gesendet wurde der rote Punkt $\underline{c}_j$. Alle rot umrandeten Punkte $\underline{y}_i$ in einer Hyperkugel um diesen Punkt $\underline{c}_j$ mit dem Parameter t als Radius können korrigiert werden. Mit der Nomenklatur gemäß der **Grafik** im Theorieteil gilt dann $\underline{z}_i = \underline{c}_j$ ⇒ „Die Fehlerkorrektur ist erfolgreich”.
- Bei sehr vielen Symbolfehlern kann $\underline{c}_j$ in einen blauen (oder weißblauen) Punkt $\underline{y}_j$ verfälscht werden, der zur Hyperkugel eines anderen Codewortes $\underline{c}_{k \ne j}$ gehört. In diesem Fall trifft der Decoder eine falsche Entscheidung ⇒ „Das Empfangswort $\underline{y}_j$ wird falsch decodiert” .
- Schließlich kann es wie in der unteren Skizze auch noch gelbe Punkte geben, die zu keiner Hyperkugel gehören ⇒ „Das Empfangswort $\underline{y}_j$ ist nicht decodierbar”.

In dieser Aufgabe sollen Sie entscheiden, welches der beiden Coderaumschemata geeignet ist zur Beschreibung der

- **BDD–Decodierung von Hamming–Codes** bzw.
- **BDD–Decodierung von Reed–Solomon–Codes.**

Hinweis: Die Aufgabe ergänzt die Thematik von **Kapitel 2.6** und soll signifikante Unterschiede bei der Decodierung von Reed–Solomon–Codes und Hamming–Codes verdeutlichen.

Fragebogen zu "A2.16: BDD–Entscheidungskriterien"

a) Welches Codierraumschema trifft für die Hamming–Codes zu?

- ○ Codierraumschema **A**,
- ○ Codierraumschema **B**.

b) Welche Aussage gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass bei Hamming–Codierung ein Empfangswort $\underline{y}$ nicht decodiert werden kann?

- ☐ Die Wahrscheinlichkeit Pr($\underline{y}$ ist nicht decodierbar) ist exakt 0.
- ☐ Pr($\underline{y}$ ist nicht decodierbar) ist ungleich 0, aber vernachlässigbar.
- ☐ Es gilt Pr($\underline{y}$ ist nicht decodierbar) > Pr($\underline{y}$ wird falsch decodiert).

c) Welches Codierraumschema trifft für die Reed–Solomon–Codes zu?

- ☐ Codierraumschema **A**,
- ☐ Codierraumschema **B**.

d) Welche Aussage gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Empfangswort $\underline{y}$ nach Reed–Solomon–Codierung nicht decodiert werden kann?

- ☐ Die Wahrscheinlichkeit Pr($\underline{y}$ ist nicht decodierbar) ist exakt 0.
- ☐ Pr($\underline{y}$ ist nicht decodierbar) ist ungleich 0, aber vernachlässigbar.
- ☐ Es gilt Pr($\underline{y}$ ist nicht decodierbar) > Pr($\underline{y}$ wird falsch decodiert).