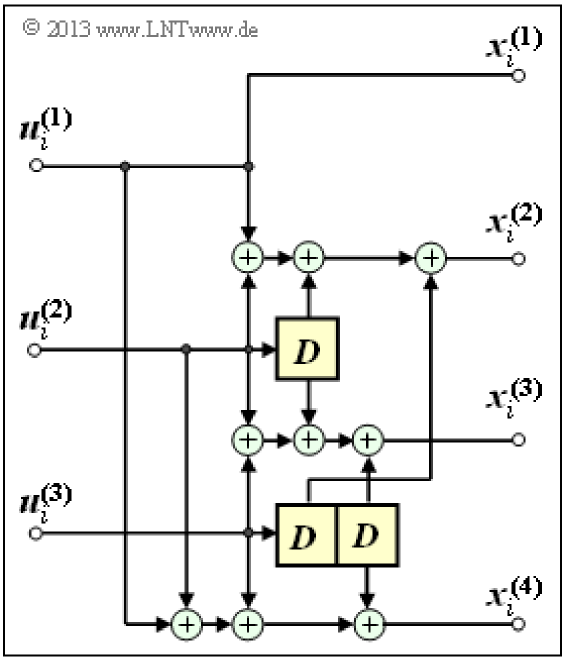
A3.2: G–Matrix eines Faltungscoders



Wir betrachten wie in **Aufgabe A3.1** den nebenstehend gezeichneten Faltungscodierer der Rate 3/4. Dieser wird durch den folgenden Gleichungssatz charakterisiert:

$$\begin{aligned} x_i^{(1)} &= u_i^{(1)}, \\ x_i^{(2)} &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_{i-1}^{(2)} + u_{i-1}^{(3)}, \\ x_i^{(3)} &= u_i^{(2)} + u_i^{(3)} + u_{i-1}^{(2)} + u_{i-2}^{(3)}, \\ x_i^{(4)} &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_i^{(3)} + u_{i-2}^{(3)}. \end{aligned}$$

Bezieht man sich auf die bei $i = 1$ beginnenden und sich zeitlich bis ins Unendliche erstreckenden Sequenzen

$$\begin{aligned} \underline{u} &= (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_i, \dots), \\ \underline{x} &= (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_i, \dots) \end{aligned}$$

mit $\underline{u}_i = (u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(k)})$ bzw. $\underline{x}_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n)})$, so kann der Zusammenhang zwischen der Informationssequenz $\underline{u}$ und der Codesequenz $\underline{x}$ durch die Generatormatrix $\mathbf{G}$ in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\underline{x} = \underline{u} \cdot \mathbf{G}.$$

Für die Generatormatrix eines Faltungscoders mit dem Gedächtnis m ist dabei zu setzen:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \cdots & \mathbf{G}_m & & & \\ & \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \cdots & \mathbf{G}_m & & \\ & & \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \cdots & \mathbf{G}_m & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnen $\mathbf{G}_0$, $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, ... Teilmatrizen mit jeweils k Zeilen und n Spalten sowie binären Matrixelementen (0 oder 1). Ist das Matrixelement $\mathbf{G}_l(\kappa, j) = 1$, so bedeutet dies, dass das Codebit $x_i^{(j)}$ durch das Informationsbit $u_{i-l}^{(\kappa)}$ beeinflusst wird. Andernfalls ist dieses Matrixelement gleich 0.

Ziel dieser Aufgabe ist es, die zur Informationssequenz

$$\underline{u} = (0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$$

gehörige Codesequenz $\underline{x}$ entsprechend den obigen Vorgaben zu berechnen. Das Ergebnis müsste mit dem Ergebnis von **Aufgabe A3.1** übereinstimmen, das allerdings auf anderem Wege erzielt wurde.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 3.2.**

Fragebogen zu "A3.2: G–Matrix eines Faltungscoders"

a) Aus wie vielen Teilmatrizen $\mathbf{G}_l$ setzt sich die Matrix $\mathbf{G}$ zusammen?

Anzahl der Teilmatrizen =

b) Welche Aussagen treffen für die Teilmatrix $\mathbf{G}_0$ zu?

- [ ] Insgesamt beinhaltet $\mathbf{G}_0$ acht Einsen.
- [ ] Die erste Zeile von $\mathbf{G}_0$ lautet 1 1 0 1.
- [ ] Die erste Zeile von $\mathbf{G}_0$ lautet 1 0 0.

c) Welche Aussagen treffen für die Teilmatrix $\mathbf{G}_1$ zu?

- [ ] Die erste Zeile lautet 0 0 0 0 .
- [ ] Die zweite Zeile lautet 0 1 1 0.
- [ ] Die dritte Zeile lautet 0 1 0 0.

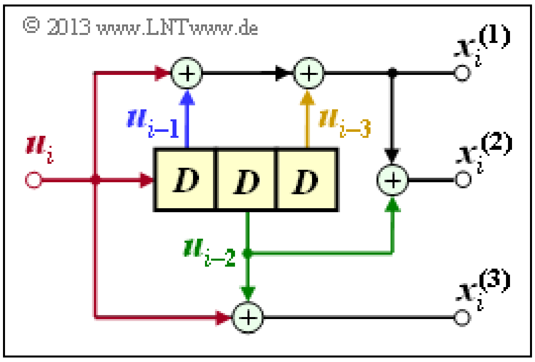
d) Ermitteln Sie die ersten neun Zeilen und zwölf Spalten der Generatormatrix $\mathbf{G}$. Welche Aussagen treffen zu?

- [ ] Es gibt mindestens eine Zeile mit lauter Nullen.
- [ ] Es gibt mindestens eine Zeile mit lauter Einsen.
- [ ] In den Spalten 1, 5, 9 steht jeweils nur eine einzige Eins.

e) Welche Codesequenz $\underline{x}$ ergibt sich für $\underline{u} = (0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$?

- [ ] Es gilt: $\underline{x} = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, ...)$.
- [ ] Es gilt: $\underline{x} = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, ...)$.
- [ ] Es gilt: $\underline{x} = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, ...)$.

Z3.2: (3, 1, 3)–Faltungscodierer



Der dargestellte Faltungscodierer wird durch die Parameter k = 1 (nur eine Informationssequenz $\underline{u}$) sowie n = 3 (drei Codesequenzen $\underline{x}^{(1)}$, $\underline{x}^{(2)}$, $\underline{x}^{(3)}$) charakterisiert. Aus der Anzahl der Speicherzellen ergibt sich das Gedächtnis m = 3.

Mit dem Informationsbit u_i zum Codierschritt i erhält man die folgenden Codebits:

$$\begin{aligned} x_i^{(1)} &= u_i + u_{i-1} + u_{i-3}\,, \\ x_i^{(2)} &= u_i + u_{i-1} + u_{i-2} + u_{i-3}\,, \\ x_i^{(3)} &= u_i + u_{i-2}\,. \end{aligned}$$

Daraus lassen sich Teilmatrizen $\mathbf{G}_l$ ableiten, wie auf der **Theorieseite 1** dieses Kapitels beschrieben. Für die Generatormatrix kann somit geschrieben werden:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \cdots & \mathbf{G}_m & & & \\ & \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \cdots & \mathbf{G}_m & & \\ & & \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \cdots & \mathbf{G}_m & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix},$$

und für die Codesequenz $\underline{x} = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)}, \text{...})$ gilt:

$$\underline{x} = \underline{u} \cdot \mathbf{G}\,.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 3.2.**

Fragebogen zu "Z3.2: (3, 1, 3)–Faltungscodierer"

a) Aus wievielen Teilmatrizen $\mathbf{G}_l$ setzt sich die Matrix $\mathbf{G}$ zusammen?

Anzahl der Teilmatrizen =

b) Welche Dimension besitzen die Teilmatrizen $\mathbf{G}_l$?

Zeilenzahl der Teilmatrizen =

Spaltenzahl der Teilmatrizen =

c) Welche Aussagen sind richtig?

- [ ] Es gilt $\mathbf{G}_0 = (1, 1, 1)$.
- [ ] Es gilt $\mathbf{G}_1 = (1, 1, 0)$.
- [ ] Es gilt $\mathbf{G}_2 = (0, 1, 1)$.
- [ ] Es gilt $\mathbf{G}_3 = (1, 1, 0)$.

d) Erstellen Sie die Generatormatrix $\mathbf{G}$ mit 5 Zeilen und 15 Spalten. Welche Codesequenz ergibt sich für $\underline{u} = (1, 0, 1, 1, 0)$?

- [ ] Es gilt $\underline{x} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ...)$.
- [ ] Es gilt $\underline{x} = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, ...)$.
- [ ] Es gilt $\underline{x} = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, ...)$.

A3.3: $\underline{x}$ über $U(D)$ und $G(D)$

Nebenstehend ist für den betrachteten Faltungscode der linke obere Ausschnitt der Generatormatrix **G** dargestellt. Daraus sollen unter der Randbedingung $m \le 2$ die Teilmatrizen $\mathbf{G}_l$ extrahiert werden, womit dann die Übertragungsfunktionsmatrix entsprechend folgender Gleichung zusammengestellt werden kann:

$$\mathbf{G}(D) = \sum_{l=0}^{m} \mathbf{G}_l \cdot D^l = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1 \cdot D + \ldots + \mathbf{G}_m \cdot D^m .$$

$$\begin{matrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{matrix}$$

Generatormatrix G

Gesucht werden zudem die n Codesequenzen $\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, \ldots , \underline{x}^{n}$, wobei von der Informationssequenz

$$\underline{u} = (0\,, 1\,, 1\,, 1\,, 1\,, 0\,, 1\,, 0\,, 1\,, \ldots)$$

auszugehen ist. Diese Sequenz ist dabei in k Teilsequenzen $\underline{u}^{(1)}, \underline{u}^{(2)}, \ldots , \underline{u}^{k}$ aufzuspalten. Aus deren D–Transformierten

$$U^{(1)}(D) \;\bullet\!\!\stackrel{D}{-\!\!-}\!\!\circ\; \underline{u}^{(1)}, \quad \ldots \quad , U^{(k)}(D) \;\bullet\!\!\stackrel{D}{-\!\!-}\!\!\circ\; \underline{u}^{(k)}$$

wird dann der Vektor $\underline{U}(D) = (U^{(1)}(D), \ldots , U^{(k)}(D))$ gebildet. Dann gilt für den Codesequenzvektor in D–Darstellung:

$$\underline{X}(D) = \left(X^{(1)}(D)\,, \ldots\,, X^{(k)}(D)\right) = \underline{U}(D) \cdot \mathbf{G}(D)\,.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themenkomplex von **Kapitel 3.2.** Der hier zugrunde liegende Codierer ist identisch mit dem von **Aufgabe A3.2.** Nachdem auch von der gleichen Informationssequenz $\underline{u}$ ausgegangen wird, muss sich hier die gleiche Codesequenz $\underline{x}$ ergeben wie in Aufgabe A3.2, siehe **Musterlösung.** Die Lösungswege beider Aufgaben unterscheiden sich allerdings grundlegend.

Fragebogen zu "A3.3: $\underline{x}$ über $U(D)$ und $G(D)$"

a) Wie lauten die Codeparameter? *Hinweis:* Für das Gedächtnis gelte $m \le 2$.

n =

k =

m =

b) Welche Aussagen sind für die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(D)$ richtig?

- [ ] Das $\mathbf{G}(D)$–Element in Zeile 1, Spalte 1 ist „1”.
- [ ] Das $\mathbf{G}(D)$–Element in Zeile 2, Spalte 2 ist „$1 + D$”.
- [ ] Das $\mathbf{G}(D)$–Element in Zeile 3, Spalte 3 ist „$1 + D^2$”.

c) Welche Aussagen treffen für die D–Transformierten der Eingangssequenzen zu?

- [ ] $U^{(1)}(D) = 1$,
- [ ] $U^{(2)}(D) = 1 + D$,
- [ ] $U^{(3)}(D) = D^2$.

d) Wie lauten die ersten drei Bit der Codesequenz $\underline{x}^{(1)}$?

- [ ] $\underline{x}^{(1)} = (0, 1, 1, ...)$,
- [ ] $\underline{x}^{(1)} = (1, 0, 0, ...)$,
- [ ] $\underline{x}^{(1)} = (0, 0, 1, ...)$.

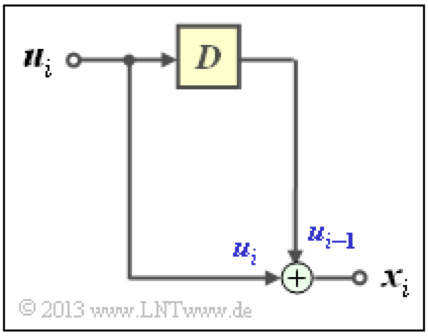
e) Wie lauten die ersten drei Bit der Codesequenz $\underline{x}^{(2)}$?

- [ ] $\underline{x}^{(2)} = (0, 1, 1, ...)$,
- [ ] $\underline{x}^{(2)} = (1, 0, 0, ...)$,
- [ ] $\underline{x}^{(2)} = (0, 0, 1, ...)$.

f) Wie lauten die ersten drei Bit der Codesequenz $\underline{x}^{(3)}$?

- [ ] $\underline{x}^{(3)} = (0, 1, 1, ...)$,
- [ ] $\underline{x}^{(3)} = (1, 0, 0, ...)$,
- [ ] $\underline{x}^{(3)} = (0, 0, 1, ...)$.

Z3.3: Faltung und *D*–Transformation



In dieser Aufgabe beschreiben wir an einem einfachen Beispiel

- die endliche **Impulsantwort** eines Filters:

$$\underline{g} = (g_0, g_1, \ldots, g_l, \ldots, g_m)\,, \quad g_l \in \mathrm{GF}(2) = \{0, 1\}\,,$$

- die **Eingangssequenz** des Filters:

$$\underline{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_i, \ldots)\,, \quad u_i \in \mathrm{GF}(2) = \{0, 1\}\,,$$

- die **Ausgangssequenz** des Filters:

$$\underline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots)\,, \quad x_i \in \mathrm{GF}(2) = \{0, 1\}\,.$$

Die Nomenklatur für diese (digitale) Filterbeschreibung haben wir an das Buch „Einführung in die Kanalcodierung;" angepasst. In anderen Büchern bezeichnet oft $\underline{x}$ den Filtereingang, $\underline{y}$ den Filterausgang, und die Impulsantwort wird h genannt.

Allgemein gilt für die Ausgangssequenz entsprechend der **Faltung** (englisch: *Convolution*):

$$\underline{x} = \underline{u} * \underline{g} = (x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots)\,, \ \text{mit} \ x_i = \sum_{l=0}^{m} g_l \cdot u_{i-l}\,.$$

Wir repräsentieren nun die Zeitfunktionen $\underline{g}$, $\underline{u}$ und $\underline{x}$ durch Polynome in einer Dummy–Variablen D und nennen diese die D–Transformierten:

$$\underline{g} \ \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \ G(D) = \sum_{l=0}^{m} g_l \cdot D^l = g_0 + g_1 \cdot D + g_2 \cdot D^2 + \ldots + g_m \cdot D^m\,,$$

$$\underline{u} \ \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \ U(D) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \cdot D^i = u_0 + u_1 \cdot D + u_2 \cdot D^2 + \ldots\,,$$

$$\underline{x} \ \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \ X(D) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot D^i = x_0 + x_1 \cdot D + x_2 \cdot D^2 + \ldots\,.$$

Damit wird aus der (komplizierteren) Faltung eine Multiplikation:

$$\underline{x} = \underline{u} * \underline{g} \ \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \ X(D) = U(D) \cdot G(D)\,.$$

Formal lässt sich dieser Zusammenhang wie folgt nachweisen:

$$X(D) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot D^i = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{m} g_l \cdot u_{i-l} \cdot D^i = \sum_{l=0}^{m} g_l \cdot \sum_{j=-l}^{\infty} u_j \cdot D^{j+l} =$$
$$= \sum_{l=0}^{m} g_l \cdot D^l \cdot \sum_{j=0}^{\infty} u_j \cdot D^j \quad \Rightarrow \quad X(D) = U(D) \cdot G(D)\,.$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass alle u_j für $j < 0$ nicht existieren und zu 0 gesetzt werden können.

Beide Vorgehensweisen zur Berechnung der Ausgangssequenz $\underline{x}$, nämlich

- über die Faltung
- mit Hilfe der D–Transformation,

sollen für das oben skizzierte Digitale Filter demonstriert werden.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf den Lehrstoff von **Seite 4** des Kapitels 3.2. Berücksichtigen Sie bei der Lösung die folgende Identität für Berechnungen in GF(2):

$$1 + D + D^2 + D^3 + \ ... \ = \frac{1}{1+D}\,.$$

Fragebogen zu "Z3.3: Faltung und *D*–Transformation"

a) Wie lauten die vorliegenden Filterkoeffizienten?

g_0 =

g_1 =

g_2 =

b) Die Sequenz $\underline{u}$ = (1, 0, 0, 1) sei endlich. Wie lautet die Ausgangssequenz?

- [ ] $\underline{x}$ = (1, 0, 0, ...).
- [ ] $\underline{x}$ = (1, 0, 0, 1, 0, 0, ...).
- [ ] $\underline{x}$ = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, ...).
- [ ] $\underline{x}$ = (1, 1, 1, 1, ...) ⇒ „Dauer–Einsfolge".

c) Die Sequenz $\underline{u}$ = (1, 1, 1) sei endlich. Wie lautet die Ausgangssequenz?

- [ ] $\underline{x}$ = (1, 0, 0, ...).
- [ ] $\underline{x}$ = (1, 0, 0, 1, 0, 0, ...).
- [ ] $\underline{x}$ = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, ...).
- [ ] $\underline{x}$ = (1, 1, 1, 1, ...) ⇒ „Dauer–Einsfolge".

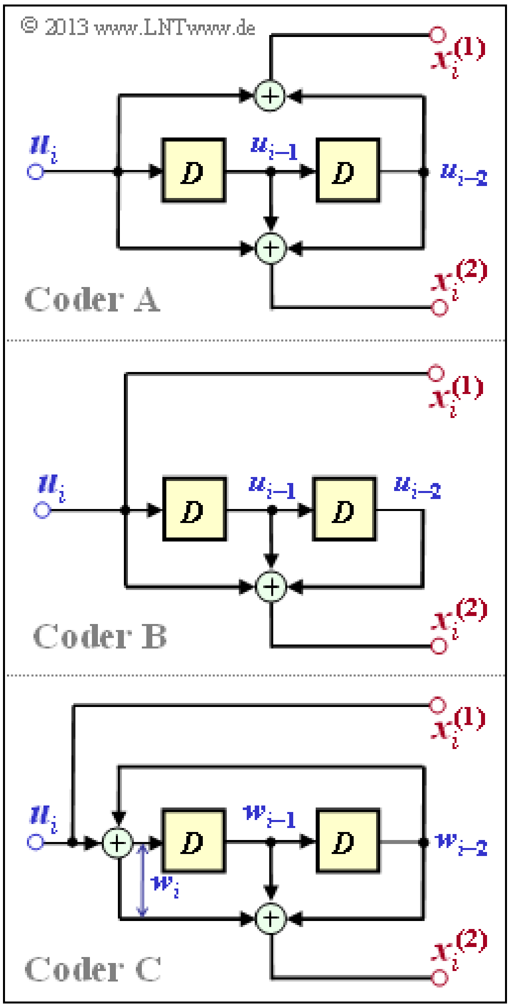
d) Wie lautet die Ausgangssequenz für $\underline{u}$ = (1, 1, 1, 1, ...) ⇒ „Dauer–Einsfolge"?

- [ ] $\underline{x}$ = (1, 0, 0, ...).
- [ ] $\underline{x}$ = (1, 0, 0, 1, 0, 0, ...).
- [ ] $\underline{x}$ = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, ...).
- [ ] $\underline{x}$ = (1, 1, 1, 1, ...) ⇒ „Dauer–Einsfolge".

e) Für welchen Vektor $\underline{u}$ tritt am Ausgang die Folge $\underline{x}$ = (1, 1, 1, 1, ...) auf?

- [ ] $\underline{u}$ = (1, 1, 1, 1, ...) ⇒ „Dauer–Einsfolge".
- [ ] $\underline{u}$ = (1, 0, 1, 0, 1, 0, ...) ⇒ alternierende Folge, beginnend mit 1.
- [ ] $\underline{u}$ = (0, 1, 0, 1, 0, 1, ...) ⇒ alternierende Folge, beginnend mit 0.

A3.4: Systematische Faltungscodes



Man spricht von einem systematischen Faltungscode der Rate $R = 1/2 \Rightarrow k = 1, n = 2$, wenn das Codebit $x_i^{(1)}$ gleich dem momentan anliegenden Informationsbit u_i ist.

Die Übertragungsfunktionsmatrix eines solchen Codes lautet:

$$\mathbf{G}(D) = \big(1,\ G^{(2)}(D)\big)\,.$$

Der in der oberen Grafik dargestellte **Coder A** ist sicher nicht systematisch, da für diesen $G^{(1)}(D) \neq 1$ gilt. Zur Herleitung der Matrix $\mathbf{G}(D)$ verweisen wir auf ein **früheres Beispiel,** in dem für unseren Standard–Rate–1/2–Coder mit Gedächtnis $m = 2$ ermittelt wurde:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(D) &= \big(G^{(1)}(D),\ G^{(2)}(D)\big) = \\ &= \big(1 + D + D^2,\ 1 + D^2\big)\,.\end{aligned}$$

Der **Coder A** unterscheidet sich gegenüber diesem Beispiel nur durch Vertauschen der beiden Ausgänge.

Lautet die Übertragungsfunktionsmatrix eines Codes

$$\mathbf{G}(D) = \big(G^{(1)}(D),\ G^{(2)}(D)\big)\,,$$

so gilt für die äquivalente systematische Repräsentation dieses Rate–1/2–Faltungscodes allgemein:

$$\mathbf{G}_{\rm sys}(D) = \big(1,\ G^{(2)}(D)/G^{(1)}(D)\big)\,.$$

In der Teilaufgabe (c) ist zu prüfen, welcher der systematischen Anordnungen (entweder **Code B** oder **Code C** oder auch beide) äquivalent zum Code A ist.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die Thematik von **Kapitel 3.2.**

Fragebogen zu "A3.4: Systematische Faltungscodes"

a) Wie lautet die Übertragungsfunktionsmatrix von **Coder A**?

- ☐ $\mathbf{G}(D) = (1 + D^2,\quad 1 + D + D^2)$,
- ☐ $\mathbf{G}(D) = (1 + D + D^2,\quad 1 + D^2)$,
- ☐ $\mathbf{G}(D) = (1,\quad 1 + D + D^2)$.

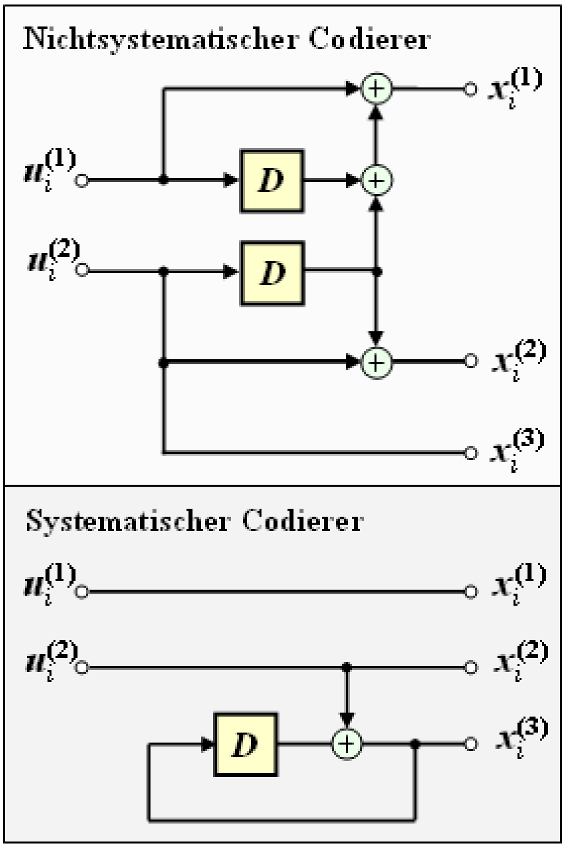
b) Wie lautet die äquivalente systematische Übertragungsfunktionsmatrix?

- ☐ $\mathbf{G}_{\rm sys}(D) = (1 + D + D^2,\quad 1 + D^2)$,
- ☐ $\mathbf{G}_{\rm sys}(D) = (1,\quad 1 + D + D^2)$,
- ☐ $\mathbf{G}_{\rm sys}(D) = (1,\quad (1 + D + D^2)/(1 + D^2))$.

c) Welcher Coder ist zu Coder A äquivalent und systematisch?

- ☐ **Coder B**,
- ☐ **Coder C**.

Z3.4: Äquivalente Faltungscodes?



Die obere Darstellung zeigt einen Faltungscodierer, der durch folgende Gleichungen beschrieben wird:

$$x_i^{(1)} = u_i^{(1)} + u_{i-1}^{(1)} + u_{i-1}^{(2)},$$
$$x_i^{(2)} = u_i^{(2)} + u_{i-1}^{(2)},$$
$$x_i^{(3)} = u_i^{(2)}.$$

Gesucht sind die Übertragungsfunktionsmatrizen

- **G**(D) dieses nichtsystematischen Codes, und
- $\mathbf{G}_{\rm sys}(D)$ des äquivalenten systematischen Codes.

Die Matrix $\mathbf{G}_{\rm sys}(D)$ erhält man in folgender Weise:

- Man spaltet von der $k \times n$–Matrix **G**(D) vorne eine quadratische Matrix **T**(D) mit jeweils k Zeilen und Spalten ab. Den Rest bezeichnet man mit **Q**(D).
- Anschließend berechnet man die zu **T**(D) inverse Matrix $\mathbf{T}^{-1}(D)$ und daraus die gesuchte Matrix für den äquivalenten systematischen Code:

$$\mathbf{G}_{\rm sys}(D) = \mathbf{T}^{-1}(D) \cdot \mathbf{G}(D).$$

- Da $\mathbf{T}^{-1}(D) \cdot \mathbf{T}(D)$ die $k \times k$–Einheitsmatrix $\mathbf{I}_k$ ergibt, kann die Übertragungsfunktionsmatrix des äquivalenten systematischen Codes in der gewünschten Form geschrieben werden:

$$\mathbf{G}_{\rm sys}(D) = \left[\,\mathbf{I}_k\,;\, \mathbf{P}(D)\right] \quad {\rm mit} \quad \mathbf{P}(D) = \mathbf{T}^{-1}(D) \cdot \mathbf{Q}(D).$$

Die untere Schaltung erzeugt mit Sicherheit einen systematischen Code mit gleichen Parametern k und n. In der Teilaufgabe (e) ist zu klären, ob es sich dabei tatsächlich um den *äquivalenten systematischen Code* handelt. Das heißt, ob sich tatsächlich für die beiden Schaltungen genau die gleiche Menge { $\underline{x}$ } an Codesequenzen ergibt, wenn man alle möglichen Informationssequenzen { $\underline{u}$ } berücksichtigt.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf ein Themengebiet aus **Kapitel 3.2.**

Fragebogen zu "Z3.4: Äquivalente Faltungscodes?"

a) Wie lauten die Parameter des oben dargestellten Codierers?

k =

n =

R =

m =

ν =

b) Welche Form hat die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(D)$?

- ☐ Die erste Zeile von $\mathbf{G}(D)$ lautet $(1+D,\ 0,\ 0)$.
- ☐ Die erste Zeile von $\mathbf{G}(D)$ lautet $(1+D^2,\ 0,\ D^2)$.
- ☐ Die zweite Zeile von $\mathbf{G}(D)$ lautet $(D,\ 1+D,\ 1)$.
- ☐ Die dritte Zeile von $\mathbf{G}(D)$ lautet $(D,\ 1+D,\ 1)$.

c) Geben Sie $\mathbf{T}(D)$ und $\mathbf{T}^{-1}(D)$ an. Wie lautet die Determinante?

- ☐ $\det \mathbf{T}(D) = 1$,
- ☐ $\det \mathbf{T}(D) = D$,
- ☐ $\det \mathbf{T}(D) = 1+D^2$.

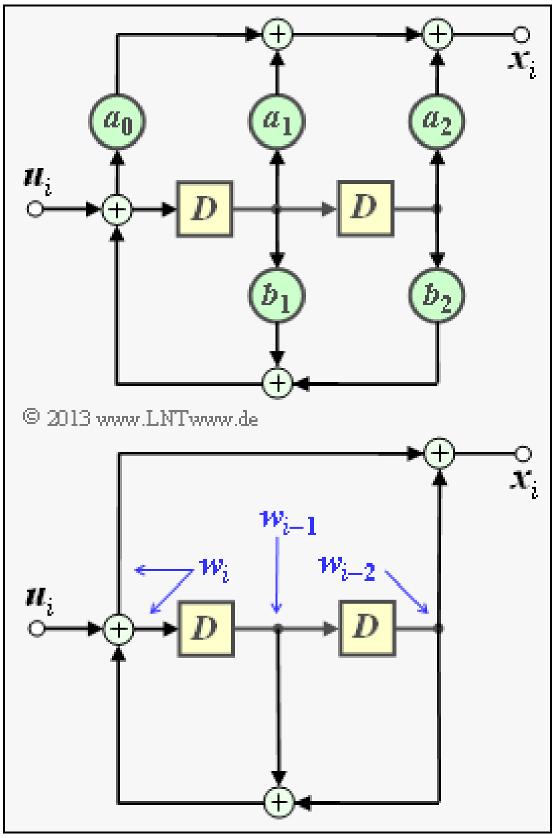
d) Was gilt für die äquivalente systematische Übertragungsfunktionsmatrix?

- ☐ Die erste Zeile von $\mathbf{G}_{\rm sys}(D)$ lautet $(1,\ 0,\ 0)$.
- ☐ Die zweite Zeile von $\mathbf{G}_{\rm sys}(D)$ lautet $(0,\ 1,\ 1+D)$.
- ☐ Die zweite Zeile von $\mathbf{G}_{\rm sys}(D)$ lautet $(0,\ 1,\ 1/(1+D))$.

e) Sind die beiden vorgegebenen Schaltungen tatsächlich äquivalent?

- ○ JA.
- ○ NEIN.

A3.5: Rekursive Filter für GF(2)



Die obere der beiden dargestellten Schaltungen zeigt ein rekursives Filter zweiter Ordnung in allgemeiner Form. Mit

$$A(D) = a_0 + a_1 \cdot D + a_2 \cdot D^2 \,,$$
$$B(D) = 1 + b_1 \cdot D + b_2 \cdot D^2$$

erhält man für die Übertragungsfunktion

$$G(D) = \frac{A(D)}{B(D)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot D + a_2 \cdot D^2}{1 + b_1 \cdot D + b_2 \cdot D^2}\,.$$

Zu beachten ist, dass sich alle Rechenoperationen auf GF(2) beziehen. Damit sind auch die Filterkoeffizienten a_0, a_1, a_2, b_1 und b_2 binär (entweder 0 oder 1).

Die untere Grafik zeigt das für die vorliegende Aufgabe spezifische Filter. Ein Filterkoeffizient ergibt sich zu $a_i = 1$, wenn die Verbindung durchgeschaltet ist $(0 \le i \le 2)$. Andernfalls ist $a_i = 0$. Die gleiche Systematik gilt für die Koeffizienten b_1 und b_2.

In den Teilaufgaben (a), ... , (c) sollen Sie für verschiedene Eingangssequenzen

- $\underline{u}$ = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...),
- $\underline{u}$ = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, ...),
- $\underline{u}$ = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ...)

die jeweilige Ausgangssequenz $\underline{x}$ anhand der vorgegebenen Schaltung ermitteln. Es ist zu berücksichtigen:

- Besteht die Eingangssequenz $\underline{u}$ aus einer Eins gefolgt von lauter Nullen, so bezeichnet man diese spezifische Ausgangssequenz $\underline{x}$ als die *Impulsantwort* $\underline{g}$, und es gilt:

  $$\underline{g} \;\circ\!\!\stackrel{D}{-\!\!\!-}\!\!\bullet\; G(D)\,.$$

- Andernfalls ergibt sich die Ausgangssequenz als das **Faltungsprodukt** zwischen Eingangssequenz und Impulsantwort:

  $$\underline{x} = \underline{u} * \underline{g}\,.$$

- Die Faltungsoperation lässt sich mit dem Umweg über die ***D*–Transformation** umgehen.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die **letzte Seite** von Kapitel 3.2.

Fragebogen zu "A3.5: Rekursive Filter für GF(2)"

a) Welche Aussagen gelten für die Impulsantwort $\underline{g}$ des rekursiven Filters?

- [ ] Es gilt $\underline{g} = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, ...)$.
- [ ] Es gilt $\underline{g} = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, ...)$.
- [ ] Die Impulsantwort $\underline{g}$ ist unendlich weit ausgedehnt.

b) Es sei nun $\underline{u} = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$. Welche Aussagen treffen zu?

- [ ] Die Ausgangssequenz lautet: $\underline{x} = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, ...)$.
- [ ] Die Ausgangssequenz lautet: $\underline{x} = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, ...)$.
- [ ] Die Ausgangssequenz $\underline{x}$ reicht bis ins Unendliche.

c) Nun gelte $\underline{u} = (1, 1, 1)$. Welche Aussagen treffen zu?

- [ ] Die Ausgangssequenz $\underline{x}$ beginnt mit $(1, 0, 1)$.
- [ ] Die Ausgangssequenz $\underline{x}$ beginnt mit $(1, 1, 1)$.
- [ ] Die Ausgangssequenz $\underline{x}$ reicht bis ins Unendliche.

d) Welche Aussagen gelten für die Übertragungsfunktion $G(D)$?

- [ ] Es gilt $G(D) = (1 + D^2)/(1 + D + D^2)$.
- [ ] Es gilt $G(D) = (1 + D + D^2)/(1 + D^2)$.
- [ ] Es gilt $G(D) = 1 + D + D^2 + D^4 + D^5 + D^7 + D^8 + \ldots$.