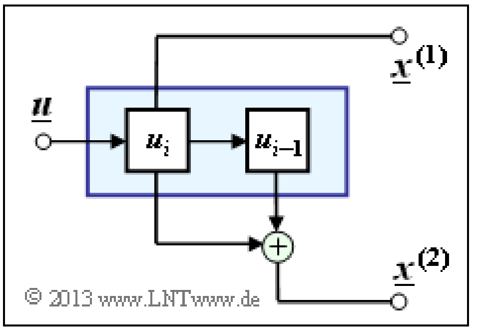
A3.6: Zustandsübergangsdiagramm



Eine Beschreibungsmöglichkeit für Faltungscodierer bietet das so genannte *Zustandsübergangsdiagramm*. Beinhaltet der Coder m Speicherregister ⇒ Einflusslänge $\nu = m + 1$, so gibt es nach der aktuellen Speicherbelegung verschiedene Zustände S_μ mit $0 \le \mu \le 2^m–1$, wobei für den Index gilt:

$$\mu = \sum_{l=1}^{m} 2^{l-1} \cdot u_{i-l}\,.$$

Diese Art der Coderbeschreibung soll auf den oben skizzierten Faltungscodierer der Rate $R = 1/2$ angewendet werden.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 3.3.**

Fragebogen zu "A3.6: Zustandsübergangsdiagramm"

a) Wieviele Zustände weist dieser Faltungscodierer auf?

Anzahl der Zustände =

b) Kommt man von jedem Zustand zu allen anderen Zuständen?

- Ja.
- Nein.

c) Welche Aussagen gelten für den Übergang von $s_i = S_1$ zu $s_{i+1} = S_0$?

- Das aktuelle Informationsbit muss $u_i = 0$ sein.
- Das aktuelle Informationsbit muss $u_i = 1$ sein.
- Die zugehörige Codesequenz lautet $\underline{x}_i = (01)$.
- Die zugehörige Codesequenz lautet $\underline{x}_i = (10)$.

d) Welche Aussagen gelten für den Übergang von $s_i = S_1$ zu $s_{i+1} = S_1$?

- Das aktuelle Informationsbit muss $u_i = 0$ sein.
- Das aktuelle Informationsbit muss $u_i = 1$ sein.
- Die zugehörige Codesequenz lautet $\underline{x}_i = (01)$.
- Die zugehörige Codesequenz lautet $\underline{x}_i = (10)$.

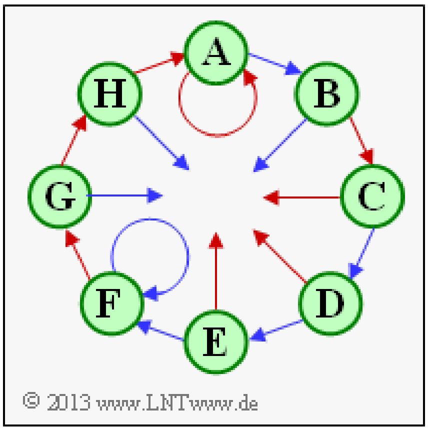
e) Welche Informationssequenzen sind möglich?

- $\underline{u} = (1, 1, 0, 0, 1, 1, ...)$,
- $\underline{u} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, ...)$.

f) Welche Codesequenzen sind möglich?

- $\underline{x} = (11, 10, 01, 00, 11, 10, ...)$,
- $\underline{x} = (11, 00, 10, 01, 11, 00, ...)$.

Z3.6: Übergangsdiagramm für m = 3



Im Zustandsübergangsdiagramm eines Codierers mit Gedächtnis m gibt es 2^m Zustände. Das dargestellte Diagramm mit acht Zuständen beschreibt deshalb einen Faltungscoder mit dem Gedächtnis $m = 3$.

Normalerweise bezeichnet man die Zustände mit S_0, ... , S_μ, ... , S_7, wobei der Index μ aus der Belegung des Schieberegisters (Inhalt von links nach rechts: u_{i-1}, u_{i-2}, u_{i-3}) festgelegt ist:

$$\mu = \sum_{l=1}^{m} 2^{l-1} \cdot u_{i-l} \,.$$

Der Zustand S_0 ergibt sich deshalb für den Schieberegisterinhalt „000”, der Zustand S_1 für „100” und der Zustand S_7 für „111”.

In obiger Grafik sind allerdings für die Zustände S_0, ... , S_7 Platzhalter namens **A**, ... , **H** verwendet. In den Teilaufgaben (a) und (b) sollen Sie klären, welcher Platzhalter für welchen Zustand steht.

Bei Faltungscodierer der Rate $1/n$, die hier ausschließlich betrachtet werden sollen, gehen von jedem Zustand S_μ zwei Pfeile ab, ein roter für das aktuelle Informationsbit $u_i = 0$ und ein blauer für $u_i = 1$. Auch deshalb ist das gezeigte Zustandsübergangsdiagramm nicht vollständig.

Zu erwähnen ist weiterhin:

- Bei jedem Zustand kommen auch zwei Pfeile an, wobei diese durchaus gleichfarbig sein können.
- Neben den Pfeilen stehen üblicherweise noch die n Codebits. Auch hierauf wurde hier verzichtet.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die beiden ersten Seiten von **Kapitel 3.3.** In der **Aufgabe Z3.7** werden zwei Faltungscodes mit Gedächtnis $m = 3$ untersucht, die beide durch das hier analysierte Zustandsübergangsdiagramm beschrieben werden können.

Fragebogen zu "Z3.6: Übergangsdiagramm für m = 3"

a) Für welche Zustände S_μ stehen die Platzhalter **A** und **F**? ⇒ Index eingeben.

Zustand A ⇒ Index μ =

Zustand F ⇒ Index μ =

b) Nennen Sie auch die Zuordnungen der anderen Platzhalter zu den Indizes.

Zustand B ⇒ Index μ =

Zustand C ⇒ Index μ =

Zustand D ⇒ Index μ =

Zustand E ⇒ Index μ =

Zustand G ⇒ Index μ =

Zustand H ⇒ Index μ =

c) Zu welchem Zustand S_μ geht der jeweils zweite Pfeil? ⇒ Index eingeben.

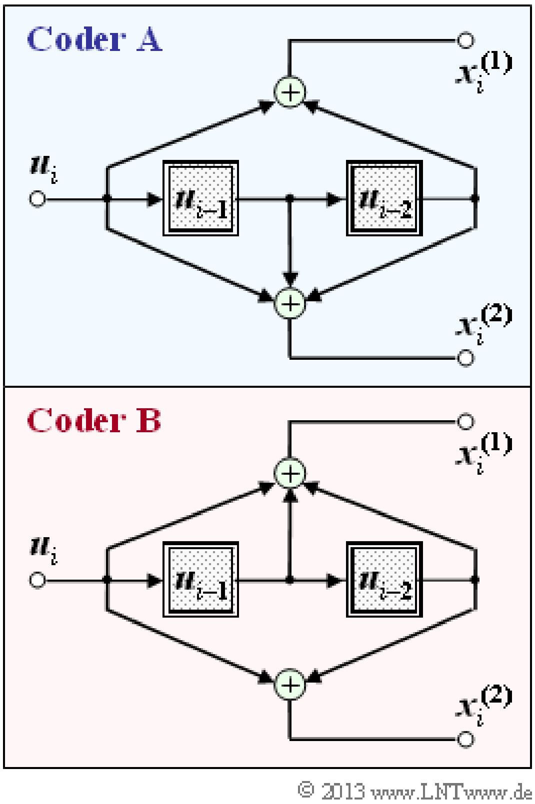
Von S_1 zum Zustand mit Index μ =

Von S_3 zum Zustand mit Index μ =

Von S_5 zum Zustand mit Index μ =

Von S_7 zum Zustand mit Index μ =

A3.7: Vergleich zweier Faltungscoder



Die Grafik zeigt zwei Rate–1/2–Faltungscodierer, jeweils mit dem Gedächtnis $m = 2$:

- Der **Coder A** weist die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(D) = (1 + D^2, 1 + D + D^2)$ auf.
- Beim **Coder B** sind die beiden Filter vertauscht, und es gilt: $\mathbf{G}(D) = (1 + D + D^2, 1 + D^2)$.

Der untere Coder wurde im **Theorieteil** schon ausführlich behandelt. In der vorliegenden Aufgabe sollen Sie zunächst das Zustandsübergangsdiagramm für Coder A ermitteln und anschließend die Unterschiede und die Gemeinsamkeiten zwischen den beiden Diagrammen herausarbeiten.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die ersten Seiten von **Kapitel 3.3.**

Fragebogen zu "A3.7: Vergleich zweier Faltungscoder"

a) Es gelte $\underline{u}$ = (0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, ...). Welche Sequenzen erzeugt Coder A?

- ☐ $\underline{x}^{(1)}$ = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, ...),
- ☐ $\underline{x}^{(1)}$ = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, ...),
- ☐ $\underline{x}^{(2)}$ = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, ...),
- ☐ $\underline{x}^{(2)}$ = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, ...).

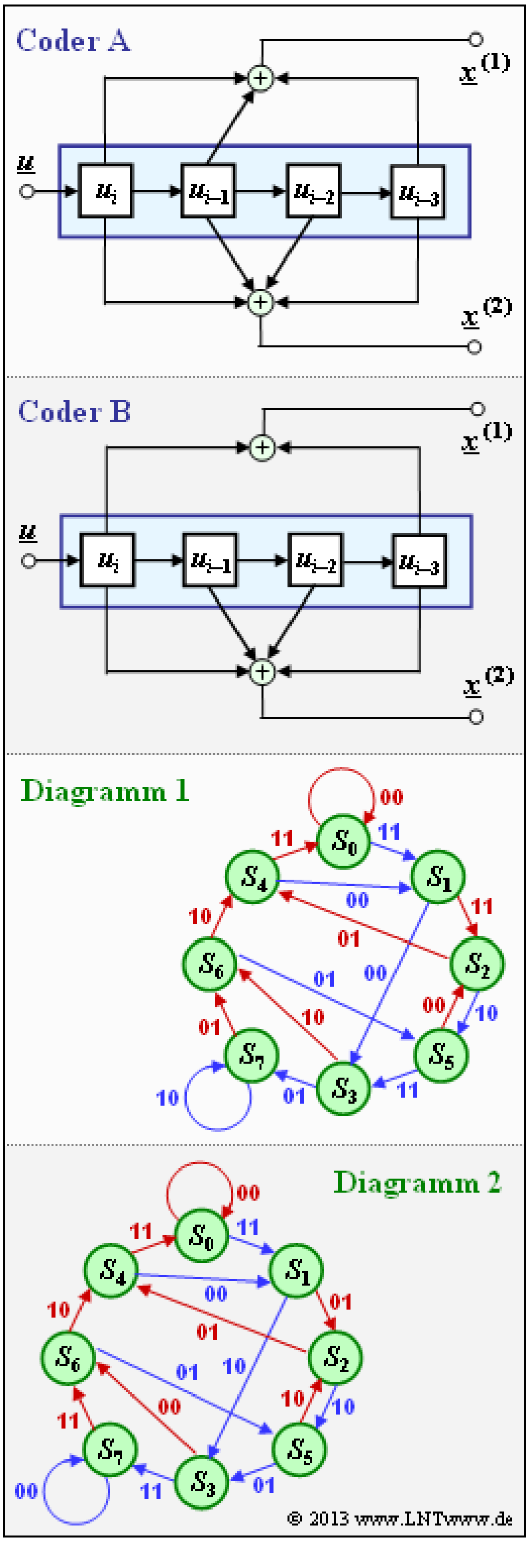
b) Welche der genannten Zustandsübergänge gibt es bei Coder A?

- ☐ $s_i = S_0, u_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} = S_0$; $s_i = S_0, u_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} = S_1$.
- ☐ $s_i = S_1, u_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} = S_2$; $s_i = S_1, u_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} = S_3$.
- ☐ $s_i = S_2, u_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} = S_0$; $s_i = S_2, u_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} = S_1$.
- ☐ $s_i = S_3, u_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} = S_2$; $s_i = S_3, u_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} = S_3$.

c) Wie unterscheiden sich die beiden Zustandsübergangsdiagramme?

- ☐ Es sind andere Zustandsübergänge möglich.
- ☐ Bei allen acht Übergängen stehen andere Codesequenzen.
- ☐ Unterschiede gibt es nur für die Codesequenzen (01) und (10).

Z3.7: Welcher Code ist katastrophal ?



Die nebenstehende Grafik zeigt

- zwei unterschiedliche **Coder A** und **Coder B**, jeweils mit dem Gedächtnis $m = 3$ (oben),
- zwei Zustandsübergangsdiagramme, bezeichnet mit **Diagramm 1** und **Diagramm 2** (unten).

In der letzten Teilaufgabe sollen Sie entscheiden, welches Diagramm zum Coder A gehört und welches zum Coder B.

Zunächst werden die drei Übertragungsfunktionen

- $\mathrm{G}(D) = 1 + D + D^2 + D^3$,
- $\mathrm{G}(D) = 1 + D^3$, und
- $\mathrm{G}(D) = 1 + D + D^3$

analysiert und anschließend die Ausgangssequenzen $\underline{x}$ unter der Voraussetzung

$$\underline{u} = \underline{1} = (1, 1, 1, \ldots) \quad \circ\!\!-\!\!\!\overset{D}{-}\!\!\!-\!\!\bullet \quad U(D) = \frac{1}{1+D}$$

berechnet. Diese Übertragungsfunktionen stehen in direktem Zusammenhang mit den skizzierten Codierern.

Desweiteren ist noch zu klären, welcher der beiden Codes *katastrophal* ist. Von einem solchen spricht man, wenn eine endliche Anzahl von Übertragungsfehlern zu unendlich vielen Decodierfehlern führt.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 3.3.** Angegeben werden noch zwei Polynomprodukte in GF(2):

$$(1 + D) \cdot (1 + D^2) = 1 + D + D^2 + D^3\,,$$
$$(1 + D) \cdot (1 + D + D^2) = 1 + D^3\,.$$

Fragebogen zu "Z3.7: Welcher Code ist katastrophal ?"

a) Welche Ausgangssequenz $\underline{x}$ ergibt sich für $\underline{u} = \underline{1}$, $G(D) = 1 + D + D^2 + D^3$?

- ☐ $\underline{x} = (1, 0, 0, 1, 1, 1, ...)$,
- ☐ $\underline{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, ...)$,
- ☐ $\underline{x} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, ...)$.
- ☐ Die Ausgangsfolge $\underline{x}$ ist zeitlich begrenzt.

b) Welche Ausgangssequenz $\underline{x}$ ergibt sich für $\underline{u} = \underline{1}$ und $G(D) = 1 + D^3$?

- ☐ $\underline{x} = (1, 0, 0, 1, 1, 1, ...)$,
- ☐ $\underline{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, ...)$,
- ☐ $\underline{x} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, ...)$.
- ☐ Die Ausgangsfolge $\underline{x}$ ist zeitlich begrenzt.

c) Welche Ausgangssequenz $\underline{x}$ ergibt sich für $\underline{u} = \underline{1}$ und $G(D) = 1 + D + D^3$?

- ☐ $\underline{x} = (1, 0, 0, 1, 1, 1, ...)$,
- ☐ $\underline{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, ...)$,
- ☐ $\underline{x} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, ...)$.
- ☐ Die Ausgangsfolge $\underline{x}$ ist zeitlich begrenzt.

d) Wie lautet die Codesequenz $\underline{x}$ von **Coder A** für die Eins–Sequenz am Eingang?

- ☐ $\underline{x} = (11, 00, 01, 10, 10, 10, ...)$,
- ☐ $\underline{x} = (11, 10, 11, 00, 00, 00, ...)$,
- ☐ $\underline{x} = (11, 11, 11, 11, 11, 11, ...)$.
- ☐ Die Codesequenz $\underline{x}$ beinhaltet endlich viele Einsen.

e) Wie lautet die Codesequenz $\underline{x}$ von **Coder B** für die Eins–Sequenz am Eingang?

- ☐ $\underline{x} = (11, 00, 01, 10, 10, 10, ...)$,
- ☐ $\underline{x} = (11, 10, 11, 00, 00, 00, ...)$,
- ☐ $\underline{x} = (11, 11, 11, 11, 11, 11, ...)$.
- ☐ Die Codesequenz $\underline{x}$ beinhaltet endlich viele Einsen.

f) Welche Aussagen treffen für **Coder B** zu?

- ☐ Zu Coder B gehört das Zustandsübergangsdiagramm 1.

- [ ] Zu Coder B gehört das Zustandsübergangsdiagramm 2.
- [ ] Der Coder B ist katastrophal.

A3.8: RCPC–Codes

Eine wichtige Anwendung für **punktierte Faltungscodes** sind die *Rate Compatible Punctured Convolutional Codes* (oder kurz RCPC–Codes), die 1988 von Joachim Hagenauer vorgeschlagen wurden **[Hag88].** Ausgehend von einem Muttercode C_0 mit der Rate $R_0 = 1/n$ werden durch verschiedene Punktierungsmatrizen $\mathbf{P}_l$ andere Codes C_l mit höherer Coderate $R_l > R_0$ festgelegt.

Rechts sind die zu analysierenden Punktierungsmatrizen $\mathbf{P}_0$, ... , $\mathbf{P}_4$ dargestellt. Ist bei der Matrix $\mathbf{P}_l$ das Matrixelement $P_{ij} = 1$, so wird das entsprechende Codebit übertragen, während $P_{ij} = 0$ auf eine Punktierung hinweist. Im Fragebogen verwenden wir für das Element P_{ij} der Matrix $\mathbf{P}_l$ auch die kürzere Schreibweise $P_{ij}^{(l)}$.

In der obigen Darstellung sind alle die Nullen in der Matrix $\mathbf{P}_l$ rot markiert, die in der Matrix $\mathbf{P}_{l-1}$ noch Einsen waren. Durch diese Maßnahme wird die Coderate R_{l-1} gegenüber R_l vergrößert.

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Die RCPC–Codes eignen sich gut zur Realisierung von

- *ungleichem Fehlerschutz* für hybride ARQ–Verfahren,
- Systemen mit *inkrementeller Redundanz*.

Unter Letzterem versteht man, dass nach der herkömmlichen Faltungscodierung aus dem Codewort $\underline{x}^{(0)}$ entsprechend der Punktierungsmatrix $\mathbf{P}_l$ Bits weggelassen werden und das verkürzte Codewort $\underline{x}^{(l)}$ übertragen wird. Kann das punktierte Codewort im Empfänger nicht korrekt decodiert werden, fordert der Empfänger vom Sender weitere Redundanz in Form der zuvor auspunktierten Bits an. Somit wird die Übertragung von nicht benötigter Redundanz verhindert und der Durchsatz an die Kanalgegebenheiten angepasst.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die **letzte Seite** von Kapitel 3.5. Die RCPC–Codes wurden 1988 von **Joachim Hagenauer** erfunden, von 1993 bis 2006 Leiter des Lehrstuhls für Nachrichtentechnik (LNT) der Technischen Universität München. Die Verantwortlichen des von Ihnen gerade genutzten Lerntutorials – Günter Söder und Klaus Eichin – danken ihrem langjährigen Chef für die Unterstützung und Förderung unseres LNTwww–Projekts während der ersten Jahre.

Fragebogen zu "A3.8: RCPC–Codes"

a) Welche Aussagen liefern die vorgegeben Punktierungsmatrizen?

- [ ] Die Rate des RCPC–Muttercodes ist $R_0 = 1/3$.
- [ ] Die Punktierungsperiode ist $p = 8$.
- [ ] Das Gedächtnis der RCPC–Codeklasse ist $M = 4$.

b) Welche Coderaten weisen die Codes C_1, ..., C_4 auf?

Matrix $\mathbf{P_1}$ ⇒ Code $\boldsymbol{C_1}$: $\boldsymbol{R_1}$ =

Matrix $\mathbf{P_2}$ ⇒ Code $\boldsymbol{C_2}$: $\boldsymbol{R_2}$ =

Matrix $\mathbf{P_3}$ ⇒ Code $\boldsymbol{C_3}$: $\boldsymbol{R_3}$ =

Matrix $\mathbf{P_4}$ ⇒ Code $\boldsymbol{C_4}$: $\boldsymbol{R_4}$ =

c) Welche Aussagen gelten für die Matrixelemente $P_{ij}^{(l)}$?

- [ ] Aus $P_{ij}^{(l)} = 1$ folgt $P_{ij}^{(\lambda)} = 1$ für alle $\lambda < l$.
- [ ] Aus $P_{ij}^{(l)} = 1$ folgt $P_{ij}^{(\lambda)} = 1$ für alle $\lambda > l$.
- [ ] Aus $P_{ij}^{(l)} = 0$ folgt $P_{ij}^{(\lambda)} = 0$ für alle $\lambda < l$.
- [ ] Aus $P_{ij}^{(l)} = 0$ folgt $P_{ij}^{(\lambda)} = 0$ für alle $\lambda > l$.