

## A4.1: Zum „Log Likelihood Ratio“

Zur Interpretation von *Log-Likelihood-Verhältnissen* (kurz *L*-Werten) gehen wir wie im **Theorieteil** vom *Binary Symmetric Channel* (BSC) aus. Die englische Bezeichnung ist *Log Likelihood Ratio* (LLR).

Für die binären Zufallsgrößen am Eingang und Ausgang gelte

$$x \in \{0, 1\}, \quad y \in \{0, 1\}.$$

Dieses Modell ist in der oberen Grafik dargestellt und wird im Folgenden als **Modell A** bezeichnet. Für die bedingten Wahrscheinlichkeiten in Vorwärtsrichtung gilt:

$$\begin{aligned} \Pr(y = 1 | x = 0) &= \Pr(y = 0 | x = 1) = \varepsilon, \\ \Pr(y = 0 | x = 0) &= \Pr(y = 1 | x = 1) = 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Verfälschungswahrscheinlichkeit  $\varepsilon$  ist der entscheidende Parameter des BSC-Modells.

Bezüglich der Wahrscheinlichkeitsverteilung am Eingang ist es zweckmäßig, anstelle der Wahrscheinlichkeiten  $\Pr(x = 0)$  und  $\Pr(x = 1)$  das *Log Likelihood Ratio* (LLR) zu betrachten.

Für dieses gilt bei der hier verwendeten unipolaren Betrachtungsweise per Definition:

$$L_A(x) = \ln \frac{\Pr(x = 0)}{\Pr(x = 1)},$$

wobei der Index „A“ auf die Apriori-Wahrscheinlichkeit hinweist.

Beispielsweise ergibt sich für  $\Pr(x = 0) = 0.2 \Rightarrow \Pr(x = 1) = 0.8$  das Apriori-LLR  $L_A(x) = -1.382$ .

Aus dem BSC-Modell lässt sich zudem der *L*-Wert der bedingten Wahrscheinlichkeiten  $\Pr(y|x)$  in Vorwärtsrichtung ermitteln, der in der vorliegenden Aufgabe auch mit  $L_V(y)$  bezeichnet wird:

$$L_V(y) = L(y|x) = \ln \frac{\Pr(y|x=0)}{\Pr(y|x=1)} = \begin{cases} \ln [(1-\varepsilon)/\varepsilon] & \text{für } y = 0, \\ \ln [\varepsilon/(1-\varepsilon)] & \text{für } y = 1. \end{cases}$$

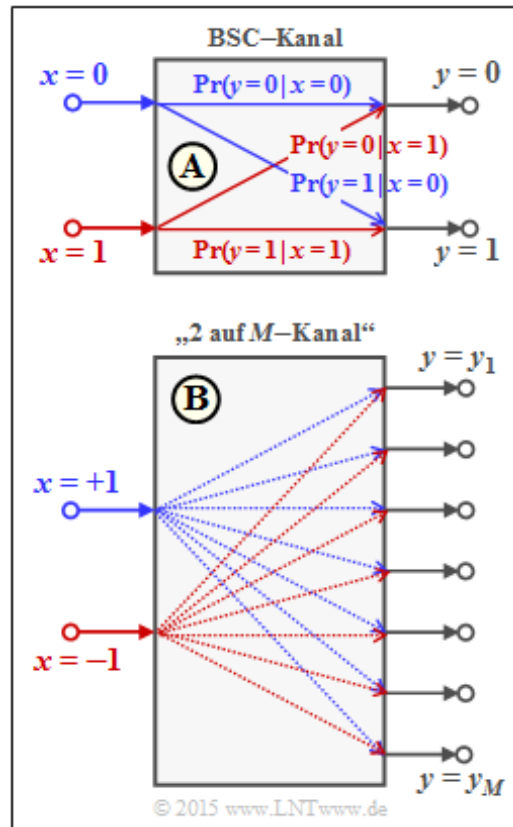
Beispielsweise ergibt sich für  $\varepsilon = 0.1$ :

$$L_V(y = 0) = +2.197, \quad L_V(y = 1) = -2.197.$$

Von besonderer Bedeutung für die Codierungstheorie sind die Rückschlusswahrscheinlichkeiten  $\Pr(x|y)$ , die mit den Vorwärtswahrscheinlichkeiten  $\Pr(y|x)$  sowie den Eingangswahrscheinlichkeiten  $\Pr(x = 0)$  und  $\Pr(x = 1)$  über den Satz von Bayes in Zusammenhang stehen. Der entsprechende *L*-Wert wird in dieser Aufgabe mit  $L_R(y)$  bezeichnet:

$$L_R(y) = L(x|y) = \ln \frac{\Pr(x = 0 | y)}{\Pr(x = 1 | y)}.$$

**Hinweis:** Die Aufgabe bezieht sich auf die ersten Seiten von **Kapitel 4.1**. In den letzten Teilaufgaben ist zu klären, ob die gefundenen Zusammenhänge zwischen  $L_A$ ,  $L_V$  und  $L_R$  auch auf den unten skizzierten



„2-auf-M-Kanal“ übertragen werden können. Hierzu wählen wir für die Eingangssymbole eine bipolare Betrachtungsweise: „0“  $\rightarrow$  „+1“ sowie „1“  $\rightarrow$  „-1“.

### Fragebogen zu "A4.1: Zum „Log Likelihood Ratio“"

a) Wie hängen die bedingten Wahrscheinlichkeiten zweier Zufallsgrößen  $A$  und  $B$  zusammen?

- $\Pr(A | B) = \Pr(B | A),$
- $\Pr(A | B) = \Pr(B | A) \cdot \Pr(B) / \Pr(A),$
- $\Pr(A | B) = \Pr(B | A) \cdot \Pr(A) / \Pr(B).$

b) Welche Gleichung gilt für den Binärkanal mit den Wahrscheinlichkeiten  $\Pr(A) = \Pr(x = 0)$  und  $\Pr(B) = \Pr(y = 0)$ ?

- $\Pr(x = 0 | y = 0) = \Pr(y = 0 | x = 0) \cdot \Pr(x = 0) / \Pr(y = 0),$
- $\Pr(x = 0 | y = 0) = \Pr(y = 0 | x = 0) \cdot \Pr(y = 0) / \Pr(x = 0),$

c) Unter welchen Voraussetzungen gilt für das Rückschluss-LLR für alle möglichen Ausgangswerte  $y \in \{0, 1\}$ :  $L(x|y) = L(y|x)$  bzw.  $L_R(y) = L_V(y)$ ?

- Für jede beliebige Eingangsverteilung  $\Pr(x = 0), \Pr(x = 1).$
- Nur für die Gleichverteilung:  $\Pr(x = 0) = \Pr(x = 1) = 1/2.$

d) Das Ausgangssymbol sei  $y = 1$ . Welches Rückschluss-LLR erhält man mit der Verfälschungswahrscheinlichkeit  $\varepsilon = 0.1$  bei gleichwahrscheinlichen Symbolen?

$$\varepsilon = 0.1: L_R(y = 1) = L(x|y = 1) =$$

e) Das Ausgangssymbol sei nun  $y = 0$ . Welches Rückschluss-LLR erhält man für  $\Pr(x = 0) = 0.2$ ?

$$\varepsilon = 0.1: L_R(y = 0) = L(x|y = 0) =$$

f) Lässt sich das unter (c) hergeleitete Ergebnis  $\Rightarrow L_R = L_V + L_A$  auch auf den „2-auf- $M$ “-Kanal übertragen?

- Ja.
- Nein.

g) Kann man den Zusammenhang auch auf den AWGN-Kanal übertragen?

- Ja.
- Nein.

## Z4.1: L–Werte des BEC–Modells

Wir betrachten das so genannte **BEC–Kanalmode**ll (*Binary Erasure Channel*) mit

- der Eingangsgröße  $x \in \{+1, -1\}$ ,
- der Ausgangsgröße  $y \in \{+1, -1, E\}$ , und
- der Auslöschungswahrscheinlichkeit  $\lambda$ .

Hierbei bedeutet  $y = E$  (*Erasure*), dass der Ausgangswert  $y$  weder als „+1“ noch als „-1“ entschieden werden konnte.

Bekannt sind zudem die Eingangswahrscheinlichkeiten

$$\Pr(x = +1) = 3/4, \quad \Pr(x = -1) = 1/4.$$

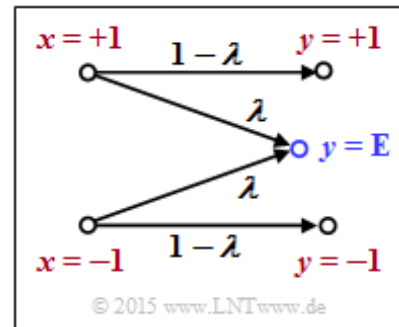
Das **Log–Likelihood–Verhältnis** (kurz: *L–Wert*, englisch: *Log Likelihood Ratio*, LLR) der binären Zufallsgröße  $x$  ist bei bipolarer Betrachtungsweise wie folgt gegeben:

$$L(x) = \ln \frac{\Pr(x = +1)}{\Pr(x = -1)}.$$

Entsprechend gilt für den bedingten *L–Wert* in Vorwärtsrichtung für alle  $y \in \{+1, -1, E\}$ :

$$L(y|x) = \ln \frac{\Pr(y|x = +1)}{\Pr(y|x = -1)}.$$

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 4.1**.



### Fragebogen zu "ZA.1: L-Werte des BEC-Modells"

a) Wie lautet der L-Wert der Eingangsgröße  $x$ ?

$$L(x) =$$

b) Welcher Wahrscheinlichkeit  $\Pr(x = -1)$  entspricht  $L(x) = -2$ ?

$$\Pr(x = -1) =$$

c) Berechnen Sie den bedingten L-Wert  $L(y = E | x)$  in Vorwärtsrichtung.

$$L(y = E | x) =$$

d) Welche Aussagen gelten für die beiden anderen bedingten L-Werte?

- $L(y = +1 | x)$  ist positiv unendlich.
- $L(y = -1 | x)$  ist negativ und betragsmäßig unendlich groß.
- Es gilt  $L(y = +1 | x) = L(y = -1 | x) = 0$ .

e) Unter welchen Voraussetzungen gelten die Ergebnisse aus (c) und (d)?

- Für  $0 \leq \lambda \leq 1$ .
- Für  $0 < \lambda \leq 1$ .
- Für  $0 \leq \lambda < 1$ .
- Für  $0 < \lambda < 1$ .

## A4.2: Kanal-LLR bei AWGN

Wir betrachten zwei Kanäle A und B, jeweils mit

- binärem bipolarem Eingang  $x \in \{+1, -1\}$ , und
- wertkontinuierlichem Ausgang  $y \in R$  (reelle Zahl).

Die Grafik zeigt für beide Kanäle A und B

- als blaue Kurve die Dichtefunktionen  $f_{y|x=+1}$ ,
- als rote Kurve die Dichtefunktionen  $f_{y|x=-1}$ .

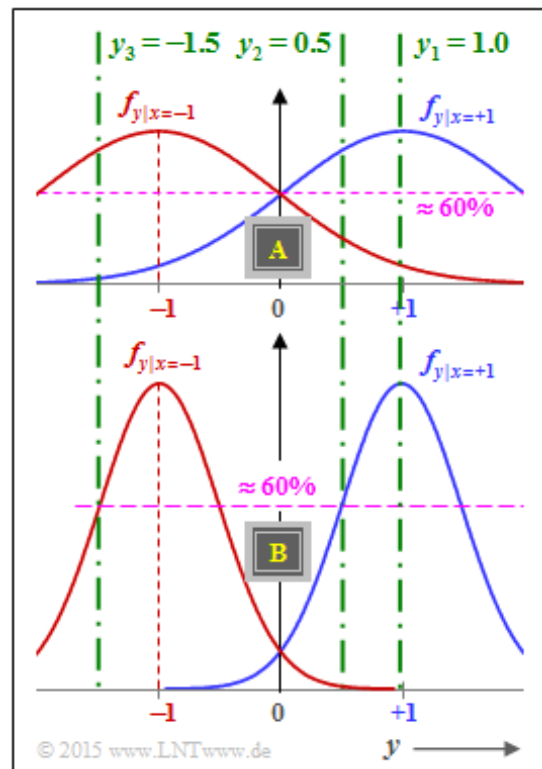
Im **Theorieteil** wurde für diese AWGN-Konstellation der Kanal-L-Wert (englisch: *Channel Log Likelihood Ratio*, oder kurz *Channel LLR*) wie folgt hergeleitet:

$$L_K(y) = L(y|x) = \ln \frac{\Pr(y|x = +1)}{\Pr(y|x = -1)}.$$

Wertet man diese Gleichung analytisch aus, so erhält man mit der Proportionalitätskonstanten  $K_L = 2/\sigma^2$ :

$$L_K(y) = K_L \cdot y.$$

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.1**.



### Fragebogen zu "A4.2: Kanal-LLR bei AWGN"

a) Welche Eigenschaften weisen die in der Grafik dargestellten Kanäle auf?

- Sie beschreiben die Binärübertragung bei Gaußscher Störung.
- Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit ohne Codierung ist  $Q(1/\sigma)$ .
- Das Kanal-LLR ist als  $L_K(y) = K_L \cdot y$  darstellbar.

b) Welche Konstante  $K_L$  kennzeichnet den Kanal A?

**Kanal A:**  $K_L =$

c) Welche Informationen liefern bei **Kanal A** die Empfangswerte  $y_1 = 1, y_2 = 0.5$  und  $y_3 = -1.5$  über die gesendeten Binärsymbole  $x_1, x_2$  bzw.  $x_3$ ?

- $y_1 = 1.0$  sagt aus, dass wahrscheinlich  $x_1 = +1$  gesendet wurde.
- $y_2 = 0.5$  sagt aus, dass wahrscheinlich  $x_2 = +1$  gesendet wurde.
- $y_3 = -1.5$  sagt aus, dass wahrscheinlich  $x_3 = -1$  gesendet wurde.
- Die Entscheidung „ $y_1 \rightarrow x_1$ “ ist sicherer als „ $y_2 \rightarrow x_2$ “.
- Die Entscheidung „ $y_1 \rightarrow x_1$ “ ist sicherer als „ $y_3 \rightarrow x_3$ “.

d) Welche  $K_L$  kennzeichnet den Kanal B?

**Kanal B:**  $K_L =$

e) Welche Informationen liefern bei **Kanal B** die Empfangswerte  $y_1 = 1, y_2 = 0.5$  und  $y_3 = -1.5$  über die gesendeten Binärsymbole  $x_1, x_2$  bzw.  $x_3$ ?

- Für  $x_1, x_2, x_3$  wird gleich entschieden wie bei Kanal A.
- Die Schätzung „ $x_2 = +1$ “ ist viermal sicherer als bei Kanal A.
- Die Schätzung „ $x_3 = -1$ “ bei Kanal A ist zuverlässiger als die Schätzung „ $x_2 = +1$ “ bei Kanal B.

### A4.3: Iterative Decodierung beim BSC

Wir betrachten in dieser Aufgabe zwei Codes:

- den Single Parity-Code  $\Rightarrow$  **SPC (3, 2, 2)**:  
 $\underline{x} = ((0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ ,
- den Wiederholungscode  $\Rightarrow$  **RC (3, 1, 3)**:  
 $\underline{x} = ((0, 0, 0), (1, 1, 1))$ .

Der Kanal wird auf Bitebene durch das **BSC-Modell** beschrieben. Entsprechend der Grafik gilt dabei:

$$\Pr(y_i \neq x_i) = \varepsilon = 0.269,$$

$$\Pr(y_i = x_i) = 1 - \varepsilon = 0.731.$$

Hierbei bezeichnet  $\varepsilon$  die Verfälschungswahrscheinlichkeit.

Bis auf die letzte Teilaufgabe wird stets von folgendem Empfangswert ausgegangen:

$$\underline{y} = (0, 1, 0) = \underline{y}_2.$$

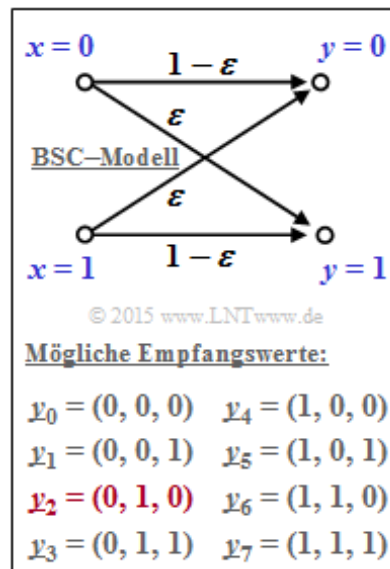
Die hier gewählte Indizierung aller möglichen Empfangsvektoren kann der Grafik entnommen werden. Der meist betrachtete Vektor  $\underline{y}_2$  ist hierbei rot hervorgehoben. Für die Teilaufgabe (f) gilt dann:

$$\underline{y} = (1, 1, 0) = \underline{y}_6.$$

Zur Decodierung sollen in der Aufgabe untersucht werden:

- die **Syndromdecodierung**, die bei den hier betrachteten Codes als *Hard Decision Maximum Likelihood Detection* (HD-ML) vornimmt. *Hinweis*: Softwerte liegen beim BSC nicht vor.
- die symbolweise **Soft-in Soft-out Decodierung** (SISO) entsprechend dieses Abschnitts.

**Hinweis**: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.1**. Das vom Decoder ausgewählte Codewort wird in den Fragen mit  $\underline{z}$  bezeichnet.





### Fragebogen zu "A4.3: Iterative Decodierung beim BSC"

a) Welche Aussagen gelten für die Decodierung des SPC (3, 2, 2)?

- Die HD-Syndromdecodierung liefert das Ergebnis  $\underline{z} = (0, 1, 0)$ ,
- Die HD-Syndromdecodierung liefert das Ergebnis  $\underline{z} = (0, 0, 0)$ ,
- Die HD-Syndromdecodierung versagt hier.

b) Welche Aussagen gelten für den RC (3, 1, 3)?

- Die HD-Syndromdecodierung liefert das Ergebnis  $\underline{z} = (0, 1, 0)$ ,
- Die HD-Syndromdecodierung liefert das Ergebnis  $\underline{z} = (0, 0, 0)$ ,
- Die HD-Syndromdecodierung versagt hier.

c) Wie sicher ist diese Entscheidung, wenn man als Sicherheit  $S$  den Quotienten der Wahrscheinlichkeiten für eine richtige bzw. falsche Entscheidung definiert?

$$\underline{y} = \underline{y}_2: S =$$
$$\ln(S) =$$

d) Wie lauten die intrinsischen  $L$ -Werte für die iterative symbolweise Decodierung des RC (3, 1)-Empfangswortes  $\underline{y}_2 = (0, 1, 0)$ ?

$$\underline{y} = \underline{y}_2: L_K(1) =$$
$$L_K(2) =$$
$$L_K(3) =$$

e) Welche Aussagen sind für die Decodierung des Empfangswortes  $\underline{y}_2 = (0, 1, 0)$  zutreffend? Gehen Sie weiterhin vom RC (3, 1, 3) aus.

- Ab der ersten Iteration sind alle Vorzeichen von  $L_{APP}(i)$  positiv.
- Bereits nach der zweiten Iteration ist  $\Pr(\underline{x}_0 | \underline{y}_2)$  größer als 99%.
- Mit jeder Iteration werden die Beträge  $L_{APP}(i)$  größer.

f) Welche Aussagen sind für die Decodierung des Empfangswortes  $\underline{y}_6 = (1, 1, 0)$  zutreffend, wenn  $\underline{x}_0 = (0, 0, 0)$  gesendet wurde?

- Der iterative Decoder entscheidet richtig.
- Der iterative Decoder entscheidet falsch.
- Die „Zuverlässigkeit“ für „ $\underline{y}_6 \Rightarrow \underline{x}_0$ “ steigt mit wachsendem  $I$ .

### Z4.3: Umrechnung von L-Wert und S-Wert

Wir gehen von einer binären Zufallsgröße  $x \in \{+1, -1\}$  mit folgenden Wahrscheinlichkeiten aus:

$$\Pr(x = +1) = p,$$

$$\Pr(x = -1) = q = 1 - p.$$

Die „Zuverlässigkeit“ des Symbols  $x$  kann ausgedrückt werden

- durch den L-Wert entsprechend der Definition

$$L(x) = \ln \frac{p}{q} = \frac{p}{1-p},$$

- durch den so genannten S-Wert

$$S(x) = p - q.$$

Argument $x$	$y = \tanh(x)$
0.0	0.0000
0.0915	0.0912
0.1	0.0997
0.2	0.1974
0.2450	0.2400
0.3	0.2913
0.3676	0.3519
0.4	0.3799
0.5	0.4621
0.6	0.5370
0.7	0.6044
0.8	0.6640
0.9	0.7163
1.0	0.7616

© 2016 www.LNTwww.de

Den Begriff „S-Wert“ haben wir kreiert, um die folgenden Fragen griffiger formulieren zu können. In der Literatur findet man hierfür manchmal die Bezeichnung „Soft Bit“.

Wie in Teilaufgabe (a) gezeigt werden soll, können  $L(x)$  und  $S(x)$  ineinander umgerechnet werden.

Anschließend sollen diese Funktionen zur Berechnung der folgenden Größen berechnet werden, wobei stets von der Codelänge  $n = 3$  ausgegangen wird:

- der extrinsische L-Wert für das dritte Symbol  $\Rightarrow L_E(x_3)$ ,
- der A-posteriori-L-Wert für das dritte Symbol  $\Rightarrow L_{APP}(x_3)$ .

Die Berechnung soll für folgende Codes erfolgen:

- dem Wiederholungscode  $\Rightarrow$  RC (3, 1) mit der Nebenbedingung  $\text{sign}(x_1) = \text{sign}(x_2) = \text{sign}(x_3)$ ,
- dem *Single Parity-check Code*  $\Rightarrow$  SPC (3, 2) mit der Nebenbedingung  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = +1$ .

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 4.1**. Zur Lösung benötigen Sie den *Tangens Hyperbolicus* entsprechend folgender Definition:

$$y = \tanh(x) = \frac{e^{+x/2} - e^{-x/2}}{e^{+x/2} + e^{-x/2}} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

Diese Funktion ist oben in Tabellenform angegeben.

### Fragebogen zu "ZA.3: Umrechnung von L-Wert und S-Wert"

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen S-Wert und L-Wert?

$S(x) = \tanh(L(x)),$

$S(x) = \tanh(L(x)/2),$

$L(x) = 2 \cdot \tanh^{-1}(S(x)).$

b) Betrachtet wird der (3, 1) *Repetition Code*. Für die Apriori-L-Werte gelte  $\underline{L}_A = (+2, -1, +3)$ . Wie groß ist der extrinsische L-Wert für das Symbol  $x_3$ ?

**(3, 1) RC:  $L_E(x_3) =$**

c) Wie groß ist in diesem Fall der Aposteriori-L-Wert für das Symbol  $x_3$ ?

**(3, 1) RC:  $L_{APP}(x_3) =$**

d) Wie groß ist der extrinsische L-Wert beim (3, 2) *Single Parity-check Code*?  
Es gelte weiterhin  $\underline{L}_A = (+2, -1, +3)$ .

**(3, 2) SPC:  $L_E(x_3) =$**

e) Die Apriori-Wahrscheinlichkeiten seien nun 0.3, 0.8 und 0.9. Wie groß ist der extrinsische L-Wert für den *Repetition Code*?

**(3, 1) RC:  $L_E(x_3) =$**

f) Welcher extrinsische L-Wert ergibt sich bei gleichen Voraussetzungen wie in (e) für den *Single Parity-check Code*?

**(3, 2) SPC:  $L_E(x_3) =$**

### A4.4: Extrinsische L-Werte beim SPC

Wir betrachten nochmals den **Single Parity-check Code**. Bei einem solchen SPC  $(n, n-1, 2)$  stammen von den  $n$  Bits eines Codewortes  $\underline{x}$  die ersten  $k = n-1$  Bits von der Quellenfolge  $\underline{u}$  und es wird nur ein einziges Prüfbit  $p$  hinzugefügt, und zwar derart, dass die Anzahl der Einsen im Codewort geradzahlig ist:

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = (u_1, u_2, \dots, u_k, p).$$

Die extrinsische Information über das  $i$ -te Codebit wird über alle anderen Symbole ( $j \neq i$ ) gebildet. Deshalb schreiben wir für das um ein Bit kürzere Codewort:

$$\underline{x}^{(-i)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Der extrinsische L-Wert über das  $i$ -te Codesymbol lautet mit dem **Hamming-Gewicht**  $w_H$  der verkürzten Folge  $\underline{x}^{(-i)}$ :

$$L_E(i) = \frac{\Pr[w_H(\underline{x}^{(-i)}) \text{ ist gerade} | \underline{y}]}{\Pr[w_H(\underline{x}^{(-i)}) \text{ ist ungerade} | \underline{y}]}.$$

Ist die Wahrscheinlichkeit im Zähler größer als die im Nenner, so ist  $L_E(i) > 0$  und damit wird auch der Aposteriori-L-Wert  $L_{APP}(i) = L_A(i) + L_E(i)$  vergrößert, das heißt tendenziell in Richtung des Symbols  $x_i = 0$  beeinflusst. Andernfalls (bei  $L_E(i) < 0$ ) spricht aus Sicht der anderen Symbole ( $j \neq i$ ) vieles dafür, dass  $x_i = 1$  ist.

Behandelt wird ausschließlich der SPC (4, 3, 4), wobei für die Wahrscheinlichkeiten  $p_i = \Pr(x_i = 1)$  gilt:

$$p_1 = 0.2, \quad p_2 = 0.9, \quad p_3 = 0.3, \quad p_4 = 0.6.$$

Daraus ergeben sich die Apriori-L-Werte zu:

$$L_A(i) = \ln \left[ \frac{\Pr(x_i = 0)}{\Pr(x_i = 1)} \right] = \ln \left[ \frac{1 - p_i}{p_i} \right].$$

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.1**. In der oberen Tabelle sind für  $p_i = 0$  bis  $p_i = 1$  mit Schrittweite 0.1 angegeben:

- die Wahrscheinlichkeit  $q_i = \Pr(x_i = 0) = 1 - p_i \Rightarrow$  Spalte 2,
- die Werte für  $1 - 2p_i \Rightarrow$  Spalte 3,
- die Apriori-L-Werte  $L_i = \ln [(1 - p_i)/p_i] = L_A(i) \Rightarrow$  Spalte 4.

Der *Tangens Hyperbolicus* ( $\tanh$ ) von  $L_i/2$  ist identisch mit  $1 - 2p_i \Rightarrow$  Spalte 3.

In der **Aufgabe Z4.4** wird gezeigt, dass für den extrinsischen L-Wert auch geschrieben werden kann:

$$L_E(i) = \ln \frac{1 + \pi}{1 - \pi}, \quad \text{mit} \quad \pi = \prod_{j \neq i} (1 - 2p_j).$$

$p_i$	$1 - p_i$	$1 - 2p_i$	$L_i$
0.0	1.0	+1.0	$+\infty$
0.1	0.9	+0.8	+2.197
0.2	0.8	+0.6	+1.386
0.3	0.7	+0.4	+0.847
0.4	0.6	+0.2	+0.405
0.5	0.5	0	0
0.6	0.4	-0.2	-0.405
0.7	0.3	-0.4	-0.847
0.8	0.2	-0.6	-1.386
0.9	0.1	-0.8	-2.197
1.0	0.0	-1.0	$-\infty$

**Anmerkungen:**  
 1.  $\Pr(x_i = 1) = p_i$     2.  $\Pr(x_i = 0) = 1 - p_i$   
 3.  $L_i = \ln(1 - p_i)/p_i$     4.  $\tanh(L_i/2) = 1 - 2p_i$

### Fragebogen zu "A4.4: Extrinsische $L$ -Werte beim SPC"

a) Es gelte  $p_1 = 0.2, p_2 = 0.9, p_3 = 0.3, p_4 = 0.6$ . Berechnen Sie daraus die Apriori- $L$ -Werte des SPC (4, 3, 4) für Bit 1 und Bit 2.

$$L_A(\mathbf{i} = 1) =$$

$$L_A(\mathbf{i} = 2) =$$

b) Wie lauten die extrinsischen  $L$ -Werte für Bit 1 und Bit 2.

$$L_E(\mathbf{i} = 1) =$$

$$L_E(\mathbf{i} = 2) =$$

c) Welche Zusammenhänge bestehen zwischen  $p_j$  und  $L_j = L_A(j)$ ?

Es gilt  $p_j = 1/[1 + \exp(L_j)]$ .

Es gilt  $1 - 2p_j = [\exp(L_j) - 1] / [\exp(L_j) + 1]$ .

Es gilt  $1 - 2p_j = \tanh(L_j/2)$ .

d) Es gelte weiter  $p_1 = 0.2, p_2 = 0.9, p_3 = 0.3$  und  $p_4 = 0.6$ . Berechnen Sie die extrinsischen  $L$ -Werte für Bit 3 und Bit 4 nach verschiedenen Gleichungen.

$$L_E(\mathbf{i} = 3) =$$

$$L_E(\mathbf{i} = 4) =$$

## Z4.4: Ergänzung zur Aufgabe A4.4

Der Informationstheoretiker **Robert G. Gallager** hat sich bereits 1963 mit folgender Fragestellung beschäftigt:

- Gegeben ist ein Zufallsvektor  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  mit  $n$  binären Elementen  $x_i \in \{0, 1\}$ .
- Bekannt sind alle Wahrscheinlichkeiten  $p_i = \Pr(x_i = 1)$  und  $q_i = \Pr(x_i = 0) = 1 - p_i$  mit Index  $i = 1, \dots, n$ .
- Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Einsen in diesem Vektor geradzahlig ist.
- Oder ausgedrückt mit dem **Hamming-Gewicht**: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $\Pr[w_H(\underline{x}) \text{ ist gerade}]$ ?

Die Grafik verdeutlicht die Aufgabenstellung für das Beispiel  $n = 4$  sowie  $p_1 = 0.2, p_2 = 0.9, p_3 = 0.3$  und  $p_4 = 0.6$ .

- Für die grün hinterlegte Zeile  $\Rightarrow \underline{x} = (1, 0, 0, 1)$  gilt  $w_H(\underline{x}) = 2$  und  $\Pr(\underline{x}) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot p_4 = 0.0084$ .
- Blaue Schrift bedeutet ein geradzahliges Hamming-Gewicht. Rote Schrift steht „ $w_H(\underline{x})$  ist ungerade“.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$w_H(\underline{x})$	$\Pr(\underline{x})$
0	0	0	0	0	0.0224
0	0	0	1	1	0.0336
0	0	1	0	1	0.0096
0	0	1	1	2	0.0144
0	1	0	0	1	0.2016
0	1	0	1	2	0.3024
0	1	1	0	2	0.0864
0	1	1	1	3	0.1296
1	0	0	0	1	0.0056
1	0	0	1	2	0.0084
1	0	1	0	2	0.0024
1	0	1	1	3	0.0036
1	1	0	0	2	0.0504
1	1	0	1	3	0.0756
1	1	1	0	3	0.0216
1	1	1	1	4	0.0324

© 2015 www.LNTwww.de

- Die Wahrscheinlichkeit  $\Pr[w_H(\underline{x}) \text{ ist gerade}]$  ist gleich der Summe der blauen Zahlen in der letzten Spalte. Die Summe der roten Zahlen ergibt  $\Pr[w_H(\underline{x}) \text{ ist ungerade}] = 1 - \Pr[w_H(\underline{x}) \text{ ist gerade}]$ .

Gallager hat das Problem in analytischer Weise gelöst:

$$\Pr[w_H(\underline{x}) \text{ ist gerade}] = 1/2 \cdot [1 + \pi],$$

$$\Pr[w_H(\underline{x}) \text{ ist ungerade}] = 1/2 \cdot [1 - \pi].$$

Hierbei ist die folgende Hilfsgröße verwendet:

$$\pi = \prod_{i=1}^n (1 - 2p_i).$$

Die Gleichung wendet man zum Beispiel an, um die extrinsischen  $L$ -Werte eines *Single Parity-check Codes* zu berechnen. Wie bereits in **Aufgabe A4.4** dargelegt, lautet nämlich der extrinsische  $L$ -Wert mit dem Hamming-Gewicht  $w_H$  der verkürzten Folge  $\underline{x}^{(-i)}$ :

$$L_E(i) = \ln \frac{\Pr[w_H(\underline{x}^{(-i)}) \text{ ist gerade} | \underline{y}]}{\Pr[w_H(\underline{x}^{(-i)}) \text{ ist ungerade} | \underline{y}]}$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass man für  $L_E(i)$  nur die anderen Symbole ( $j \neq i$ ) heranziehen darf:

$$\underline{x}^{(-i)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 4.1** und ist als Ergänzung zur **Aufgabe A4.4** gedacht.

### Fragebogen zu "Z4.4: Ergänzung zur Aufgabe A4.4"

a) Wir betrachten den Vektor  $\underline{x} = (x_1, x_2) \Rightarrow n = 2$  mit  $x_i \in \{0, 1\}$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $\underline{x}$  eine gerade Anzahl an Einsen beinhaltet?

$$p_1 = 0.2, p_2 = 0.9: \Pr[\text{gerades } w_H] =$$

b) Berechnen Sie die gleiche Wahrscheinlichkeit für  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow n = 3$ .

$$\dots, p_3 = 0.3: \Pr[\text{gerades } w_H] =$$

c) Nun gelte  $n = 4$  und  $p_1 = 0.2, p_2 = 0.9, p_3 = 0.3, p_4 = 0.6$ . Berechnen Sie nach der Gallager-Gleichung folgende Größen:

$$\Pr(\text{blau}) = \Pr[w_H(\underline{x}) \text{ ist gerade}] =$$

$$\Pr(\text{rot}) = \Pr[w_H(\underline{x}) \text{ ist ungerade}] =$$

$$Q = \Pr(\text{blau})/\Pr(\text{rot}) =$$

d) Wie groß ist der extrinsische  $L$ -Wert für das Symbol  $i = 5$  beim SPC (5, 4, 2) mit  $p_1 = 0.2, p_2 = 0.9, p_3 = 0.3, p_4 = 0.6, p_5 = 0.9$ ?

$$L_E(i = 5) =$$

e) Wie ändert sich  $L_E(i = 5)$ , wenn man stattdessen von  $p_5 = 0.1$  ausgeht?

- $L_E(i = 5)$  wird größer.
- $L_E(i = 5)$  wird kleiner.
- $L_E(i = 5)$  wird gegenüber Teilaufgabe (d) nicht verändert.

### A4.5: Verschiedene $L_E(i)$ -Ansätze

Wir gehen wie im **Theorieteil** vom *Single Parity-check Code* SPC (3, 2, 2) aus. Die möglichen Codeworte sind:

$$\underline{x} \in \{\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3\} \text{ mit}$$

$$\underline{x}_0 = (0, 0, 0) \text{ bzw. } \underline{x}_0 = (+1, +1, +1),$$

$$\underline{x}_1 = (0, 1, 1) \text{ bzw. } \underline{x}_1 = (+1, -1, -1),$$

$$\underline{x}_2 = (1, 0, 1) \text{ bzw. } \underline{x}_2 = (-1, +1, -1),$$

$$\underline{x}_3 = (1, 1, 0) \text{ bzw. } \underline{x}_3 = (-1, -1, +1).$$

In der Aufgabe verwenden wir meist die zweite (bipolare) Darstellung der Cdesymbole:  $x_i \in \{+, -1\}$ .

	$L_1$	$L_E(1)$	$L_2$	$L_E(2)$	$L_3$	$L_E(3)$
$I = 0$	+1.0000	-0.1829	+0.4000	-0.4337	-1.0000	+0.1829
$I = 1$	+0.8171	+0.0130	-0.0337	-0.3023	-0.8171	-0.0130
$I = 2$	+0.8301	+0.1309	-0.3360	-0.3110	-0.8301	-0.1309
$I = 3$	+0.9610	+0.2810	-0.6470	-0.4032	-0.9610	-0.2810
$I = 4$	+1.2420	...	-1.0502	...	-1.2420	...

© 2015 www.LNTwww.de

Es ist nicht so, dass der SPC (3, 2, 2) von großem praktischen Interesse wäre, da zum Beispiel bei *Hard Decision* wegen  $d_{\min} = 2$  nur ein Fehler erkannt und kein einziger korrigiert werden kann. Der Code ist aber wegen des überschaubaren Aufwands für Übungs- und Demonstrationszwecke gut geeignet.

Mit **iterativer symbolweiser Decodierung** kann man auch einen Fehler korrigieren. Beim vorliegenden Code müssen die extrinsischen  $L$ -Werte  $\underline{L}_E = L_E(1), L_E(2), L_E(3)$  entsprechend der Gleichung

$$L_E(i) = \ln \frac{\Pr [w_H(\underline{x}^{(-i)}) \text{ ist gerade}]}{\Pr [w_H(\underline{x}^{(-i)}) \text{ ist ungerade}]}$$

berechnet werden. Hierbei bezeichnet  $\underline{x}^{(-i)}$  alle Symbole mit Ausnahme von  $x_i$  und ist somit ein Vektor der Länge  $n - 1 = 2$ .

Als den **ersten  $L_E(i)$ -Ansatz** bezeichnen wir die Vorgehensweise entsprechend

$$L_E(1) = 2 \cdot \tanh^{-1} [\tanh(L_2/2) \cdot \tanh(L_3/2)] ,$$

$$L_E(2) = 2 \cdot \tanh^{-1} [\tanh(L_1/2) \cdot \tanh(L_3/2)] ,$$

$$L_E(3) = 2 \cdot \tanh^{-1} [\tanh(L_1/2) \cdot \tanh(L_2/2)] .$$

Dieser erste  $L_E(i)$ -Ansatz liegt der obigen Ergebnistabelle (rote Einträge) zugrunde, wobei von folgenden *Aposteriori-L*-Werten ausgegangen wird:

$$\underline{L}_{APP} = (+1.0, +0.4, -1.0) \quad \text{kurz: } L_1 = +1.0, L_2 = +0.4, L_3 = -1.0 .$$

Die extrinsischen  $L$ -Werte für die nullte Iteration ergeben sich zu  $L_E(1) = -0.1829, L_E(2) = -0.4337$  und  $L_E(3) = +0.1829$ . Diese Werte werden in der **Aufgabe Z4.5** berechnet  $\Rightarrow$  siehe **Musterlösung**.

Die *Aposteriori*-Werte zu Beginn der ersten Iteration sind damit

$$\underline{L}^{(I=1)} = \underline{L}^{(I=0)} + \underline{L}_E^{(I=0)} = (+0.8171, -0.0337, -0.8171) .$$

Daraus ergeben sich die neuen extrinsischen Werte für die Iterationsschleife  $I = 1$  wie folgt:

$$L_E(1) = 2 \cdot \tanh^{-1} [\tanh(-0.0337/2) \cdot \tanh(-0.8171/2)] = 0.0130 = -L_E(3) ,$$

$$L_E(2) = 2 \cdot \tanh^{-1} [\tanh(+0.8171/2) \cdot \tanh(-0.8171/2)] = -0.3023 .$$

Weiter erkennt man aus der oberen Tabelle:



- Eine harte Entscheidung entsprechend den Vorzeichen vor der ersten Iteration  $\Rightarrow I = 0$  scheitert, da  $(+1, +1, -1)$  kein gültiges SPC  $(3, 2, 2)$ -Codewort ist.
- Schon nach  $I = 1$  Iterationen liefert eine harte Entscheidung ein gültiges Codewort, nämlich  $\underline{x}_2 = (+1, -1, -1)$ . Auch in späteren Grafiken sind erstmals richtige HD-Entscheidungen blau hinterlegt.
- Harte Entscheidungen nach weiteren Iterationen ( $I \geq 2$ ) führen jeweils zum gleichen Codewort  $\underline{x}_2$ . Diese Aussage gilt nicht nur für dieses Beispiel, sondern ganz allgemein.

Daneben betrachten wir hier einen **zweiten  $L_E(i)$ -Ansatz**, der hier am Beispiel für das erste Symbol ( $i = 1$ ) angegeben wird:

$$\begin{aligned} \text{sign}[L_E(1)] &= \text{sign}[L_E(2)] \cdot \text{sign}[L_E(3)] , \\ |L_E(1)| &= \text{Min} (|L_E(2)|, |L_E(3)|) . \end{aligned}$$

Dieser Ansatz basiert auf der Annahme, dass die Zuverlässigkeit von  $L_E(i)$  im wesentlichen durch das unzuverlässige Nachbarsymbol bestimmt wird. Das bessere (größere) Eingangs-LLR wird dabei völlig außer Acht gelassen. – Betrachten wir hierzu zwei Beispiele:

Für  $L_2 = 1.0$  und  $L_3 = 5.0$  ergibt sich beispielsweise

- nach dem ersten Ansatz:

$$L_E(1) = 2 \cdot \tanh^{-1} [\tanh(0.5) \cdot \tanh(2.5)] = 2 \cdot \tanh^{-1}(0.4559) = 0.984 ,$$

- nach dem zweiten Ansatz:

$$|L_E(1)| = \text{Min} (1.0, 5.0) = 1.000 .$$

Dagegen erhält man für  $L_2 = L_3 = 1.0$

- nach dem ersten Ansatz:

$$L_E(1) = 2 \cdot \tanh^{-1} [\tanh(0.5) \cdot \tanh(0.5)] = 2 \cdot \tanh^{-1}(0.2135) = 0.433 ,$$

- nach dem zweiten Ansatz:

$$|L_E(1)| = \text{Min} (1.0, 1.0) = 1.000 .$$

Man erkennt die deutliche Diskrepanz zwischen beiden Ansätzen. Der zweite Ansatz (Näherung) ist deutlich positiver als der erste (richtige) Ansatz. Wichtig ist eigentlich aber nur, dass die Iterationen zum gewünschten Decodierergebnis führt.

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 4.1**. Behandelt wird hier ausschließlich der Lösungsansatz 2. Zum ersten Lösungsansatz verweisen wir auf **Aufgabe Z4.5**.

### Fragebogen zu "A4.5: Verschiedene $L_E(i)$ -Ansätze"

a) Es gelte  $\underline{L} = (+1.0, +0.4, -1.0)$ . Ermitteln Sie die extrinsischen  $L$ -Werte nach dem zweiten  $L_E(i)$ -Ansatz ohne vorherige Iteration.

$$I = 0: L_E(1) =$$

$$L_E(2) =$$

$$L_E(3) =$$

b) Wie lauten die Aposteriori- $L$ -Werte für die erste Iteration?

$$I = 1: L_1 =$$

$$L_2 =$$

$$L_3 =$$

c) Welche der folgenden Aussagen gelten für  $\underline{L} = (+1.0, +0.4, -1.0)$ ?

- Hard Decision* bei  $I = 1$  führt zum Codewort  $\underline{x}_1 = (+1, -1, -1)$ .
- Daran ändert sich auch nach weiteren Iterationen nichts.
- Weitere Iterationen erhöhen die Zuverlässigkeit für  $\underline{x}_1$  nicht.

d) Welche der folgenden Aussagen gelten für  $\underline{L} = (+0.6, +1.0, -0.4)$ ?

- Die iterative Decodierung führt zum Ergebnis  $\underline{x}_0 = (+1, +1, +1)$ .
- Die iterative Decodierung führt zum Ergebnis  $\underline{x}_2 = (-1, +1, -1)$ .
- Dieses Ergebnis liefert auch *Hard Decision* ab  $I = 1$ .

e) Welche der folgenden Aussagen gelten für  $\underline{L} = (+0.6, +1.0, -0.8)$ ?

- Die iterative Decodierung führt zum Ergebnis  $\underline{x}_0 = (+1, +1, +1)$ .
- Die iterative Decodierung führt zum Ergebnis  $\underline{x}_2 = (-1, +1, -1)$ .
- Dieses Ergebnis liefert auch *Hard Decision* ab  $I = 1$ .

f) Welche der folgenden Aussagen gelten für  $\underline{L} = (+0.6, +1.0, -0.6)$ ?

- Die iterative Decodierung führt zum Ergebnis  $\underline{x}_0 = (+1, +1, +1)$ .
- Die iterative Decodierung führt zum Ergebnis  $\underline{x}_2 = (-1, +1, -1)$ .
- Die iterative Decodierung führt nicht zum Ziel.

## Z4.5: Tangens Hyperbolicus und Inverse

Im **Theorieteil** wurde am Beispiel des *Single Parity-check Codes* gezeigt, dass der extrinsische  $L$ -Wert bezüglich des  $i$ -ten Symbols wie folgt definiert ist:

$$L_E(i) = \ln \frac{\Pr [w_H(\underline{x}^{(-i)}) \text{ ist gerade} | \underline{y}]}{\Pr [w_H(\underline{x}^{(-i)}) \text{ ist ungerade} | \underline{y}]}$$

Diese Gleichung ist auch bei vielen anderen Kanalcodes anwendbar.

Das Codewort  $\underline{x}^{(-i)}$  in dieser Definition beinhaltet alle Symbole mit Ausnahme von  $x_i$  und hat somit die Länge  $n - 1$ .

In der **Aufgabe A4.4** wurde gezeigt, dass der extrinsische  $L$ -Wert auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$L_E(i) = \ln \frac{1 + \pi}{1 - \pi}, \quad \text{mit } \pi = \prod_{j \neq i}^n \tanh(L_j/2).$$

In dieser Aufgabe soll nun nach einer weiteren Berechnungsmöglichkeit gesucht werden.

**Hinweis:** Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.1**. Rechts oben sehen Sie eine Tabelle mit den Zahlenwerten der Funktion  $y = \tanh(x) \Rightarrow \text{Tangens Hyperbolicus}$ . Mit den rot hinterlegten Zeilen kann man die Werte der inversen Funktion  $x = \tanh^{-1}(y)$  ablesen, die für die Teilaufgabe (e) benötigt werden.

Argument $x$	$y = \tanh(x)$
0.0	0.0000
0.0915	0.0912
0.1	0.0997
0.2	0.1974
0.2168	0.2135
0.3	0.2913
0.4	0.3799
0.5	0.4621
0.6	0.5370
0.7	0.6044
0.8	0.6640
0.9	0.7163
1.0	0.7616

© 2015 www.LNTwww.de

### Fragebogen zu "ZA.5: Tangens Hyperbolicus und Inverse"

a) Es gelte  $\underline{L}_{APP} = (+1.0, +0.4, -1.0)$ . Berechnen Sie die extrinsischen  $L$ -Werte  
 $\Rightarrow L_E = (L_E(1), L_E(2), L_E(3))$  nach der vorne angegebenen Gleichung: .

$$L_E(1) =$$

$$L_E(2) =$$

$$L_E(3) =$$

b) Welche Eigenschaften weist die Funktion  $y = \tanh(x)$  auf?

- Es gilt  $\tanh(x) = (e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x})$ .
- Es gilt  $\tanh(x) = (1 - e^{-2x}) / (1 + e^{-2x})$ .
- Die Funktion  $y = \tanh(x)$  ist für alle  $x$ -Werte definiert.
- Es gilt  $y_{\min} = 0$  und  $y_{\max} \rightarrow \infty$ .
- Es gilt  $y_{\min} = -1$  und  $y_{\max} = +1$ .

c) Welche Eigenschaften weist die inverse Funktion  $x = \tanh^{-1}(y)$  auf?

- Die Funktion  $x = \tanh^{-1}(y)$  ist für alle  $y$ -Werte definiert.
- Es gilt  $x = \tanh^{-1}(y) = 1/2 \cdot \ln [(1 + y) / (1 - y)]$ .
- Es gilt  $x_{\min} = -1$  und  $x_{\max} = +1$ .
- Es gilt  $x_{\min} \rightarrow -\infty$  und  $x_{\max} \rightarrow +\infty$ .

d) Wie lässt sich  $L_E(i)$  auch darstellen? Es sei  $\pi$  wie auf der Angabenseite definiert.

- Es gilt  $L_E(i) = \tanh^{-1}(\pi)$ .
- Es gilt  $L_E(i) = 2 \cdot \tanh^{-1}(\pi)$ .
- Es gilt  $L_E(i) = 2 \cdot \tanh^{-1} \ln [(1 + \pi) / (1 - \pi)]$ .

e) Berechnen Sie die extrinsischen  $L$ -Werte mit der Gleichung gemäß Aufgabe (d).  
Verwenden Sie hierzu die Tabelle auf der Angabenseite.

$$L_E(1) =$$

$$L_E(2) =$$

$$L_E(3) =$$