A4.6: Produktcode–Generierung

Es soll ein Produktcode (42, 12) generiert werden, der auf folgenden Komponentencodes aufbaut:

- dem Hammingcode (7, 4, 3) $\Rightarrow$ C_1,
- dem verkürzten Hamming–Code (6, 3, 3) $\Rightarrow$ C_2.

Die entsprechenden Codetabellen sind rechts angegeben, wobei jeweils drei Zeilen unvollständig sind. Diese sollen von Ihnen ergänzt werden.

Das zu einem Informationsblock $\underline{u}$ gehörige Codewort ergibt sich allgemein entsprechend der Gleichung $\underline{x} = \underline{u} \cdot \mathbf{G}$. Wie auch in der **Aufgabe Z4.6** wird hier von folgenden Generatormatrizen ausgegangen:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Codeworte von C_1 Hamming-Code (7, 4)	Codeworte von C_2 verkürzt auf (6, 3)
(0, 0, 0, 0, ?, ?, ?)	
(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)	
(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)	
(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)	
(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)	(0, 0, 0, ?, ?, ?)
(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)	(0, 0, 1, ?, ?, ?)
(0, 1, 1, 0, ?, ?, ?)	(0, 1, 0, 1, 0, 1)
(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0)	(0, 1, 1, 1, 1, 0)
(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)	(1, 0, 0, 1, 1, 0)
(1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)	(1, 0, 1, ?, ?, ?)
(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)	(1, 1, 0, 0, 1, 1)
(1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)	(1, 1, 1, 0, 0, 0)
(1, 1, 0, 0, 0, 1, 1)	
(1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)	
(1, 1, 1, 0, ?, ?, ?)	
(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	

In der gesamten Aufgabe gelte für den Informationsblock:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind entsprechend der Nomenklatur auf der **ersten Theorieseite:**

- die Parity–Matrix $\mathbf{P}^{(1)}$ bezüglich des horizontalen Codes C_1,
- die Parity–Matrix $\mathbf{P}^{(2)}$ bezüglich des vertikalen Codes C_2,
- die Checks–on–Checks–Matrix $\mathbf{P}^{(12)}$.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum **Kapitel 4.2.**

Fragebogen zu "A4.6: Produktcode–Generierung"

a) Welche Ergebnisse liefert die Zeilencodierung mit dem (7, 4, 3)–Code C_1?

- [ ] Erste Zeile: $\underline{u}$ = (0, 1, 1, 0) ⇒ $\underline{x}$ = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1).
- [ ] Zweite Zeile: $\underline{u}$ = (0, 0, 0, 0) ⇒ $\underline{x}$ = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).
- [ ] Dritte Zeile: $\underline{u}$ = (1, 1, 1, 0) ⇒ $\underline{x}$ = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0).

b) Welche Ergebnisse liefert die Spaltencodierung mit dem (6, 3, 3)–Code C_2?

- [ ] Erste Spalte: $\underline{u}$ = (0, 0, 1) ⇒ $\underline{x}$ = (0, 0, 1, 0, 1, 1).
- [ ] Zweite Spalte: $\underline{u}$ = (1, 0, 1) ⇒ $\underline{x}$ = (1, 0, 1, 1, 0, 1).
- [ ] Dritte Spalte: $\underline{u}$ = (1, 0, 1) ⇒ $\underline{x}$ = (1, 1, 0, 0, 1, 1).
- [ ] Vierte Spalte: $\underline{u}$ = (0, 0, 0) ⇒ $\underline{x}$ = (0, 0, 0, 0, 0, 0).

c) Welche Aussagen gelten für die Checks–on–Checks–Matrix?

- [ ] Die erste Zeile lautet (1, 0, 1) und die erste Spalte (1, 1, 0).
- [ ] Die zweite Zeile lautet (1, 0, 1) und die zweite Spalte (0, 0, 0).
- [ ] Die dritte Zeile lautet (0, 0, 0) und die dritte Spalte (0, 0, 0).

Z4.6: Grundlagen der Produktcodes

Wir betrachten hier einen Produktcode entsprechend der Beschreibung auf der **ersten Theorieseite.** Die beiden Komponentencodes C_1 und C_2 sind durch die rechts angegebenen Generatormatrizen $\mathbf{G}_1$ und $\mathbf{G}_2$ festgelegt.

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf das **Kapitel 4.2.** Die beiden Komponentencodes C_1 und C_2 wurden auch in der **Aufgabe A4.6** betrachtet.

Fragebogen zu "Z4.6: Grundlagen der Produktcodes"

a) Welche Aussagen erlaubt die Generatormatrix $\mathbf{G}_1$ über den Code C_1?

- [ ] Die Coderate von C_1 ist $R_1 = 4/7$.
- [ ] Der Code C_1 ist systematisch.
- [ ] C_1 ist ein verkürzter Hamming–Code.
- [ ] Die minimale Distanz dieses Codes ist $d_1 = 3$.

b) Welche Aussagen erlaubt die Generatormatrix $\mathbf{G}_2$ über den Code C_2?

- [ ] Die Coderate von C_2 ist $R_2 = 4/7$.
- [ ] Der Code C_2 ist systematisch.
- [ ] C_2 ist ein verkürzter Hamming–Code.
- [ ] Die minimale Distanz dieses Codes ist $d_2 = 3$.

c) Geben Sie die Parameter des Produktcodes $C = C_1 \times C_2$ an.

$\boldsymbol{k}$ =

$\boldsymbol{n}$ =

$\boldsymbol{d}$ =

$\boldsymbol{R}$ =

A4.7: Produktcode–Decodierung

Wir betrachten wie in **Aufgabe A4.6** einen Produktcode, basierend auf

- dem Hammingcode (7, 4, 3) $\Rightarrow$ Code C_1,
- dem verkürzten Hammingcode (6, 3, 3) $\Rightarrow$ C_2.

Die Prüfmatrizen dieser Codes lauten:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die *Hard Decision Decodierung* dieses Codes geschieht vorzugsweise iterativ, indem abwechselnd alle Zeilen und anschließend alle Spalten syndromdecodiert werden.

Hinweis: Die Syndromdecodierung soll entsprechend der **zweiten Theorieseite** von Kapitel 4.2 erfolgen.

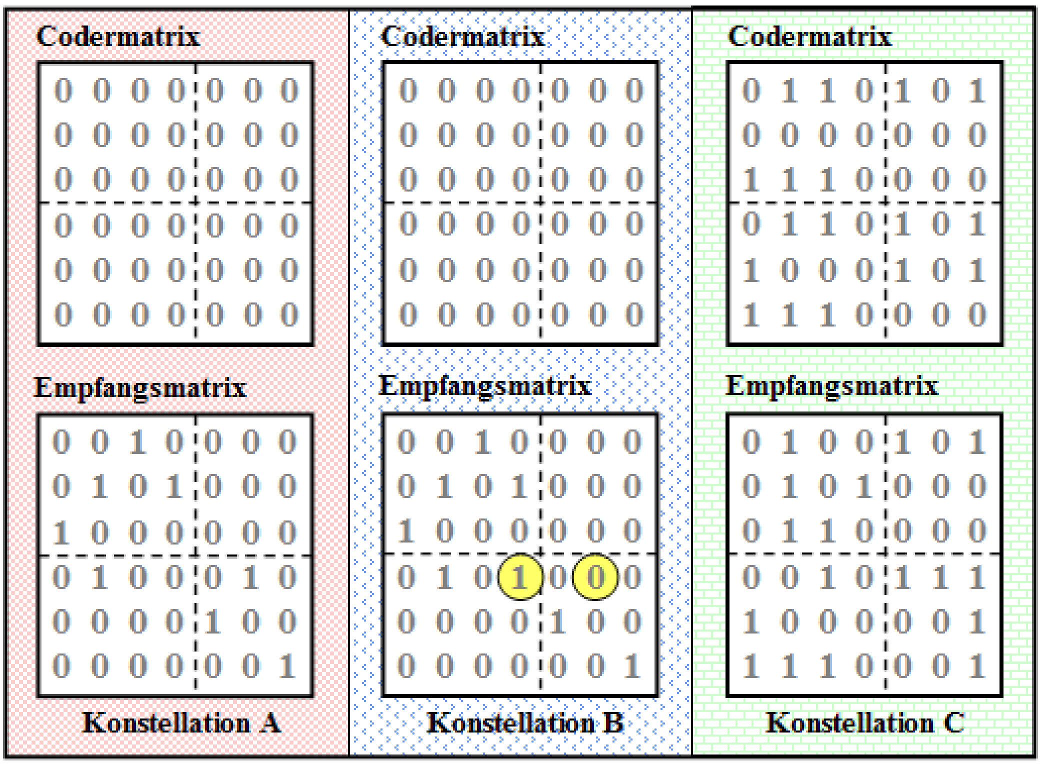
Hammingcode (7, 4, 3)

Syndrom $\underline{s}_\mu$	Nebenklassenanführer $\underline{e}_\mu$
$\underline{s}_0 = (0, 0, 0)$	$\underline{e}_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{s}_1 = (0, 0, 1)$	$\underline{e}_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$
$\underline{s}_2 = (0, 1, 0)$	$\underline{e}_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$
$\underline{s}_3 = (0, 1, 1)$	$\underline{e}_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{s}_4 = (1, 0, 0)$	$\underline{e}_4 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$
$\underline{s}_5 = (1, 0, 1)$	$\underline{e}_5 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{s}_6 = (1, 1, 0)$	$\underline{e}_6 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{s}_7 = (1, 1, 1)$	$\underline{e}_7 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$

Verkürzter Hammingcode (6, 3, 3)

Syndrom $\underline{s}_\mu$	Nebenklassenanführer $\underline{e}_\mu$
$\underline{s}_0 = (0, 0, 0)$	$\underline{e}_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{s}_1 = (0, 0, 1)$	$\underline{e}_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$
$\underline{s}_2 = (0, 1, 0)$	$\underline{e}_2 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$
$\underline{s}_3 = (0, 1, 1)$	$\underline{e}_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$
$\underline{s}_4 = (1, 0, 0)$	$\underline{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$
$\underline{s}_5 = (1, 0, 1)$	$\underline{e}_5 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{s}_6 = (1, 1, 0)$	$\underline{e}_6 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{s}_7 = (1, 1, 1)$	$\underline{e}_7 = (1, 0, 0, 0, 0, 1)$

Die folgende Grafik zeigt drei verschiedene Coder– und Empfangsmatrizen, die in den Teilaufgaben (a), (b) und (c) zu analysieren sind. Wir benennen diese mit Konstellation (A), (B) und (C). Gelb markiert sind die Unterschiede der Empfangsmatrix von Konstellation (B) gegenüber (A). In beiden Fällen besteht die Codermatrix nur aus Nullen. Die Codermatrix von (C) wurde in **Aufgabe A4.6** ermittelt.



Die Syndromdecodierung (eindimensionaler) Blockcodes wurde bereits in **Kapitel 1.5** behandelt.

Hier eine kurze Zusammenfassung und eine Adaption an den zweidimensionalen Fall:

- Aus dem Empfangswort $\underline{y}$ (einer Zeile bzw. einer Spalte der vorgegebenen Empfangsmatrix) wird das Syndrom entsprechend $\underline{s} = \underline{y} \cdot \mathbf{H}_1^{\rm T}$ bzw. $\underline{s} = \underline{y} \cdot \mathbf{H}_2^{\rm T}$ gebildet.
- Mit dem Ergebnis $\underline{s} = \underline{s}_\mu$ kann man in obigen Tabellen den so genannten Nebenklassenanführer $\underline{e}_\mu$ ablesen. Das korrigierte Codewort ist dann $\underline{y} + \underline{e}_\mu$.

Fragebogen zu "A4.7: Produktcode–Decodierung"

a) Ist die 2D–Empfangsmatrix **A** decodierbar?

- Ja, nach der ersten Decodierung in horizontaler Richtung.
- Ja, nach der ersten Decodierung in vertikaler Richtung.
- Ja, nach der zweiten Decodierung in horizontaler Richtung.
- Ja, nach der zweiten Decodierung in vertikaler Richtung.
- Nein.

b) Ist die 2D–Empfangsmatrix **B** decodierbar?

- Ja, nach der ersten Decodierung in horizontaler Richtung.
- Ja, nach der ersten Decodierung in vertikaler Richtung.
- Ja, nach der zweiten Decodierung in horizontaler Richtung.
- Ja, nach der zweiten Decodierung in vertikaler Richtung.
- Nein.

c) Ist die 2D–Empfangsmatrix **C** decodierbar? Versuchen Sie, die Lösung über eine Äquivalenz zur Aufgabe (a) oder (b) zu finden.

- Ja, nach der ersten Decodierung in horizontaler Richtung.
- Ja, nach der ersten Decodierung in vertikaler Richtung.
- Ja, nach der zweiten Decodierung in horizontaler Richtung.
- Ja, nach der zweiten Decodierung in vertikaler Richtung.
- Nein.

Z4.7: Syndromdecodierung – Prinzip

Syndrom $\underline{s}_\mu$	Nebenklassenanführer $\underline{e}_\mu$
$\underline{s}_0 = (0, 0, 0)$	$\underline{e}_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{s}_1 = (0, 0, 1)$	$\underline{e}_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$
$\underline{s}_2 = (0, 1, 0)$	$\underline{e}_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$
$\underline{s}_3 = (0, 1, 1)$	$\underline{e}_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{s}_4 = (1, 0, 0)$	$\underline{e}_4 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$
$\underline{s}_5 = (1, 0, 1)$	$\underline{e}_5 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{s}_6 = (1, 1, 0)$	$\underline{e}_6 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{s}_7 = (1, 1, 1)$	$\underline{e}_7 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$

Hammingcode (7, 4, 3)

Die Syndromdecodierung wurde bereits im **Kapitel 1.5** ausführlich behandelt. Bei allen Hammingcodes, die ja bekanntlich perfekt sind, ergibt sich hiermit ein gleich gutes Decodierergebnis wie mit der (im allgemeinen) deutlich komplizierteren Maximum–Likelihood–Detektion.

Bei der Syndromdecodierung geht man wie folgt vor:

- Man bildet aus dem Empfangsvektor $\underline{y}$ der Länge n und der Prüfmatrix $\mathbf{H}$ das Syndrom:

$$\underline{s} = \underline{y} \cdot \mathbf{H}^{\rm T} \in {\rm GF}(2^m)\,, \qquad {\rm Anmerkung:}\ m = n - k\,.$$

- Das Empfangswort $\underline{y} = \underline{x}$ (Codewort) + $\underline{e}$ (Fehlervektor) ist nicht notwendigermaßen ein Element von GF(2^m), sicher aber ein Element von GF(2^n) und es gilt wegen $\underline{x} \cdot \mathbf{H}^{\rm T} = \underline{0}$ gleichermaßen:

$$\underline{s} = \underline{e} \cdot \mathbf{H}^{\rm T}\,.$$

- Viele Fehlermuster $\underline{e}$ führen zum gleichen Syndrom $\underline{s}$. Man fasst nun diejenigen Fehlermuster mit gleichem Syndrom $\underline{s}_\mu$ zur Nebenklasse Ψ_μ zusammen.

- Als Nebenklassenanführer $\underline{e}_\mu$ bezeichnet man denjenigen Fehlervektor, der innerhalb der Klasse Ψ_μ das geringste Hamming–Gewicht aufweist und dementsprechend am wahrscheinlichsten ist.

Die Tabelle oben zeigt die Liste der Nebenklassenanführer $\underline{e}_\mu$ für die einzelnen $\underline{s}_\mu$ beim Hammingcode (7, 4, 3). Diese Tabelle wird für die Teilaufgabe (a) benötigt.

Eine ähnliche Tabelle soll für den verkürzten Hammingcode (6, 3, 3) erstellt werden. Dieser wurde bereits in **Aufgabe A4.6** sowie **Aufgabe Z4.6** benutzt und ist durch seine Generatormatrix vorgegeben:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Im Gegensatz zum originalen (7, 4, 3)–Hammingcode ist der verkürzte (6, 3, 3)–Hammingcode nicht perfekt, so dass sich nicht für alle möglichen $\underline{s}_\mu$ ein Einfehler–Nebenklassenanführer $\underline{e}_\mu$ finden lässt.

Hinweis: Die Aufgabe bezieht sich auf **Kapitel 4.2** und ist als Ergänzung zur **Aufgabe A4.7** gedacht. Ähnliche Aufgabenstellungen wurden in **Aufgabe A1.11** und **Aufgabe Z1.11** im Kapitel 1.5 behandelt.

Der Zusammenhang zwischen der Generatormatrix $\mathbf{G}$ und der Prüfmatrix $\mathbf{H}$ von systematischen Codes ist in **Kapitel 1.4** angegeben.

Fragebogen zu "Z4.7: Syndromdecodierung – Prinzip"

a) Das Empfangswort sei $\underline{y} = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$, das Syndrom $\underline{s} = (0, 1, 1)$. Für welches Codewort $\underline{x}$ von C_1 entscheidet sich der Syndromdecoder?

- ○ Das wahrscheinlichste Codewort ist $\underline{x} = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$.
- ○ Das wahrscheinlichste Codewort ist $\underline{x} = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$.
- ○ Das wahrscheinlichste Codewort ist $\underline{x} = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$.

b) Welche Aussagen gelten für die Prüfmatrix **H** des verkürzten Codes C_2?

- ☐ Es handelt sich um eine 4×6–Matrix.
- ☐ Die erste Zeile dieser Matrix lautet: 110100.
- ☐ Die zweite Zeile dieser Matrix lautet: 101010.
- ☐ Die dritte Zeile dieser Matrix lautet: 011001.

c) Welches Syndrom $\underline{s}$ ergibt sich für das Fehlermuster $\underline{e} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$?

- ☐ $\underline{e} = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow \underline{s} = \underline{s}_0 = (0, 0, 0)$,
- ☐ $\underline{e} = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow \underline{s} = \underline{s}_1 = (0, 0, 1)$,
- ☐ $\underline{e} = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow \underline{s} = \underline{s}_7 = (1, 1, 1)$.

d) Welche der folgenden Aussagen stimmen bezüglich der Einfehlermuster?

- ☐ Einfehlermuster $\underline{e} = (1, 0, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow$ Syndrom $\underline{s}_6 = (1, 1, 0)$,
- ☐ Einfehlermuster $\underline{e} = (0, 1, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow$ Syndrom $\underline{s}_5 = (1, 0, 1)$,
- ☐ Einfehlermuster $\underline{e} = (0, 0, 1, 0, 0, 0) \Rightarrow$ Syndrom $\underline{s}_3 = (0, 1, 1)$,
- ☐ Einfehlermuster $\underline{e} = (0, 0, 0, 1, 0, 0) \Rightarrow$ Syndrom $\underline{s}_4 = (1, 0, 0)$,
- ☐ Einfehlermuster $\underline{e} = (0, 0, 0, 0, 1, 0) \Rightarrow$ Syndrom $\underline{s}_2 = (0, 1, 0)$,
- ☐ Einfehlermuster $\underline{e} = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \Rightarrow$ Syndrom $\underline{s}_1 = (0, 0, 1)$.

e) Welche der folgenden Fehlermuster führen zum Syndrom $\underline{s}_7 = (1, 1, 1)$?

- ☐ $\underline{e} = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$,
- ☐ $\underline{e} = (1, 0, 0, 0, 0, 1)$,
- ☐ $\underline{e} = (0, 1, 0, 0, 1, 0)$,
- ☐ $\underline{e} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$.