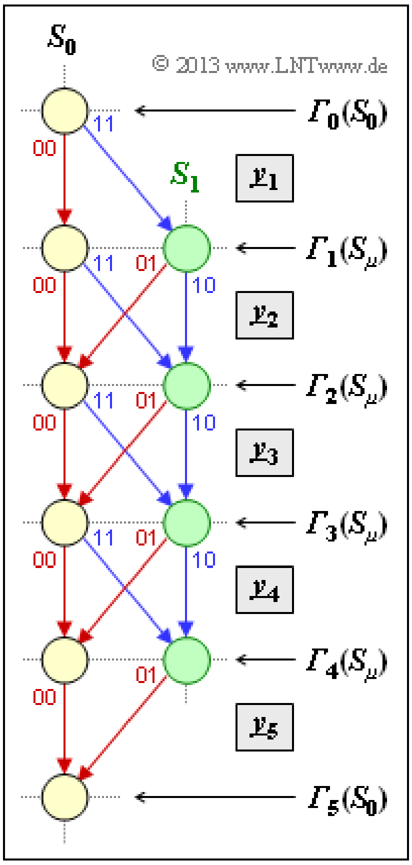
A3.9: Viterbi–Algorithmus: Grundlegendes



Die Grafik zeigt ein Trellisdiagramm und definiert gleichzeitig die Fehlergrößen $\Gamma_i(S_0)$ und $\Gamma_i(S_1)$ zu den Zeitpunkten i = 0 bis i = 5.

Aus diesem Trellis können zum Beispiel abgelesen werden:

- die Coderate R,
- das Gedächtnis m,
- die freie Distanz d_F,
- die Informationssequenzlänge L,
- die Sequenzlänge L' inklusive der Terminierung.

In der Aufgabe ist weiter zu klären:

- die Bedeutung des Endwertes $\Gamma_5(S_0)$,
- Auswirkungen von einem bzw. zwei Übertragungsfehlern.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 3.4.**

Fragebogen zu "A3.9: Viterbi–Algorithmus: Grundlegendes"

a) Welche der folgenden Aussagen werden durch das Trellis bestätigt?

- ☐ Es handelt sich um einen Rate–1/2–Faltungscode.
- ☐ Das Gedächtnis des Codes ist $m = 2$.
- ☐ Der Faltungscode ist terminiert.
- ☐ Die Länge der Informationssequenz ist $L = 5$.

b) Geben Sie die freie Distanz $d_{\rm F}$ des Faltungscodes an.

$\boldsymbol{d_{\rm F}}$ =

c) Welche Aussagen erlaubt der Endwert $\Gamma_5(S_0) = 0$ der Fehlergröße?

- ☐ Es ist kein Übertragungsfehler aufgetreten.
- ☐ Das Decodierergebnis $\underline{v}$ ist mit Sicherheit richtig (gleich $\underline{u}$).
- ☐ Das Decodierergebnis minimiert die Wahrscheinlichkeit $\Pr(\underline{v} \ne \underline{u}.)$.

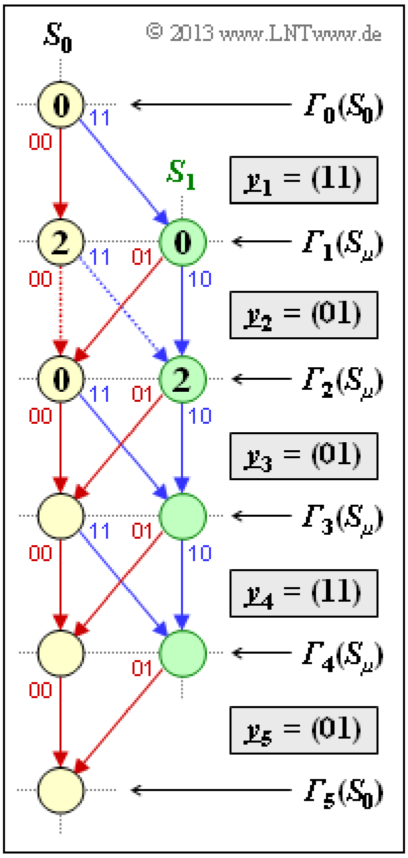
d) Welche Aussagen treffen <u>bei einem einzigen</u> Übertragungsfehler zu?

- ☐ Der Fehlergrößenendwert ist $\Gamma_5(S_0) = 1$.
- ☐ Das Decodierergebnis $\underline{v}$ ist mit Sicherheit richtig (gleich $\underline{u}$).
- ☐ Das Decodierergebnis minimiert die Wahrscheinlichkeit $\Pr(\underline{v} \ne \underline{u}.)$.

e) Welche Aussagen treffen <u>bei zwei</u> Übertragungsfehlern zu?

- ☐ Der Fehlergrößenendwert ist $\Gamma_5(S_0) = 2$.
- ☐ Das Decodierergebnis $\underline{v}$ ist mit Sicherheit richtig (gleich $\underline{u}$).
- ☐ Das Decodierergebnis $\underline{v}$ ist mit Sicherheit falsch (ungleich $\underline{u}$).

Z3.9: Nochmals Viterbi–Algorithmus



Die Grafik zeigt das Trellisdiagramm des Faltungscodes entsprechend **Aufgabe A3.6,** gekennzeichnet durch folgende Größen:

- Rate 1/2 $\Rightarrow$ $k = 1$, $n = 2$,
- Gedächtnis $m = 1$,
- Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(D) = (1, 1 + D)$,
- Länge der Informationssequenz: $L = 4$,
- Sequenzlänge inclusive Terminierung: $L' = L + m = 5$.

Anhand dieser Darstellung soll die Viterbi–Decodierung schrittweise nachvollzogen werde, wobei von der folgenden Empfangssequenz auszugehen ist: $\underline{y} = (11, 01, 01, 11, 01)$.

In das Trellis eingezeichnet sind:

- Der Initialwert $\Gamma_0(S_0)$ für den Viterbi–Algorithmus wird stets zu 0 gewählt.
- Die beiden Fehlergrößen für den ersten Decodierschritt ($i = 1$) erhält man mit $\underline{y}_1 = (11)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(S_0) &= \Gamma_0(S_0) + d_{\rm H}\big((00)\,,\,(11)\big) = 2\,,\\ \Gamma_1(S_1) &= \Gamma_0(S_0) + d_{\rm H}\big((11)\,,\,(11)\big) = 0\,.\end{aligned}$$

- Die Fehlergrößen zum Schritt $i = 2$ $\Rightarrow$ $\underline{y}_2 = (01)$ ergeben sich durch folgende Vergleiche:

$$\begin{aligned}\Gamma_2(S_0) &= {\rm min}\left[\Gamma_1(S_0) + d_{\rm H}\big((00)\,,\,(01)\big)\,,\;\; \Gamma_1(S_1) + d_{\rm H}\big((01)\,,\,(01)\big)\right] =\\ &= {\rm min}\left[2+1\,,\,0+0\right] = 0\,,\\ \Gamma_2(S_1) &= {\rm min}\left[\Gamma_1(S_0) + d_{\rm H}\big((11)\,,\,(01)\big)\,,\;\; \Gamma_1(S_1) + d_{\rm H}\big((10)\,,\,(01)\big)\right] =\\ &= {\rm min}\left[2+1\,,\,0+2\right] = 2\,.\end{aligned}$$

In gleicher Weise sollen Sie

- die Fehlergrößen zu den Zeitpunkten $i = 3$, $i = 4$ und $i = 5$ (Terminierung) berechnen, und
- die jeweils ungünstigeren Wege zu einem Knoten $\Gamma_i(S_\mu)$ eliminieren. In der Grafik ist dies für $i = 2$ durch punktierte Linien angedeutet.

Anschließend ist der durchgehende Pfad von $\Gamma_0(S_0)$ bis $\Gamma_5(S_0)$ zu finden, wobei die Rückwärtsrichtung zu empfehlen ist. Verfolgt man den gefundenen Pfad in Vorwärtsrichtung, so erkennt man

- die wahrscheinlichste Codesequenz $\underline{z}$ (im Idealfall gleich $\underline{x}$) an den Beschriftungen,
- die wahrscheinlichste Informationssequenz $\underline{v}$ (im Idealfall gleich $\underline{u}$) an den Farben.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 3.4.**

Fragebogen zu "Z3.9: Nochmals Viterbi–Algorithmus"

a) Berechnen Sie die minimalen Fehlergrößen für den Zeitpunkt i = 3.

$\mathit{\Gamma}_3(S_0)$ =

$\mathit{\Gamma}_3(S_1)$ =

b) Berechnen Sie die minimalen Fehlergrößen für den Zeitpunkt i = 4.

$\mathit{\Gamma}_4(S_0)$ =

$\mathit{\Gamma}_4(S_1)$ =

c) Berechnen Sie die minimale Fehlergröße für den Zeitpunkt i = 5 (Ende).

$\mathit{\Gamma}_5(S_0)$ =

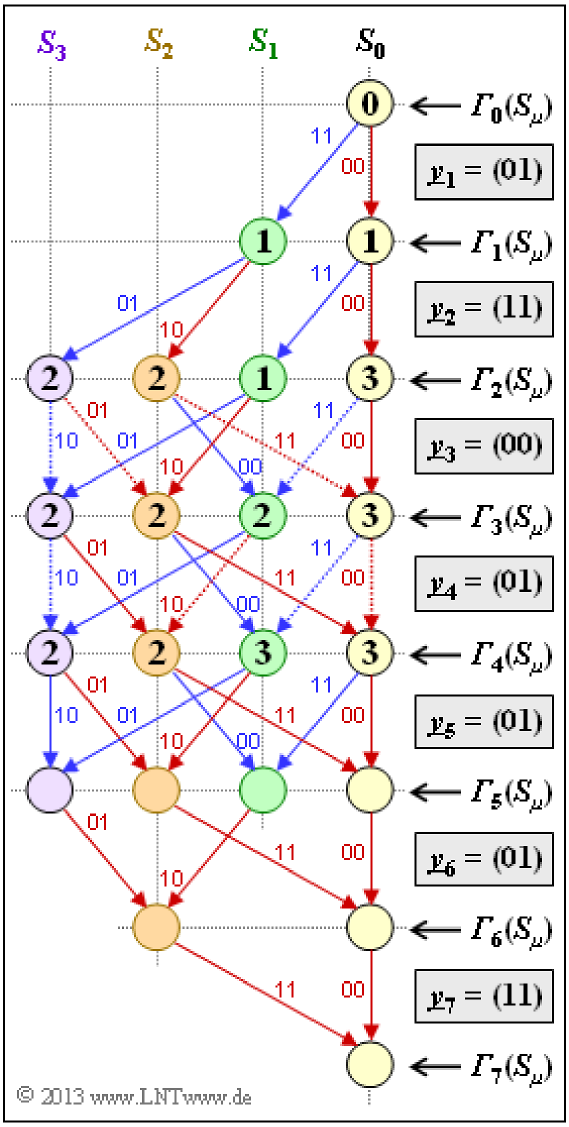
d) Welche endgültigen Ergebnisse liefert der Viterbi–Algorithmus:

- ☐ $\underline{z}$ = (11, 01, 00, 11, 01).
- ☐ $\underline{z}$ = (11, 01, 11, 01, 00).
- ☐ $\underline{v}$ = (1, 0, 0, 1, 0).
- ☐ $\underline{v}$ = (1, 0, 1, 0, 0).

e) Welche Entscheidung wäre ohne Terminierung getroffen worden?

- ○ Die gleiche,
- ○ eine andere.

A3.10: Fehlergrößenberechnung



Im **Theorieteil** zu diesem Kapitel wurde die Berechnung der Fehlergrößen $\Gamma_i(S_\mu)$ ausführlich behandelt, die auf der Hamming–Distanz $d_{\rm H}(\underline{x}', \underline{y}_i)$ zwischen den möglichen Codeworten $\underline{x}' \in \{00, 01, 10, 11\}$ und den zu dem Zeitpunkt i empfangenen 2–Bit–Worten $\underline{y}_i$ basiert.

Die Aufgabe beschäftigt sich genau mit dieser Thematik. In nebenstehender Grafik

- ist das betrachtete Trellis dargestellt – gültig für den Code mit Rate R = 1/2, Gedächtnis m = 2 sowie $\mathbf{G}(D) = (1 + D + D^2, 1 + D^2)$,
- sind die Empfangsworte $\underline{y}_1$ = (01), ... , $\underline{y}_7$ = (11) in den Rechtecken angegeben,
- sind bereits alle Fehlergrößen $\Gamma_0(S_\mu)$, ... , $\Gamma_4(S_\mu)$ eingetragen.

Beispielsweise ergibt sich die Fehlergröße $\Gamma_4(S_0)$ mit $\underline{y}_4$ = (01) als das Minimum der beiden Vergleichswerte

- $\Gamma_3(S_0) + d_{\rm H}((00), (01)) = 3 + 1 = 4$, und
- $\Gamma_3(S_2) + d_{\rm H}((11), (01)) = 2 + 1 = 3$.

Der überlebende Zweig – hier von $\Gamma_3(S_2)$ nach $\Gamma_4(S_0)$ – ist durchgezogen gezeichnet, der eliminierte Zweig von $\Gamma_3(S_0)$ nach $\Gamma_4(S_0)$ punktiert. Rote Pfeile stehen für das Informationsbit $u_i = 0$, blaue Pfeile für $u_i = 1$.

In der Teilaufgabe (d) soll der Zusammenhang zwischen $\Gamma_i(S_\mu)$–Minimierung und $\Lambda_i(S_\mu)$–Maximierung herausgearbeitet werden. Hierbei bezeichnet man die Knoten $\Lambda_i(S_\mu)$ als *Metriken*, wobei sich der Metrikzuwachs gegenüber den Vorgängerknoten aus dem Korrelationswert $\langle \underline{x}_i', \underline{y}_i \rangle$ ergibt. Näheres zu dieser Thematik finden Sie auf den folgenden Theorieseiten:

- **Zusammenhang zwischen Hamming–Distanz und Korrelation,**
- **Viterbi–Algorithmus, basierend auf Korrelation und Metriken (1),**
- **Viterbi–Algorithmus, basierend auf Korrelation und Metriken (2).**

Hinweis Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 3.4.** Vorerst nicht betrachtet wird die Suche der überlebenden Pfade. Damit beschäftigt sich für das gleiche Beispiel die nachfolgende **Aufgabe A3.11.**

Fragebogen zu "A3.10: Fehlergrößenberechnung"

a) Wie lauten die Fehlergrößen für den Zeitpunkt $i = 5$?

$\Gamma_5(S_0)$ =

$\Gamma_5(S_1)$ =

$\Gamma_5(S_2)$ =

$\Gamma_5(S_3)$ =

b) Wie lauten die Fehlergrößen für den Zeitpunkt $i = 6$?

$\Gamma_6(S_0)$ =

$\Gamma_6(S_2)$ =

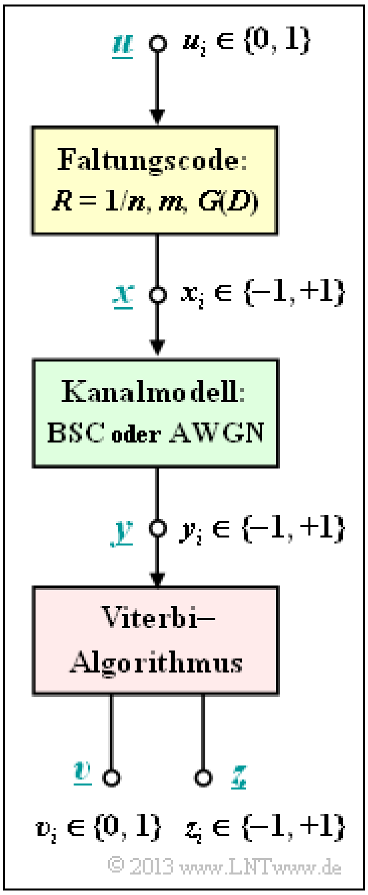
c) Welcher Endwert ergibt sich bei diesem Trellis, basierend auf $\Gamma_i(S_\mu)$?

- ☐ Es gilt $\Gamma_7(S_0) = 3$.
- ☐ Der Endwert lässt auf eine fehlerfreie Übertragung schließen.
- ☐ Der Endwert lässt auf drei Übertragungsfehler schließen.

d) Welche Aussagen sind für die $\Lambda_i(S_\mu)$–Auswertung zutreffend?

- ☐ Die Metriken $\Lambda_i(S_\mu)$ liefern gleiche Informationen wie $\Gamma_i(S_\mu)$.
- ☐ Für alle Knoten gilt $\Lambda_i(S_\mu) = 2 \cdot [i - \Gamma_i(S_\mu)]$.
- ☐ Für die Metrikzuwächse gilt $\langle \underline{x}_i', \underline{y}_i \rangle$ ∈ $\{0, 1, 2\}$.

Z3.10: ML–Decodierung von Faltungscodes



Der Viterbi–Algorithmus stellt die bekannteste Realisierungsform für die Maximum–Likelihood–Decodierung eines Faltungscodes dar. Wir gehen hier von folgendem Modell aus:

- Die Informationssequenz $\underline{u}$ wird durch einen Faltungscode in die Codesequenz $\underline{x}$ umgesetzt. Es gelte $u_i \in \{0, 1\}$. Dagegen werden die Codesymbole bipolar dargestellt: $x_i \in \{-1, +1\}$.
- Der Kanal sei durch das **BSC–Modell** gegeben $\Rightarrow y_i \in \{-1, +1\}$ oder es wird der **AWGN–Kanal** vorausgesetzt $\Rightarrow$ reellwertige y_i.
- Bei gegebener Empfangssequenz $\underline{y}$ entscheidet sich der Viterbi–Algorithmus für die Codesequenz $\underline{z}$ entsprechend

$$\underline{z} = \arg \max_{\underline{x}_i \in \mathcal{C}} \Pr(\underline{x}_i \,|\, \underline{y}) \,.$$

Dies entspricht dem **Maximum–a–posteriori** (MAP)–Kriterium. Sind die Informationssequenzen $\underline{u}$ gleichwahrscheinlich, so geht dieses in das etwas einfachere **Maximum–Likelihood–Kriterium** über:

$$\underline{z} = \arg \max_{\underline{x}_i \in \mathcal{C}} \Pr(\underline{y} \,|\, \underline{x}_i) \,.$$

Als weiteres Ergebnis gibt der Viterbi–Algorithmus zusätzlich die Sequenz $\underline{v}$ als Schätzung für die Informationssequenz $\underline{u}$ aus.

In dieser Aufgabe soll der Zusammenhang zwischen der **Hamming–Distanz** $d_{\rm H}(\underline{x}, \underline{y})$ sowie der **Euklidischen Distanz**

$$d_{\rm E}(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{L} (x_i - y_i)^2}$$

ermittelt werden. Anschließend ist das obige ML–Kriterium mit

- der Hamming–Distanz $d_{\rm H}(\underline{x}, \underline{y})$,
- der Euklidischen Distanz $d_{\rm E}(\underline{x}, \underline{y})$, und
- dem **Korrelationswert** $\langle x \cdot y \rangle$ zu formulieren.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf die **Theorieseite 6** von Kapitel 3.4. Zur Vereinfachung wird auf Tilden und Apostroph verzichtet.

Weitere Informationen zu diesem Thema finden Sie auf den folgenden Seiten dieses Buches:

- **MAP– und ML–Kriterium,**
- **ML–Entscheidung beim BSC–Kanal,**
- **ML–Entscheidung beim AWGN–Kanal,**
- **Decodierung linearer Blockcodes – Seite 1.**

Fragebogen zu "Z3.10: ML–Decodierung von Faltungscodes"

a) Wie hängen $d_H(\underline{x}, \underline{y})$ und $d_E(\underline{x}, \underline{y})$ beim BSC–Modell zusammen?

- ☐ Es gilt $d_H(\underline{x}, \underline{y}) = d_E(\underline{x}, \underline{y})$.
- ☐ Es gilt $d_H(\underline{x}, \underline{y}) = d_E^2(\underline{x}, \underline{y})$.
- ☐ Es gilt $d_H(\underline{x}, \underline{y}) = d_E^2(\underline{x}, \underline{y})/4$.

b) Welche der Gleichungen beschreiben die ML–Decodierung beim BSC–Modell? Die Minimierung/Maximierung bezieht sich jeweils auf alle $\underline{x} \in C$.

- ☐ $\underline{z} = \arg\min d_H(\underline{x}, \underline{y})$,
- ☐ $\underline{z} = \arg\min d_E(\underline{x}, \underline{y})$,
- ☐ $\underline{z} = \arg\min d_E^2(\underline{x}, \underline{y})$.

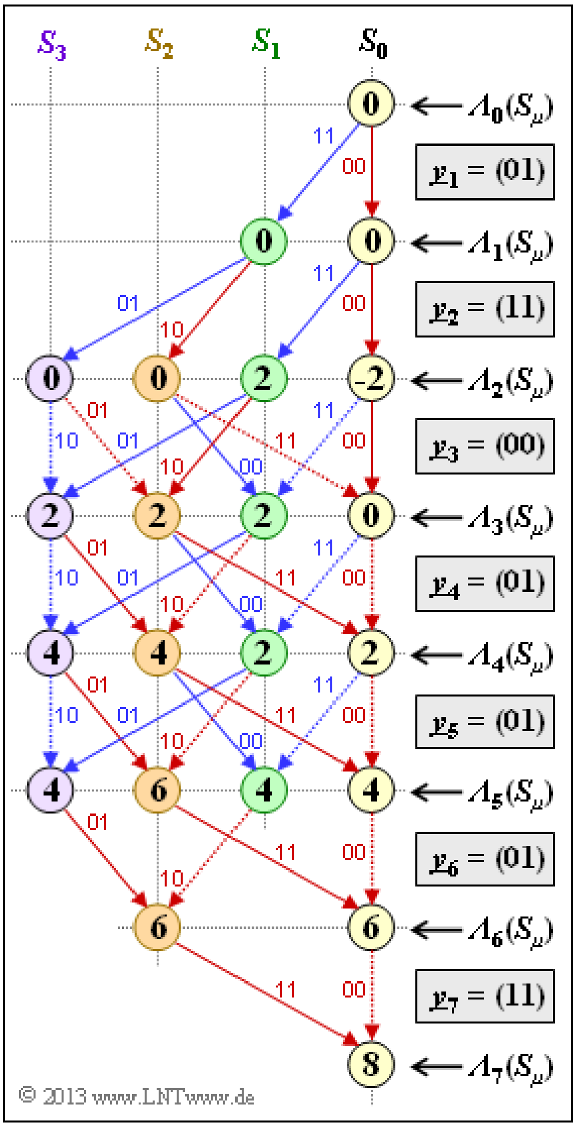
c) Welche Gleichung beschreibt die ML–Entscheidung beim BSC–Modell?

- ○ $\underline{z} = \arg\min \langle \underline{x} \cdot \underline{y} \rangle$,
- ○ $\underline{z} = \arg\max \langle \underline{x} \cdot \underline{y} \rangle$.

d) Welche Gleichungen gelten für die ML–Entscheidung beim AWGN?

- ☐ $\underline{z} = \arg\min d_H(\underline{x}, \underline{y})$,
- ☐ $\underline{z} = \arg\min d_E(\underline{x}, \underline{y})$,
- ☐ $\underline{z} = \arg\max \langle \underline{x} \cdot \underline{y} \rangle$.

A3.11: Viterbi–Pfadsuche



Ein Ergebnis von **Aufgabe A3.10** war nebenstehende Trellis–Auswertung hinsichtlich der Metriken $\Lambda_i(S_\mu)$. Zu allen Decodierschritten i wurden die (im allgemeinen) $2^m = 4$ Metriken bestimmt, wobei für jeden Knoten der größere von zwei Vergleichswerten ausgewählt wurde. Der Zweig mit dem niedrigeren Wert wurde verworfen. Man erkennt diese Zweige an punktierten Linien.

Ansonsten gelten die gleichen Voraussetzungen wie für die **Aufgabe A3.10.** Zum Beispiel kennzeichnet auch in nebenstehender Grafik ein roter Pfeil das Informationsbit $u_i = 0$ und ein blauer Pfeil steht für $u_i = 1$.

In der vorliegenden Aufgabe betrachten wir den zweiten und wichtigen Teil des Viterbi–Algorithmuses, nämlich die Suche nach den überlebenden Pfaden $\Phi_i(S_\mu)$. Diese befinden sich zum Zeitpunkt i im Zustand S_μ. Die Suche organisiert man am besten in Rückwärtsrichtung (also in der Grafik von unten nach oben).

Zum Endzeitpunkt (im Beispiel $i = 7$) gibt es aufgrund der Terminierung nur einen überlebenden Pfad $\Phi_7(S_0)$. Aus diesem lässt sich extrahieren:

- die vom Decodierer ausgewählte Codesequenz $\underline{z}$ $\Rightarrow$ größtmögliche Wahrscheinlichkeit $\Pr(\underline{z} = \underline{x})$,
- die dazugehörige Informationssequenz $\underline{v}$ mit der größtmöglichen Wahrscheinlichkeit $\Pr(\underline{v} = \underline{u})$.

Eine Entscheidung zu einem früheren Zeitpunkt, zum Beispiel bei $i = 5$, erfüllt nicht immer das Maximum–Likelihood–Kriterium. Hier gibt es vier überlebende Pfade $\Phi_5(S_0)$, ..., $\Phi_5(S_3)$, die zur Zeit $i = 5$ in den Zuständen S_0, ..., S_3 enden. Einer dieser vier Pfade ist mit Sicherheit Teil des Maximum–Likelihood–Pfades, der für $i \to \infty$ (bei Terminierung deutlich früher, hier bei $i = 7$) der bestmögliche Pfad ist. Soll aber schon zum Zeitpunkt $i = 5$ ein Zwangsentscheid getroffen werden, so entscheidet man sich meist für den Pfad $\Phi_5(S_\mu)$ mit der größten Metrik $\Lambda_5(S_\mu)$.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 3.4.**

Fragebogen zu "A3.11: Viterbi–Pfadsuche"

a) Für welche Codesequenz $\underline{z}$ fällt die Entscheidung zum Zeitpunkt $i = 7$?

- ☐ $\underline{z}$ = (11, 10, 00, 01, 01, 11, 00),
- ☐ $\underline{z}$ = (00, 11, 10, 00, 01, 01, 11),
- ☐ $\underline{z}$ = (00, 11, 01, 01, 00, 10, 11).

b) Wieviele Übertragungsfehler sind (mindestens) aufgetreten?

$N_{\textbf{Bitfehler}}$ =

c) Für welche Informationssequenz $\underline{v}$ entscheidet sich der Viterbi–Decoder?

- ☐ $\underline{v}$ = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0),
- ☐ $\underline{v}$ = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0),
- ☐ $\underline{v}$ = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).

d) Wäre bereits bei $i = 6$ eine endgültige Entscheidung möglich gewesen?

- ○ Ja.
- ○ Nein.

e) Welche überlebenden Pfade gibt es zum Zeitpunkt $i = 5$?

- ☐ $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_0$,
- ☐ $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$,
- ☐ $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2$,
- ☐ $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3$.

f) Für welchen Pfad würde man sich zum Zeitpunkt $i = 5$ entscheiden?

- ☐ $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_0$,
- ☐ $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$,
- ☐ $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2$,
- ☐ $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3$.

g) Welcher der Pfade wäre aber wahrscheinlich der richtige?

- ☐ $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_0$,
- ☐ $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$,

- [ ] $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2$,
- [ ] $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3$.