

A3.12: Pfadgewichtsfunktion

In Aufgabe A3.6 wurde das Zustandsübergangsdiagramm für den gezeichneten Faltungscoder mit den Eigenschaften

- Rate $R = 1/2$,
- Gedächtnis $m = 1$,
- Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(D) = (1, D)$

ermittelt, das ebenfalls rechts dargestellt ist.

Es soll nun aus dem Zustandsübergangsdiagramm

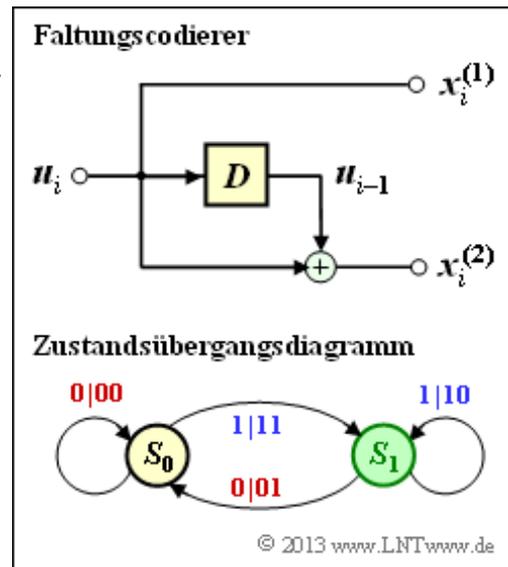
- die Pfadgewichtsfunktion $T(X)$, und
- die erweiterte Pfadgewichtsfunktion $T_{\text{enh}}(X, U)$

bestimmt werden, wobei X und U Dummy-Variablen sind.

Die Vorgehensweise ist im **Theorieteil** zu diesem Kapitel eingehend erläutert. Schließlich ist aus $T(X)$ noch die **freie Distanz** d_F zu bestimmen.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 3.5**. Berücksichtigen Sie bei der Lösung die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$



Fragebogen zu "A3.12: Pfadgewichtsfunktion"

a) Was ist bei der Modifizierung des Übergangsdiagramms zu beachten?

- Der Zustand S_0 muss in S_0 und S_0' aufgespalten werden.
- Der Zustand S_1 muss in S_1 und S_1' aufgespalten werden.
- Der Übergang von S_0 nach S_1 ist mit UX^2 zu beschriften.
- Der Übergang von S_1 nach S_1 ist mit UX zu beschriften.
- Der Übergang von S_1 nach S_0' ist mit X zu beschriften.

b) Welche Gleichungen gelten für die erweiterte Pfadgewichtsfunktion?

- $T_{\text{enh}}(X, U) = U^2X^3$
- $T_{\text{enh}}(X, U) = UX^3/(1 - UX)$
- $T_{\text{enh}}(X, U) = UX^3 + U^2X^4 + U^3X^5 + \dots$

c) Welche Gleichungen gelten für die „einfache“ Pfadgewichtsfunktion?

- $T(X) = X^3/(1 - X)$,
- $T(X) = X^3 + X^4 + X^5 + \dots$

d) Wie groß ist die freie Distanz des betrachteten Codes?

$$d_F =$$

Z3.12: Ring und Rückkopplung

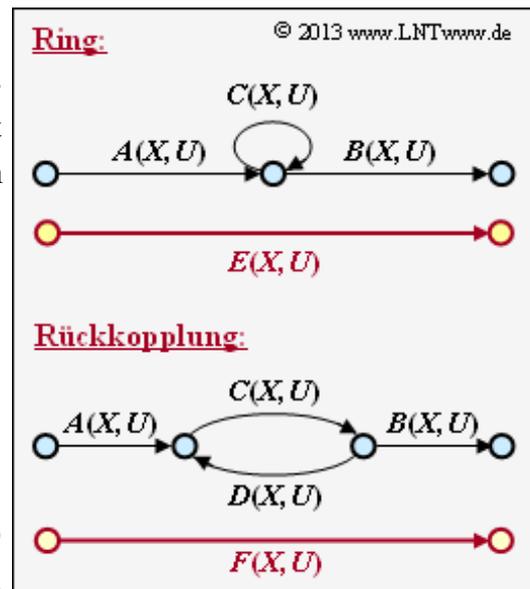
Um die Pfadgewichtsfunktion $T(X)$ eines Faltungscodes aus dem Zustandsübergangsdiagramm bestimmen zu können, ist es erforderlich, das Diagramm so zu reduzieren, bis es durch eine einzige Verbindung vom Startzustand zum Endzustand dargestellt werden kann.

Im Zuge dieser Diagrammreduktion können auftreten:

- serielle und parallele Übergänge,
- ein Ring entsprechend der obigen Grafik,
- eine Rückkopplung entsprechend der unteren Grafik.

Für diese beiden Graphen sind die Entsprechungen $E(X, U)$ und $F(X, U)$ in Abhängigkeit der angegebenen Funktionen $A(X, U)$, $B(X, U)$, $C(X, U)$, $D(X, U)$ zu ermitteln.

Hinweis: Mit dieser Aufgabe sollen einige der Angaben auf Seite 4b von Kapitel 3.5 bewiesen werden. Angewendet werden diese Regeln in Aufgabe A3.12 und Aufgabe A3.13.



Fragebogen zu "Z3.12: Ring und Rückkopplung"

a) Welche der aufgeführten Übergänge sind beim Ring möglich?

- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3,$
- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_2 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3,$
- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3.$

b) Wie lautet die Ersetzung $E(X, U)$ eines Ringes?

- $E(X, U) = [A(X, U) + B(X, U)] / [1 - C(X, U)],$
- $E(X, U) = A(X, U) \cdot B(X, U) / [1 - C(X, U)],$
- $E(X, U) = A(X, U) \cdot C(X, U) / [1 - B(X, U)].$

c) Welche der aufgeführten Übergänge sind bei Rückkopplung möglich?

- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4,$
- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_4,$
- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4,$
- $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4.$

d) Wie lautet die Ersetzung $F(X, U)$ einer Rückkopplung?

- $F(X, U) = A(X, U) \cdot B(X, U) \cdot C(X, U) / [1 - C(X, U) \cdot D(X, U)]$
- $F(X, U) = A(X, U) \cdot B(X, U) / [1 - C(X, U) + D(X, U)].$

A3.13: Nochmals $T_{\text{enh}}(X, U)$ und $T(X)$

Auf der Seite 4c des Theorieteils zu Kapitel 3.5 wurde für das Beispiel unseres Rate-1/2-Standardcodes mit Gedächtnis $m = 2$ und der Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}(D) = (1 + D + D^2, 1 + D^2)$$

die Berechnung der Pfadgewichtsfunktionen sehr ausführlich beschrieben. Als Ergebnisse wurden genannt:

$$\begin{aligned} T_{\text{enh}}(X, U) &= \frac{UX^5}{1 - 2UX} = \\ &= UX^5 \cdot [1 + (2UX) + (2UX)^2 + \dots], \\ T(X) &= \frac{X^5}{1 - 2X} = \\ &= X^5 \cdot [1 + (2X) + (2X)^2 + \dots]. \end{aligned}$$

Nun sollen die gleichen Berechnungen für den äquivalenten systematischen Code mit der Übertragungsfunktionsmatrix

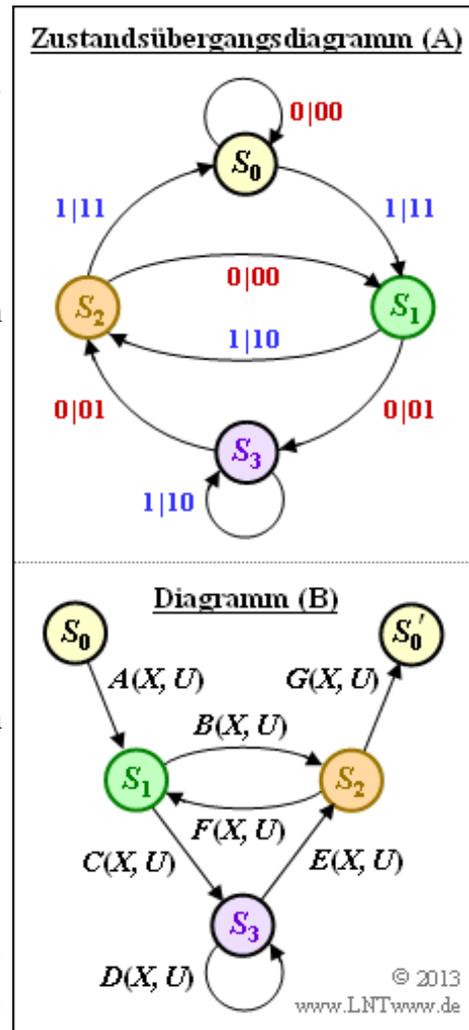
$$\mathbf{G}(D) = (1, (1 + D^2)/(1 + D + D^2))$$

durchgeführt werden.

Die Grafik zeigt das Zustandsübergangsdiagramm (A) und die Struktur des reduzierten Diagramms (B), wobei die Übergänge mit $A(X, U)$, ..., $G(X, U)$ allgemein bezeichnet sind. In der

Teilaufgabe (a) sollen diese Abkürzungen an das Zustandsübergangsdiagramm (A) angepasst werden.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das Kapitel 3.5. Zur Lösung der Teilaufgaben (b) und (c) verweisen wir hier nochmals auf die Seite 4c im Theorieteil.



Fragebogen zu "A3.13: Nochmals $T_{\text{enh}}(X, U)$ und $T(X)$ "

a) Für welche Ausdrücke stehen die nachfolgenden Abkürzungen?

- $A(X, U) = UX^2,$
- $B(X, U) = UX,$
- $C(X, U) = X,$
- $D(X, U) = UX,$
- $E(X, U) = X,$
- $F(X, U) = 1,$
- $G(X, U) = UX^2.$

b) Welche Ausdrücke gelten für die erweiterte Pfadgewichtsfunktion?

- $T_{\text{enh}}(X, U) = UX^5 / (1 - 2UX).$
- $T_{\text{enh}}(X, U) = UX^5 + 2 U^2X^6 + 4U^3X^7 + 8U^4X^8 + \dots,$
- Keiner der Vorschläge ist richtig.

c) Welcher Ausdruck gilt für die „einfache“ Pfadgewichtsfunktion?

- $T(X) = X^5 / (1 - 2X).$
- $T(X) = X^5 + 2X^6 + 4X^7 + 8X^8 + \dots$
- Keiner der Vorschläge ist richtig.

A3.14: Faltungscodes: Schranken

Für den häufig verwendeten Faltungscodes mit

- der Coderate $R = 1/2$,
- dem Gedächtnis $m = 2$,
- der Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}(D) = (1 + D + D^2, 1 + D^2)$$

lautet die **erweiterte Pfadgewichtsfunktion**:

$$T_{\text{enh}}(X, U) = \frac{UX^5}{1 - 2UX}.$$

Kanalparameter		Schranke nach	
ε	β	Bhattacharyya	Viterbi
$3 \cdot 10^{-2}$	0.341	$1.45 \cdot 10^{-2}$	$4.56 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	???	???	???
$3 \cdot 10^{-3}$	0.109	$1.97 \cdot 10^{-5}$	$2.52 \cdot 10^{-5}$
10^{-3}	0.063	$1.14 \cdot 10^{-6}$	$1.30 \cdot 10^{-6}$
$3 \cdot 10^{-4}$	0.035	$5.65 \cdot 10^{-8}$	$6.07 \cdot 10^{-8}$
10^{-4}	???	???	???

© 2013 www.LNTwww.de

Mit der schon häufiger benutzten Reihenentwicklung $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + \dots$ kann hierfür auch geschrieben werden:

$$T_{\text{enh}}(X, U) = UX^5 \cdot [1 + (2UX) + (2UX)^2 + (2UX)^3 + \dots].$$

Die „einfache“ Pfadgewichtsfunktion $T(X)$ ergibt sich daraus, wenn man die zweite Variable $U = 1$ setzt.

Anhand dieser Funktionen können Fehlerwahrscheinlichkeitsschranken angegeben werden:

- Die *Burstfehlerwahrscheinlichkeit* wird durch die **Bhattacharyya–Schranke** begrenzt:

$$\Pr(\text{Burstfehler}) \leq \Pr(\text{Bhattacharyya}) = T(X = \beta).$$

- Dagegen ist die *Bitfehlerwahrscheinlichkeit* stets kleiner (oder gleich) der **Viterbi–Schranke**:

$$\Pr(\text{Bitfehler}) \leq \Pr(\text{Viterbi}) = \left[\frac{d}{dU} T_{\text{enh}}(X, U) \right]_{\substack{X=\beta \\ U=1}}.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 3.5**. Der Bhattacharyya–Parameter für BSC lautet:

$$\beta = 2 \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot (1 - \varepsilon)}.$$

In obiger Tabelle sind für einige Werte des BSC–Parameters ε angegeben:

- der Bhattacharyya–Parameter β ,
- die Bhattacharyya–Schranke $\Pr(\text{Bhattacharyya})$, und
- die Viterbi–Schranke $\Pr(\text{Viterbi})$.

Im Verlauf dieser Aufgabe sollen Sie die entsprechenden Größen für $\varepsilon = 10^{-2}$ und $\varepsilon = 10^{-4}$ berechnen. Die vollständige Tabelle finden Sie dann in der Musterlösung.

Fragebogen zu "A3.14: Faltungscodes: Schranken"

a) Welcher Bhattacharyya-Parameter ergibt sich für das BSC-Modell?

$$\varepsilon = 10^{-2}: \beta =$$

$$\varepsilon = 10^{-4}: \beta =$$

b) Wie lautet die Bhattacharyya-Schranke?

$$\varepsilon = 10^{-2}: \Pr(\text{Bhattacharyya}) =$$

$$\varepsilon = 10^{-4}: \Pr(\text{Bhattacharyya}) =$$

c) Wie lautet die Viterbi-Schranke?

$$\varepsilon = 10^{-2}: \Pr(\text{Viterbi}) =$$

$$\varepsilon = 10^{-4}: \Pr(\text{Viterbi}) =$$

d) Für welche Werte $\varepsilon < \varepsilon_0$ sind die beiden Schranken nicht anwendbar?

$$\varepsilon_0 =$$