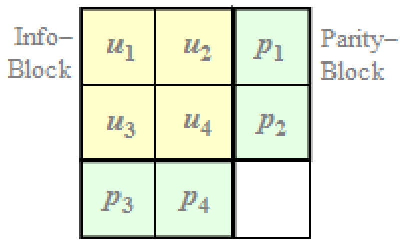
A4.11: Analyse von Prüfmatrizen



$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In nebenstehender Grafik ist oben ein Produktcode angegeben, der durch folgende Prüfgleichungen gekennzeichnet ist:

$$p_1 = u_1 \oplus u_2\,, \quad p_2 = u_3 \oplus u_4\,,$$
$$p_3 = u_1 \oplus u_3\,, \quad p_4 = u_2 \oplus u_4\,.$$

Darunter sind die Prüfmatrizen $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ und $\mathbf{H}_3$ angegeben. Zu prüfen ist, welche der Matrizen den gegebenen Produktcode entsprechend der Gleichung $\underline{x} = \underline{u} \cdot \mathbf{H}^{\rm T}$ richtig beschreiben, wenn von folgenden Definitionen ausgegangen wird:

- dem Codewort $\underline{x} = (u_1, u_2, u_3, u_4, p_1, p_2, p_3, p_4)$,
- dem Codewort $\underline{x} = (u_1, p_1, u_2, p_2, u_3, p_3, u_4, p_4)$.

Alle **H**–Matrizen beinhalten weniger Einsen als Nullen. Dies ist ein Kennzeichen der so genannten *Low–density Parity–check Codes* (kurz: LDPC–Codes). Bei den praxisrelevanten LDPC–Codes ist der Einsen–Anteil allerdings noch geringer als bei diesen Beispielen.

Weiterhin ist für die Aufgabe anzumerken:

- Ein (n, k)–Blockcode ist systematisch, wenn die ersten k Bit des Codewortes das Informationswort $\underline{u}$ beinhaltet. Mit der Codewortdefinition $\underline{x} = (u_1, u_2, u_3, u_4, p_1, p_2, p_3, p_4)$ muss dann die Prüfmatrix **H** mit einer $k{\times}k$–Diagonalmatrix enden.
- Ein *regulärer Code* (hinsichtlich LDPC–Anwendung) liegt vor, wenn das Hamming–Gewicht aller Zeilen ⇒ $w_{\rm Z}$ und das Hamming–Gewicht aller Spalten ⇒ $w_{\rm S}$ jeweils gleich ist. Andernfalls spricht man von einem *irregulären LDPC–Code*.
- Die Prüfmatrix **H** eines herkömmlichen linearen (n, k)–Blockcodes besteht aus exakt $m = n - k$ Zeilen und n Spalten. Bei den LDPC–Codes lautet dagegen die Forderung: $m \ge n - k$. Das Gleichheitszeichen trifft dann zu, wenn die m Prüfgleichungen statistisch unabhängig sind.
- Aus der Prüfmatrix **H** lässt sich eine untere Schranke für die Coderate R angeben:

$$R \ge 1 - \frac{{\rm E}[w_{\rm S}]}{{\rm E}[w_{\rm Z}]} \quad {\rm mit} \quad {\rm E}[w_{\rm S}] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} w_{\rm S}(i) \quad {\rm und} \quad {\rm E}[w_{\rm Z}] = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} w_{\rm Z}(j)\,.$$

  Diese Gleichung gilt für reguläre und irreguläre LDPC–Codes gleichermaßen, wobei bei den regulären Codes ${\rm E}[w_{\rm S}] = w_{\rm S}$ und ${\rm E}[w_{\rm Z}] = w_{\rm Z}$ berücksichtigt werden kann.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zu **Kapitel 4.4.**

Fragebogen zu "A4.11: Analyse von Prüfmatrizen"

a) Welche Prüfmatrix beschreibt den vorgegebenen Produktcode (obere Skizze)?

- [ ] $\mathbf{H}_1$ unter der Voraussetzung $\underline{x} = (u_1, u_2, u_3, u_4, p_1, p_2, p_3, p_4)$.
- [ ] $\mathbf{H}_1$ unter der Voraussetzung $\underline{x} = (u_1, p_1, u_2, p_2, u_3, p_3, u_4, p_4)$.
- [ ] $\mathbf{H}_2$ unter der Voraussetzung $\underline{x} = (u_1, p_1, u_2, p_2, u_3, p_3, u_4, p_4)$.
- [ ] $\mathbf{H}_3$ unter der Voraussetzung $\underline{x} = (u_1, p_1, u_2, p_2, u_3, p_3, u_4, p_4)$.

b) Für die restlichen Teilaufgaben soll stets von $\underline{x} = (u_1, u_2, u_3, u_4, p_1, p_2, p_3, p_4)$ ausgegangen werden. Welche Aussagen gelten für die Prüfmatrix $\mathbf{H}_1$?

- [ ] Der Code ist systematisch.
- [ ] Der Code ist regulär.
- [ ] Für die Coderate gilt $R > 1/2$.
- [ ] Für die Coderate gilt $R = 1/2$.

c) Welche Aussagen gelten für die Prüfmatrix $\mathbf{H}_3$?

- [ ] Es ist kein Zusammenhang zwischen $\mathbf{H}_1$ und $\mathbf{H}_3$ erkennbar.
- [ ] $\mathbf{H}_3$–Zeilen sind Linearkombinationen von je zwei $\mathbf{H}_1$–Zeilen.
- [ ] Die vier Prüfgleichungen gemäß $\mathbf{H}_3$ sind linear unabhängig.

d) Welche Aussagen gelten für den durch $\mathbf{H}_3$ gekennzeichneten Code?

- [ ] Der Code ist systematisch.
- [ ] Der Code ist regulär.
- [ ] Für die Coderate gilt $R \ge 1/2$.
- [ ] Die Coderate ist $R = 1/2$.

Z4.11: Coderate aus der Prüfmatrix

In dieser Aufgabe sollen die Coderaten der Codes C_1, C_2, C_3 und C_4 ermittelt werden, wobei die Codes allein durch ihre Prüfmatrizen gegeben sind. Eine untere Schranke für die Coderate R lautet:

$$R \ge 1 - \frac{\mathrm{E}[w_\mathrm{S}]}{\mathrm{E}[w_\mathrm{Z}]}\,.$$

Sind die m Prüfgleichungen aller Matrix–Zeilen linear unabhängig, so gilt in obiger Ungleichung das Gleichheitszeichen.

Verwendet ist hier die folgende Nomenklatur:

- $w_\mathrm{Z}(j)$ mit $1 \le j \le m$ ist das **Hamming–Gewicht** der j–ten Zeile der Prüfmatrix.
- Durch *Erwartungswertbildung* ergibt sich:

$$\mathrm{E}[w_\mathrm{Z}] = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} w_\mathrm{Z}(j)\,.$$

- Entsprechend gibt $w_\mathrm{S}(i)$ mit $1 \le i \le n$ das Hamming–Gewicht der i–ten Spalte von $\mathbf{H}$ an, mit dem Erwartungswert

$$\mathrm{E}[w_\mathrm{S}] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} w_\mathrm{S}(i)\,.$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&1&1&1&0\\ 1&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&1&1&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 1&0&0&1&1&1&0\\ 1&0&1&0&0&1&1\\ 1&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&1&1&0&1&0\\ 1&1&1&0&1&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.4.**

Fragebogen zu "Z4.11: Coderate aus der Prüfmatrix"

a) $\mathbf{H}_1$ beschreibt einen systematischen Code. Wie lauten dessen Parameter?

n =

k =

m =

b) Wie groß ist die Coderate des Codes C_1 mit der Prüfmatrix $\mathbf{H}_1$?

C_1: R =

c) Wie groß ist die Coderate des Codes C_2 mit der Prüfmatrix $\mathbf{H}_2$?

C_2: R =

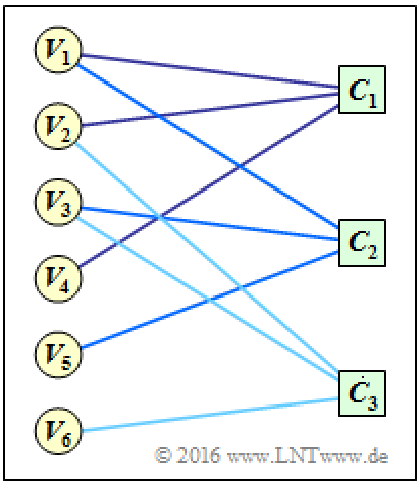
d) Wie groß ist die Coderate des Codes C_3 mit der Prüfmatrix $\mathbf{H}_3$?

C_3: R =

e) Wie groß ist die Coderate des Codes C_4 mit der Prüfmatrix $\mathbf{H}_4$?

C_4: R =

A4.12: Regulärer/irregulärer Tanner–Graph



Dargestellt ist ein Tanner–Graph eines Codes A mit

- den *Variable Nodes* (abgekürzt VNs) $V_1, \ ... \ , V_6$, wobei V_i das i–te Codewortbit kennzeichnet (egal, ob Informations– oder Paritybit) und der i–ten Spalte der Prüfmatrix entspricht;
- den *Check Nodes* (abgekürzt CNs) $C_1, \ ... \ , C_3$, die die Zeilen der $\mathbf{H}_\text{A}$–Matrix und damit die Prüfgleichungen repräsentieren.

Eine Verbindungslinie (englisch: *Edge*) zwischen V_i und C_j zeigt an, dass das i–te Codewortsymbol an der j–ten Prüfgleichung beteiligt ist. In diesem Fall ist das Element $h_{j,i}$ der Prüfmatrix gleich 1.

In der Aufgabe soll der Zusammenhang zwischen dem oben dargestellten Tanner–Graphen (gültig für den Code A) und der Matrix $\mathbf{H}_\text{A}$ angegeben werden. Außerdem ist der Tanner–Graph zu einer Prüfmatrix $\mathbf{H}_\text{B}$ aufzustellen, die sich aus $\mathbf{H}_\text{A}$ durch Hinzufügen einer weiteren Zeile ergibt. Diese ist so zu ermitteln, dass der zugehörige Code B regulär ist. Das bedeutet:

- Von allen *Variable Nodes* V_i (mit $1 \le i \le n$) gehen gleich viele Linien (*Edges*) ab, ebenso von allen *Check Nodes* C_j (mit $1 \le j \le m$).
- Die Hamming–Gewichte aller Zeilen von $\mathbf{H}_\text{B}$ sollen jeweils gleich sein (w_Z), ebenso die Hamming–Gewichte aller Spalten (w_S).
- Für die Rate des zu konstruierenden regulären Codes B gilt dann die folgende untere Schranke:

$$R \ge 1 - \frac{w_\text{S}}{w_\text{Z}}\hspace{0.05cm}.$$

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.4.**

Fragebogen zu "A4.12: Regulärer/irregulärer Tanner–Graph"

a) Wieviele Zeilen (m) und Spalten (n) hat die Prüfmatrix $\mathbf{H}_\text{A}$?

$\boldsymbol{m}$ =

$\boldsymbol{n}$ =

b) Welche Aussagen sind aufgrund des Tanner–Graphen zutreffend?

- ☐ Die erste Zeile der $\mathbf{H}_\text{A}$–Matrix ist „1 1 0 1 0 0”.
- ☐ Die zweite Zeile der $\mathbf{H}_\text{A}$–Matrix ist „1 0 1 0 0 1”.
- ☐ Die dritte Zeile der $\mathbf{H}_\text{A}$–Matrix ist „0 1 1 0 0 1”.

c) Welche Eigenschaften weist der Code A auf?

- ☐ Der Code ist systematisch.
- ☐ Der Code ist regulär.
- ☐ Die Coderate ist $R = 1/2$.
- ☐ Die Coderate ist $R = 1/3$.

d) Die Matrix $\mathbf{H}_\text{B}$ ergibt sich aus $\mathbf{H}_\text{A}$ durch Hinzufügen einer weiteren Zeile. Durch welche Zeile 4 ergibt sich ein regulärer Code B?

- ☐ Durch Hinzufügen von „0 0 0 1 1 1”.
- ☐ Durch Hinzufügen von „1 1 1 1 1 1”.
- ☐ Durch Hinzufügen irgend einer anderen Zeile.

e) Welche Eigenschaften weist der Code B auf?

- ☐ Der Code ist systematisch.
- ☐ Der Code ist regulär.
- ☐ Die Coderate ist $R = 1/2$.
- ☐ Die Coderate ist $R = 1/3$.

A4.13: Decodierung von LDPC–Codes

Die Aufgabe behandelt die Decodierung von LDPC–Codes und den **Message–passing Algorithmus** gemäß **Kapitel 4.4.**

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} i=1 & & & & & & & & & & & i=12 \end{array} \\
\mathbf{H} = \begin{array}{c} j=1 \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ j=9 \rightarrow \end{array} &
\begin{bmatrix}
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1\\
0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0\\
0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ausgangspunkt ist die dargestellte 9×12–Prüfmatrix **H**, die zu Beginn der Aufgabe als Tanner–Graph dargestellt werden soll. Dabei ist anzumerken:

- Die *Variable Nodes* (abgekürzt VNs) V_i bezeichnen die n Codewortbits.
- Die *Check Nodes* (abgekürzt CNs) C_j stehen für die m Prüfgleichungen.
- Eine Verbindung zwischen V_i und C_j zeigt an, dass das Matrixelement $h_{j,i}$ der Prüfmatrix **H** (in Zeile j, Spalte i) gleich 1 ist. Für $h_{j,i} = 0$ gibt es keine Verbindung zwischen V_i und C_j.
- Als die *Nachbarn* $N(V_i)$ von V_i bezeichnet man die Menge aller *Check Nodes* C_j, die mit V_i im Tanner–Graphen verbunden sind. Entsprechend gehören zu $N(C_j)$ alle *Variable Nodes* V_i mit einer Verbindung zu C_j.

Die Decodierung erfolgt abwechselnd bezüglich

- den *Variable Nodes* ⇒ *Variable Nodes Decoder* (VND), und
- den *Check Nodes* ⇒ *Check Nodes Decoder* (CND).

Hierauf wird in den Teilaufgaben (e) und (f) Bezug genommen.

Hinweis: Die Aufgabe gehört zum Themengebiet von **Kapitel 4.4.**

Fragebogen zu "A4.13: Decodierung von LDPC–Codes"

a) Wie viele *Variable Nodes* und *Check Nodes* sind zu berücksichtigen?

$I_{\rm VN}$ =

$I_{\rm CN}$ =

b) Welche der folgenden *Variable Nodes* und *Check Nodes* sind verbunden?

- ☐ V_5 und C_5.
- ☐ V_6 und C_4.
- ☐ C_6 und V_4.
- ☐ C_6 und V_i für $i > 9$.
- ☐ C_j und $V_{j–1}$ für $j > 6$.

c) Welche Aussagen treffen bezüglich der Nachbarn $N(V_i)$ und $N(C_j)$ zu?

- ☐ $N(V_1) = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$,
- ☐ $N(C_1) = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$,
- ☐ $N(V_9) = \{C_3, C_5, C_7\}$,
- ☐ $N(C_9) = \{V_3, V_5, V_7\}$.

d) Welche Aussagen treffen für den *Variable Node Decoder* (VND) zu?

- ☐ Zu Beginn (Iteration 0) werden die L–Werte der Knoten $V_1, ..., V_n$ entsprechend den Kanaleingangswerten y_i vorbelegt.
- ☐ Für den VND stellt $L(C_j \rightarrow V_i)$ Apriori–Information dar.
- ☐ Es gibt Analogien zwischen VND und der Decodierung eines *Single Parity–check Codes*.

e) Welche Aussagen treffen für den *Check Node Decoder* (CND) zu?

- ☐ Der CND liefert am Ende die gewünschten Aposteriori–L–Werte.
- ☐ Für den CND stellt $L(C_j \rightarrow V_i)$ Apriori–Information dar.
- ☐ Es gibt Analogien zwischen CND und der Decodierung eines *Single Parity–check Codes*.