# Musterlösung zur Aufgabe A3.1

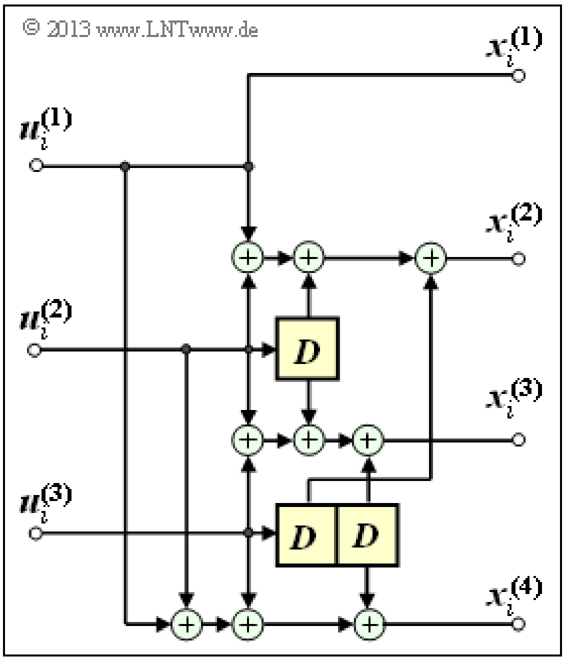
**a)** Zu jedem Takt werden $\underline{k = 3}$ neue Informationsbits verarbeitet und $\underline{n = 4}$ Codebits ausgegeben.

**b)** Wir bezeichnen hier die Einflusslängen der Informationssequenzen $\underline{u}^{(j)}$ mit $\nu_j$, wobei $1 \le j \le k = 3$ zu setzen ist. Dann gilt:

$$\nu_1 = 0 \text{ (für die erste Sequenz ist kein Schieberegister nötig)},$$
$$\nu_2 = 1, \quad \nu_3 = 2.$$

Die Gedächtnisordnung $m$ (oder kurz: das Gedächtnis) des Coders ist durch das längste Schieberegister gegeben $\Rightarrow$ $\underline{m = 2}$. Die Gesamteinflusslänge (oder kurz: Einflusslänge) entspricht der Anzahl der Speicherelemente der gesamten Codiererschaltung $\Rightarrow$ $\underline{\nu = 3}$.

**c)** Allgemein gilt für die $n = 4$ Codebits zum Schritt $i$:




$$x_i^{(1)} = u_i^{(1)},$$
$$x_i^{(2)} = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_{i-1}^{(2)} + u_{i-1}^{(3)},$$
$$x_i^{(3)} = u_i^{(2)} + u_i^{(3)} + u_{i-1}^{(2)} + u_{i-2}^{(3)},$$
$$x_i^{(4)} = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_i^{(3)} + u_{i-2}^{(3)}.$$

Im ersten Codierschritt sind alle Speicherelemente mit Nullen belegt. Deshalb kann man für $i = 1$ auf alle Bits mit den Indizes $i$–1 bzw. $i$–2 verzichten. Entsprechend der Angabe soll weiter gelten: $u_1^{(1)} = 0$, $u_1^{(2)} = 1$, $u_1^{(3)} = 1$. Damit erhält man durch Modulo–2–Addition:

$$x_1^{(1)} = u_1^{(1)} \underline{= 0},$$
$$x_1^{(2)} = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} = 0 + 1 \underline{= 1},$$
$$x_1^{(3)} = u_1^{(2)} + u_1^{(3)} = 1 + 1 \underline{= 0},$$
$$x_1^{(4)} = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + u_1^{(3)} = 0 + 1 + 1 \underline{= 0}.$$

**d)** Im Codierschritt $i = 3$ lauten die Informationsbits:

$$u_i^{(1)} = 1, \quad u_{i-1}^{(1)} = 1, \quad u_{i-2}^{(1)} = 0,$$
$$u_i^{(2)} = 0, \quad u_{i-1}^{(2)} = 1, \quad u_{i-2}^{(2)} = 1,$$
$$u_i^{(3)} = 1, \quad u_{i-1}^{(3)} = 0, \quad u_{i-2}^{(3)} = 1,$$

woraus sich folgende Codebits ergeben:

$$x_3^{(1)} \underline{= 1}, \quad x_3^{(2)} = 1 + 0 + 1 + 0 \underline{= 0},$$
$$x_3^{(3)} = 0 + 1 + 1 + 1 \underline{= 1}, \quad x_3^{(4)} = 1 + 0 + 1 + 1 \underline{= 1}.$$

Die Codebits im Codierschritt $i = 2$ wurden bereits auf der Angabenseite genannt. Hier folgt noch die Herleitung:

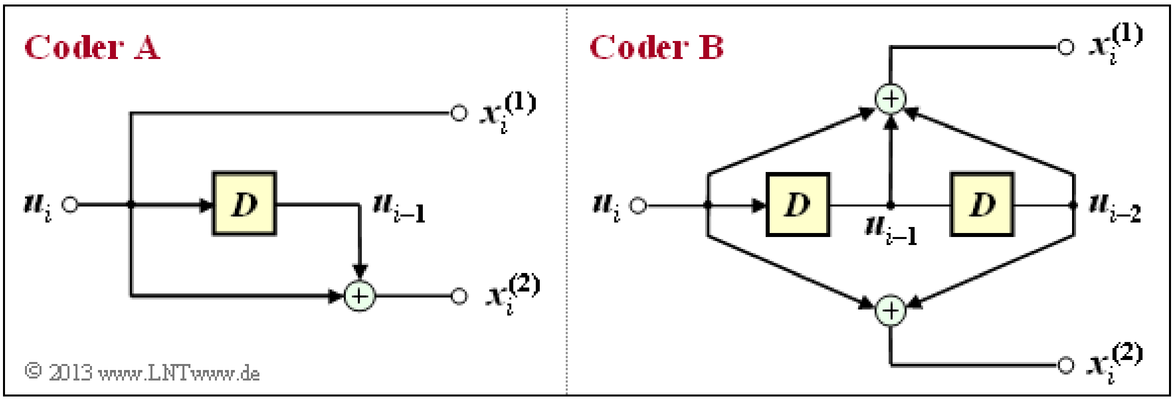
$$
\begin{aligned}
x_2^{(1)} &= u_2^{(1)} = 1\,,\\
x_2^{(2)} &= u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + u_1^{(2)} + u_1^{(3)} = 1+1+1+1 = 0\,,\\
x_2^{(3)} &= u_2^{(2)} + u_2^{(3)} + u_1^{(2)} + u_0^{(3)} = 1+0+1+(0) = 0\,,\\
x_2^{(4)} &= u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + u_2^{(3)} + u_0^{(3)} = 1+1+0+(0) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Somit beginnt die Codesequenz $\underline{x}$ (nach dem Multiplexing) mit (0100, 1000, 1011, ...). Die Gruppierung wurde hier nur aus Gründen der Übersichtlichkeit vorgenommen.

# Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.1

**a)** Für beide Coder gilt $k = 1$ und $n = 2$. Das Gedächtnis $m$ und die Einflusslänge $\nu$ sind unterschiedlich ⇒ Antworten 3 und 4.

**b)** Das Schieberegister von Coder A beinhaltet zwar zwei Speicherzellen. Da aber $x_i^{(1)} = u_i$ ist und $x_i^{(2)} = u_i + u_{i-1}$ außer vom aktuellen Informationsbit $u_i$ nur noch vom unmittelbar vorherigen Bit $u_{i-1}$ beeinflusst wird, ist das Gedächtnis $m = 1$ und die Einflusslänge $\nu = m + 1 = 2$.




Die Grafik zeigt die beiden Coder in anderer Darstellung, wobei die „Gedächtnis–Speicherzellen" gelb hinterlegt sind. Beim Coder A erkennt man nur einen solchen Speicher ⇒ $m = 1$. Dagegen gilt für den Coder B tatsächlich $m = 2$ und $\nu = 3$.

**c)** Für den oberen Ausgang von Coder B gilt allgemein:

$$x_i^{(1)} = u_i + u_{i-1} + u_{i-2}\,.$$

Unter Berücksichtigung der Vorbelegung ($u_0 = u_{-1} = 0$) erhält man mit den obigen Angaben:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= u_1 + u_0 + u_{-1} = 1+0+0 = 1\,, \quad x_2^{(1)} = u_2 + u_1 + u_0 = 0+1+0 = 1\,,\\
x_3^{(1)} &= u_3 + u_2 + u_1 \quad = 1+0+1 = 0\,, \quad x_4^{(1)} = u_4 + u_3 + u_2 = 1+1+0 = 0\,,\\
x_5^{(1)} &= u_5 + u_4 + u_3 \quad = 0+1+1 = 0\,, \quad x_6^{(1)} = u_6 + u_5 + u_4 = 0+0+1 = 1\,,\\
x_7^{(1)} &= x_8^{(1)} = \ldots = 0\,.
\end{aligned}$$

Richtig ist somit der Lösungsvorschlag 1. Der zweite Lösungsvorschlag ⇒ $\underline{x}^{(1)} = \underline{u}$ würde dagegen nur bei einem systematischen Code gelten (der hier nicht vorliegt).

**d)** Analog zur Teilaufgabe (c) erhält man mit $x_i^{(2)} = u_i + u_{i-2}$:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= 1+0 = 1\,, \quad x_2^{(2)} = 0+0 = 0\,, \quad x_3^{(3)} = 1+1 = 0\,, \quad x_4^{(2)} = 1+0 = 1\,,\\
x_5^{(2)} &= 0+1 = 1\,, \quad x_6^{(2)} = 0+1 = 1\,, \quad x_7^{(2)} = x_8^{(2)} = \ldots = 0\,.
\end{aligned}$$

Richtig ist demnach der Lösungsvorschlag 2.

**e)** Für die (gesamte) Codesequenz kann man formal schreiben:

$$\underline{x} = \left(\underline{x}_1\,, \underline{x}_2\,, \ldots \underline{x}_i\,, \ldots\right), \quad \underline{x}_i = \left(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots\right).$$

Ein Vergleich mit den Lösungen der Aufgaben (c) und (d) zeigt die Richtigkeit von Lösungsvorschlag 1.

# Musterlösung zur Aufgabe A3.2

**a)** Das Gedächtnis des betrachteten Faltungscodierers ist $m = 2$. Damit setzt sich die Generatromatrix $\mathbf{G}$ aus den $m + 1 \underline{= 3}$ Teilmatrizen $\mathbf{G}_0$, $\mathbf{G}_1$ und $\mathbf{G}_2$ zusammen.

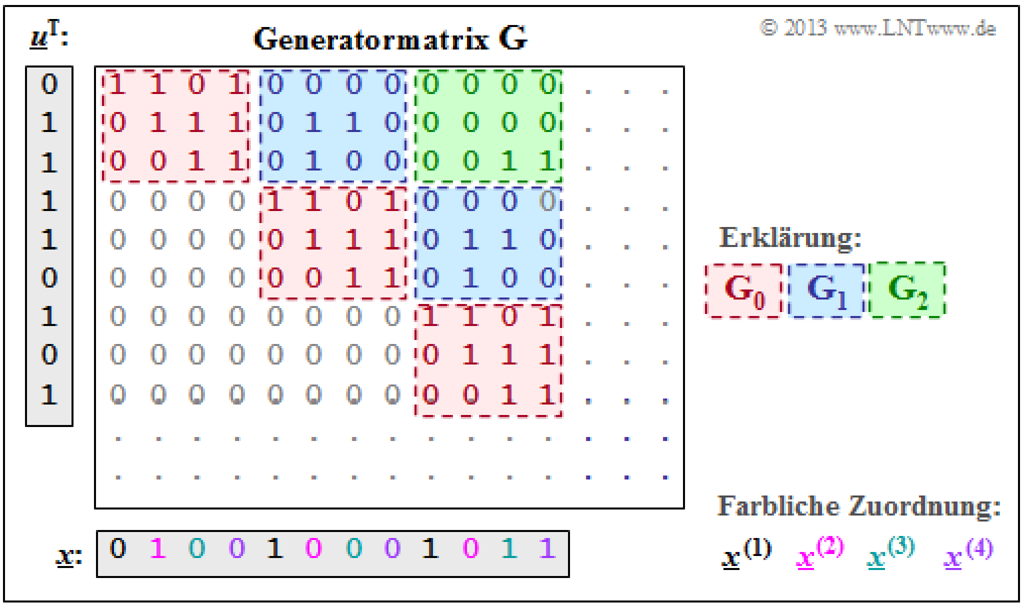
**b)** Aus den angegebenen Gleichungen

$$\begin{aligned} x_i^{(1)} &= u_i^{(1)}\,, \\ x_i^{(2)} &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_{i-1}^{(2)} + u_{i-1}^{(3)}\,, \\ x_i^{(3)} &= u_i^{(2)} + u_i^{(3)} + u_{i-1}^{(2)} + u_{i-2}^{(3)}\,, \\ x_i^{(4)} &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_i^{(3)} + u_{i-2}^{(3)} \end{aligned}$$

erkennt man, dass im gesamten Gleichungssatz genau achtmal ein Eingangswert $u_i^{(j)}$ mit $j \in \{1, 2, 3\}$ vorkommt ⇒ <u>Aussage 1 trifft zu</u>. Der Eingangswert $u_i^{(1)}$ beeinflusst die Ausgänge $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$ und $x_i^{(4)}$. Damit lautet die erste Zeile von $\mathbf{G}_0$: 1 1 0 1 ⇒ <u>Aussage 2 trifft zu</u>. Dagegen ist die Aussage 3 falsch: Nicht die erste Zeile von $\mathbf{G}_0$ lautet 1 0 0, sondern die erste Spalte. Dies besagt, dass $x_i^{(1)}$ nur von $u_i^{(1)}$ abhängt, aber nicht von $u_i^{(2)}$ oder von $u_i^{(3)}$. Es handelt sich um einen systematischen Code.

**c)** Im Gleichungssatz kommt dreimal ein Eingangswert $u_{i-1}^{(j)}$ mit $j \in \{1, 2, 3\}$ vor. Somit beinhaltet $\mathbf{G}_1$ insgesamt drei Einsen. Der Eingangswert $u_{i-1}^{(2)}$ beeinflusst die Ausgänge $x_i^{(2)}$ und $x_i^{(3)}$, während $u_{i-1}^{(3)}$ nur für die Berechnung von $x_i^{(2)}$ herangezogen wird ⇒ <u>alle Aussagen sind zutreffend</u>.

**d)** Die folgende Grafik zeigt den linken oberen Beginn (die Zeilen 1 bis 9 sowie die Spalten 1 bis 12) der Generatormatrix $\mathbf{G}$. Daraus ist ersichtlich, dass die beiden ersten Aussagen falsch sind im Gegensatz zur <u>Aussage 3</u>. Dieses Ergebnis gilt für jeden systematischen Code mit den Parametern $k = 3$ und $n = 4$.




**e)** Allgemein gilt $\underline{x} = \underline{u} \cdot \mathbf{G}$, wobei $\underline{u}$ und $\underline{x}$ Sequenzen sind, das heißt, dass sie sich bis ins Unendliche fortsetzen. Entsprechend ist die Generatormatrix $\mathbf{G}$ weder nach unten noch nach rechts begrenzt.

Bei begrenzter Informationssequenz $\underline{u}$ (hier auf 9 Bit) ist auch die Codesequenz $\underline{x}$ begrenzt. Interessiert man sich nur für die ersten Bits, so genügt es, nur den linken oberen Ausschnitt der Generatormatrix wie in der Musterlösung zur Teilaufgabe (d) zu betrachten. Anhand dieser Grafik kann auch das Ergebnis der Matrizengleichung $\underline{x} = \underline{u} \cdot \mathbf{G}$ abgelesen werden. Richtig ist $\underline{x}$ = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, ..) und damit Antwort 2. Das gleiche Ergebnis haben wir in **Aufgabe A3.1d** erhalten.

Dargestellt sind hier nur 9 Informationsbits und $9 \cdot n/k = 12$ Codebits. Aufgrund der Teilmatrizen $\mathbf{G}_1$ und $\mathbf{G}_2$ würden sich hier aber auch für die Codebits 13 bis 20 noch (teilweise) Einsen ergeben.

Die Codesequenz $\underline{x}$ setzt sich aus den vier Teilsequenzen $\underline{x}^{(1)}$, ... , $\underline{x}^{(4)}$ zusammen, die in der Grafik aufgrund unterschiedlicher Farbgebung abgelesen werden können.

# Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.2

**a)** Für den Index $l$ der Teilmatrizen gilt $0 \le l \le m$. Der betrachtete Coder hat das Gedächtnis $m = 3$. Damit sind vier Teilmatrizen zu berücksichtigen.

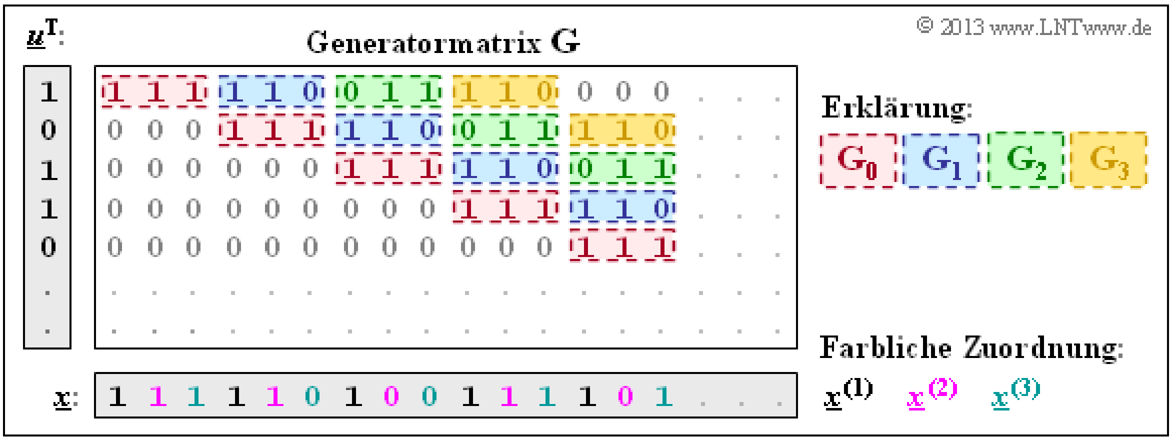
**b)** Jede Teilmatrix $\mathbf{G}_l$ besteht aus einer Zeile $\Rightarrow$ $k = 1$ und drei Spalten $\Rightarrow$ $n = 3$.

**c)** Alle Aussagen sind richtig. Da das aktuelle Informationsbit $u_i$ alle drei Ausgänge $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$ und $x_i^{(3)}$ beeinflusst, ist $\mathbf{G}_0 = (1,\ 1,\ 1)$. Dagegen sagt $\mathbf{G}_3 = (1,\ 1,\ 0)$ aus, dass nur die beiden ersten Eingänge von $u_{i-3}$ beeinflusst werden, nicht aber $x_i^{(3)}$.

**d)** Die gesuchte Generatormatrix $\mathbf{G}$ ist nachfolgend dargestellt, wobei die vier Teilmatrizen $\mathbf{G}_0$, ... , $\mathbf{G}_3$ farblich unterschieden sind. Die Vektorgleichung

$$\underline{x} = \underline{u} \cdot \mathbf{G} = (1\,, 0\,, 1\,, 1) \cdot \mathbf{G}$$

liefert das Ergebnis entsprechend dem Lösungsvorschlag 2. Die Codesequenz $\underline{x}$ ist dabei gleich der Modulo–2–Summe der Matrixzeilen 1, 3 und 4.




Farblich unterschieden sind die drei Codesequenzen der einzelnen Zweige. Beispielsweise gilt für den unteren Ausgang:

$$\underline{x}^{(3)} = (1\,, 0\,, 0\,, 1\,, 1\,, \dots)\,.$$

Anhand der vorne angegebenen Gleichungen kann dieses Resultat verifiziert werden:

$$\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= u_1 + u_{-1} = 1 + (0) = 1\,,\\
x_2^{(3)} &= u_2 + u_0 = 0 + (0) = 0\,,\\
x_3^{(3)} &= u_3 + u_1 = 1 + 1 = 0\,,\\
x_4^{(3)} &= u_4 + u_2 = 1 + 0 = 1\,,\\
x_5^{(3)} &= u_5 + u_3 = 0 + 1 = 1\,.
\end{aligned}$$

Berücksichtigt ist hierbei die Speichervorbelegung mit Nullen: $u_0 = u_{-1} = 0$.

*Anmerkung:* Ist wie hier angenommen die Informationssequenz auf vier Bit begrenzt, so können in der Codesequenz Einsen bis zur Position $(4 + m) \cdot n = 21$ vorkommen.

# Musterlösung zur Aufgabe A3.3

**a)** Die Generatormatrix eines Faltungscodes hat die allgemeine Form:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \cdots & \mathbf{G}_m & & & \\ & \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \cdots & \mathbf{G}_m & & \\ & & \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \cdots & \mathbf{G}_m & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Aus der Grafik auf der Angabenseite lassen sich die $k \times n$–Teilmatrizen ermitteln:

$$\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Codeparameter lauten somit: $\underline{n = 4}$, $\underline{k = 3}$ und $\underline{m = 2}$. *Hinweis:* Der dargestellte Teil von **G** hätte für $m > 2$ das gleiche Aussehen wie für $m = 2$. Deshalb war die Zusatzangabe $m \le 2$ erforderlich.

**b)** Entsprechend dem Angabenblatt gilt

$$\mathbf{G}(D) = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1 \cdot D + \mathbf{G}_2 \cdot D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+D & 1+D & 1 \\ 0 & D & 1+D^2 & 1+D^2 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet: Alle Lösungsvorschläge sind richtig.

**c)** Nach Aufteilung der Informationssequenz

$$\underline{u} = (0\,,1\,,1\,,1\,,1\,,0\,,1\,,0\,,1\,,\ldots)$$

auf die drei Teilsequenzen $\underline{u}^{(1)}$, $\underline{u}^{(2)}$ und $\underline{u}^{(3)}$ und anschließender $D$–Transformation erhält man

$$\begin{aligned} \underline{u}^{(1)} &= (0\,,1\,,1) \quad \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \quad U^{(1)}(D) = D + D^2\,, \\ \underline{u}^{(2)} &= (1\,,1\,,0) \quad \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \quad U^{(2)}(D) = 1 + D\,, \\ \underline{u}^{(3)} &= (1\,,0\,,1) \quad \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \quad U^{(3)}(D) = 1 + D^2\,. \end{aligned}$$

Richtig ist demnach nur der Lösungsvorschlag 2.

**d)** In der ersten Spalte von **G**($D$) steht nur eine Eins in Zeile 1, die zwei anderen Matrixelemente sind 0 ⇒ Es handelt sich um einen systematischen Code ⇒ $\underline{x}^{(1)} = \underline{u}^{(1)} = (0, 1, 1)$ ⇒ Lösungsvorschlag 1.

**e)** Die $D$–Transformierte $X^{(2)}(D)$ ergibt sich als das Vektorprodukt aus der $D$–Transformierten der Informationssequenz ⇒ $\underline{U}(D) = (U^{(1)}(D), U^{(2)}(D), U^{(3)}(D))$ und der zweiten Spalte von **G**($D$):

$$\begin{aligned} X^{(2)}(D) &= (D + D^2) \cdot 1 + (1 + D) \cdot (1 + D) + (1 + D^2) \cdot D = \\ &= D + D^2 + 1 + D + D + D^2 + D + D^3 = 1 + D^3\,. \end{aligned}$$

Richtig ist also der Lösungsvorschlag 2, nämlich $\underline{x}^{(2)} = (1, 0, 0)$. Da wir uns nur für die drei ersten Bit interessieren, ist der Beitrag $D^3$ nicht relevant.

**f)** Analog zur Teilaufgabe (e) erhält man hier:

$$\begin{aligned} X^{(3)}(D) &= (D + D^2) \cdot 0 + (1 + D) \cdot (1 + D) + (1 + D^2) \cdot (1 + D^2) = \\ &= 1 + D + D + D^2 + 1 + D^2 + D^2 + D^4 = D^2 + D^4\,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $\underline{x}^{(3)} = (0, 0, 1) \Rightarrow$ Lösungsvorschlag 3. Das gleiche Ergebnis erhält man auch für $\underline{x}^{(4)}$. Nach Zusammenfügen aller $n = 4$ Teilsequenzen erhält man

$$\underline{x} = (0\,,1\,,0,\,0,\,1\,,0,\,0,\,0,\,1\,,0,\,1,\,1\,,...)\,,$$

und damit (natürlich) das gleiche Ergebnis wie in der **Aufgabe A3.2.**

# Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.3

**a)** Die beiden einzigen von 0 verschiedenen Filterkoeffizienten sind $g_0 \underline{= 1}$ und $g_1 \underline{= 1}$. Daraus folgt für die *D*–Transformierte der Impulsantwort:

$$\underline{g} = (1\,,1) \quad \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \quad G(D) = 1 + D\,.$$

**b)** Die Impulsantwort des betrachteten Filters ist $\underline{g}$ = (1, 1, 0, 0, ...). Für die Ausgangssequenz erhält man deshalb das Faltungsprodukt

$$\begin{aligned}\underline{x} &= \underline{u} * \underline{g} = (1\,,0\,,0\,,1\,,0\,,0,\,...) * (1\,,1\,,0\,,0,\,...) = \\ &= (1\,,1\,,0\,,1\,,1\,,0,\,...)\,.\end{aligned}$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man über die *D*–Transformierten $U(D) = 1 + D^3$ und $G(D) = 1 + D$:

$$X(D) = U(D) \cdot G(D) = (1 + D^3) \cdot (1 + D) = 1 + D + D^3 + D^4\,.$$

Die Rücktransformation führt wieder zum Ergebnis $\underline{x}$ = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, ...) $\Rightarrow$ <u>Lösungsvorschlag 3</u>.

**c)** Hier verwenden wir sofort den Weg über die *D*–Transformierten:

$$\begin{aligned}&X(D) = (1 + D + D^2) \cdot (1 + D) = 1 + D + D + D^2 + D^2 + D^3 = 1 + D^3 \\ &\Rightarrow \quad \underline{x} = (1\,,0\,,0\,,1\,,0\,,0,\,...)\,.\end{aligned}$$

Das Ergebnis entspricht dem <u>Lösungsvorschlag 2</u>. Die folgende Berechnung soll den Weg im Zeitbereich veranschaulichen:

$$\begin{aligned}(1\,,0\,,0\,,0\,,0,\,...) * (1\,,1\,,0\,,0,\,...) &= (1\,,1\,,0\,,0\,,0\,,0,\,...)\,, \\ (0\,,1\,,0\,,0\,,0,\,...) * (1\,,1\,,0\,,0,\,...) &= (0\,,1\,,1\,,0\,,0\,,0,\,...)\,, \\ (0\,,0\,,1\,,0\,,0,\,...) * (1\,,1\,,0\,,0,\,...) &= (0\,,0\,,1\,,1\,,0\,,0,\,...)\,.\end{aligned}$$

Da die Faltung eine lineare Operation ist, ergibt sich im Galoisfeld GF(2) aus der Summation:

$$(1\,,1\,,1\,,0\,,0,\,...) * (1\,,1\,,0\,,0,\,...) = (1\,,0\,,0\,,1\,,0\,,0,\,...)\,.$$

Hätte man die Faltung nicht in GF(2), sondern für reelle Zahlen durchgeführt, so hätte man das Ergebnis $\underline{x}$ = (1, 2, 2, 1, 0, 0, ...) erhalten.

**d)** Die Musterlösung zur Teilaufgabe (c) lässt bereits vermuten, dass hier der <u>Lösungsvorschlag 1</u> richtig ist. Der Weg über die *D*–Transformierten bestätigt dieses Ergebnis:

$$\underline{u} = (1\,,1\,,1\,,1\,,...) \quad \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \quad U(D) = 1 + D + D^2 + D^3 + ...\,.$$

Mit der für Berechnungen in GF(2) gültigen Gleichung

$$1 + D + D^2 + D^3 + \,... = \frac{1}{1+D}$$

erhält man weiter:

$$X(D) = U(D) \cdot G(D) = \frac{1}{1+D} \cdot (1 + D) = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = (1\,,0\,,0\,,...)\,.$$

**e)** Der Weg über die *D*–Transformierten führt zum <u>Lösungsvorschlag 2</u>. Für diese alternierende Folge $\underline{u}$, beginnend mit 1, erhält man:

$$X(D) = 1 \cdot (1+D) + D^2 \cdot (1+D) + D^4 \cdot (1+D) + \ldots =$$
$$= 1 + D + D^2 + D^3 + D^4 + D^5 + \ldots \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = (1\,,\,1\,,\,1\,,\,\ldots)\,.$$

Auch bei direkter Anwendung der Faltung wie in Teilaufgabe (b) kann man dieses Ergebnis ablesen. Mit $\underline{u}$ = (0, 1, 0, 1, 0, 1, ...) erhält man dagegen $\underline{x}$ = (0, 1, 1, 1, 1, 1, ...). Diese unterscheidet sich von der „Dauer–Einsfolge" nur im ersten Bit. Es ist dann $x_1 = 0$ statt $x_1 = 1$.

# Musterlösung zur Aufgabe A3.4

**a)** Richtig ist der Lösungsvorschlag 1. Der Vorschlag 2 würde sich ergeben, wenn man die beiden Ausgänge vertauscht, also für den im Theorieteil meist betrachteten **Rate–1/2–Standardcode.**

Der Vorschlag 3 gilt für einen systematischen Code ⇒ $\underline{x}^{(1)} = \underline{u}$. Der hier betrachtete Coder A weist diese Eigenschaft allerdings nicht auf.

**b)** Um von einem nichtsystematischen $(n, k)$–Code mit Matrix $\mathbf{G}(D)$ zum äquivalenten systematischen Code ⇒ Matrix $\mathbf{G}_{\rm sys}(D)$ zu gelangen, muss man allgemein $\mathbf{G}(D)$ aufspalten in eine $k \times k$–Matrix $\mathbf{T}(D)$ und eine Restmatrix $\mathbf{Q}(D)$. Das gewünschte Ergebnis lautet dann mit der $k \times k$–Einheitsmatrix $\mathbf{I}_k$:

$$\mathbf{G}_{\rm sys}(D) = \big(\mathbf{I}_k\,;\; \mathbf{T}^{-1}(D) \cdot \mathbf{Q}(D)\big)\,.$$

Wir gehen hier von der $\mathbf{G}(D)$–Matrix für den Coder A aus. Wegen $k = 1$ haben hier sowohl $\mathbf{T}(D)$ als auch $\mathbf{Q}(D)$ die Dimension $1 \times 1$, sind also streng genommen gar keine Matrizen:

$$\mathbf{G}(D) = \big(\mathbf{T}(D)\,;\; \mathbf{Q}(D)\big) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}(D) = \big(1 + D^2\big)\,,\;\; \mathbf{Q}(D) = \big(1 + D + D^2\big)\,.$$

Für die beiden Elemente der systematischen Übertragungsfunktionsmatrix erhält man:

$$\begin{aligned}
G^{(1)}(D) &= \mathbf{T}(D) \cdot \mathbf{T}^{-1}(D) = 1\,,\\
G^{(2)}(D) &= \mathbf{Q}(D) \cdot \mathbf{T}^{-1}(D) = \frac{1 + D + D^2}{1 + D^2}\\
\Rightarrow \quad \mathbf{G}_{\rm sys}(D) &= \big(1\,,\; \frac{1 + D + D^2}{1 + D^2}\big)\,.
\end{aligned}$$

Richtig ist also der letzte Lösungsvorschlag. Der Lösungsvorschlag 1 beschreibt keinen systematischen Code. Ein Code entsprechend Lösungsvorschlag 2 ist zwar systematisch, aber nicht äquivalent zum Code A entsprechend der vorgegebenen Schaltung und Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(D)$.

**c)** Die Generatorfunktionsmatrix von **Coder B** lautet:

$$\mathbf{G}_{\rm B}(D) = \big(1\,,\;\; 1 + D + D^2\big)\,.$$

Dieser Coder ist also nicht äquivalent zum Coder A. Betrachten wir nun den **Coder C**. Hier gilt für das zweite Matrixelement von $\mathbf{G}(D)$:

$$\begin{aligned}
w_i &= u_i + w_{i-2} \quad \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \quad U(D) = W(D) \cdot (1 + D^2)\,,\\
x_i^{(2)} &= w_i + w_{i-1} + w_{i-2} \quad \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \quad X^{(2)}(D) = W(D) \cdot (1 + D + D^2)\\
\Rightarrow \quad G^{(2)}(D) &= \frac{X^{(2)}(D)}{U(D)} = \frac{1 + D + D^2}{1 + D^2}\,.
\end{aligned}$$

Dies entspricht genau dem Ergebnis der Teilaufgabe (b) ⇒ Lösungsvorschlag 2.

# Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.4

**a)** Hier gilt $\underline{k = 2}$ und $\underline{n = 3}$ ⇒ Rate $\underline{R = 2/3}$. Die Gedächtnisordnung ist $\underline{m = 1}$ (Anzahl der Speicherelemente pro Eingang). Die Einflusslänge ist gleich der Summe aller Speicherelemente ⇒ $\underline{\nu = 2}$.

**b)** Das Informationsbit $u_i^{(1)}$ beeinflusst nur den ersten Ausgang $x_i^{(1)}$, während $u_i^{(2)}$ für $x_i^{(2)}$ und $x_i^{(3)}$ herangezogen wird. Damit erhält man für die nullte **Teilmatrix:**

$$\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die verzögerten Eingänge wirken sich wie folgt aus:

- $u_{i-1}^{(1)}$ beeinflusst $x_i^{(1)}$,
- $u_{i-1}^{(2)}$ beeinflusst $x_i^{(1)}$ und $x_i^{(2)}$:

Somit lauten die Teilmatrix $\mathbf{G}_1$ und die Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{G}(D)$:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G}(D) = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1 \cdot D = \begin{pmatrix} 1+D & 0 & 0 \\ D & 1+D & 1 \end{pmatrix}.$$

Richtig sind demnach die <u>Lösungsvorschläge 1 und 3</u>. Die Antwort 2 kann schon allein deshalb nicht stimmen, da bei $m = 1$ in der Übertragungsfunktionsmatrix kein Element mit $D^2$ auftreten kann. $\mathbf{G}(D)$ ist zudem eine 2×3–Matrix; eine dritte Zeile gibt es nicht.

**c)** Die Aufspaltung von $\mathbf{G}(D)$ ergibt die 2×2–Matrix

$$\mathbf{T}(D) = \begin{pmatrix} 1+D & 0 \\ D & 1+D \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{T}(D) = (1+D)\cdot(1+D) = 1 + D^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{T}^{-1}(D) = \frac{1}{1+D^2} \cdot \begin{pmatrix} 1+D & 0 \\ D & 1+D \end{pmatrix}.$$

Richtig ist der <u>Lösungsvorschlag 3</u>. Zur Kontrolle:

$$\mathbf{T}(D) \cdot \mathbf{T}^{-1}(D) = \frac{1}{1+D^2} \cdot \begin{pmatrix} 1+D & 0 \\ D & 1+D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+D & 0 \\ D & 1+D \end{pmatrix} =$$

$$= \ldots = \frac{1}{1+D^2} \cdot \begin{pmatrix} 1+D^2 & 0 \\ 0 & 1+D^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**d)** Entsprechend dem Angabenblatt gilt:

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{T}^{-1}(D) \cdot \mathbf{Q}(D) = \frac{1}{1+D^2} \cdot \begin{pmatrix} 1+D & 0 \\ D & 1+D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1+D^2} \cdot \begin{pmatrix} (1+D)\cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ D \cdot 0 + (1+D)\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+D^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/(1+D) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{G}_{\rm sys}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/(1+D) \end{pmatrix}.$$

Richtig sind demnach die <u>Lösungsvorschläge 1 und 3</u>.

**e)** Richtig ist <u>JA</u>. Die untere Schaltung auf dem Angabenblatt ist gekennzeichnet durch die Gleichungen

$x_i^{(1)} = u_i^{(1)}$ und $x_i^{(2)} = u_i^{(2)}$ sowie

$$x_i^{(3)} = x_{i-1}^{(3)} + u_i^{(2)} \quad \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \quad X^{(3)}(D) = X^{(3)}(D) \cdot D + U^{(2)}(D)$$

$$\Rightarrow \quad G(D) = \frac{X^{(3)}(D)}{U^{(2)}(D)} = \frac{1}{1+D}\,.$$

Dies entspricht genau dem letzten Element von $\mathbf{G}_{\rm sys}(D)$ entsprechend der Teilaufgabe (d).

# Musterlösung zur Aufgabe A3.5

**a)** Die Impulsantwort $\underline{g}$ ist gleich der Ausgangssequenz $\underline{x}$ für die Eingangssequenz $\underline{u}$ = (1, 0, 0, ...). Anhand der Filterstruktur ergibt sich mit $w_0 = w_{-1} = 0$ sowie den Gleichungen

$$w_i = u_i + w_{i-1} + w_{i-2}\,,$$
$$x_i = w_i + w_{i-2}$$

das Ergebnis $\underline{g} = \underline{x}$ = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, ...) entsprechend Lösungsvorschlag 2, wie nebenstehende Berechnung zeigt.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_i$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| $w_{i-2}$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | ... |
| $w_{i-1}$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | ... |
| $w_i$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | ... |
| $x_i$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | ... |



Man erkennt aus diesem Berechnungsschema weiter folgende Periodizitäten der Impulsantwort $\underline{g}$ (bis ins Unendliche) wegen jeweils gleicher Registerbelegung:

$$g_3 = g_6 = g_9 = \ldots = 1\,,$$
$$g_4 = g_7 = g_{10} = \ldots = 0\,,$$
$$g_5 = g_8 = g_{11} = \ldots = 1\,.$$

Richtig ist also zusätzlich auch noch der Lösungsvorschlag 3.

**b)** Nach ähnlichen Berechnungen wie in Teilaufgabe (a) erkennt man die Richtigkeit der Lösungsvorschläge 1 und 3. Auch die Ausgangssequenz $\underline{x}$ reicht bis ins Unendliche, und es zeigen sich wieder Periodizitäten.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_i$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | ... |
| $w_{i-2}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | ... |
| $w_{i-1}$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | ... |
| $w_i$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | ... |
| $x_i$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | ... |



Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man die um eine, drei, sechs bzw. sieben Positionen (nach rechts) verschobenen Impulsantworten $\underline{g}$ = (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, ...) im Galoisfeld GF(2) addiert:

$$\begin{aligned}\underline{x} = &\ (0\,,1\,,1\,,1\,,0\,,1\,,1\,,0\,,\ldots) + \\ + &\ (0\,,0\,,0\,,1\,,1\,,1\,,0\,,1\,,\ldots) + \\ + &\ (0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,1\,,1\,,\ldots) + \\ + &\ (0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,1\,,\ldots) = \\ = &\ (0\,,1\,,1\,,0\,,1\,,0\,,0\,,1\,,\ldots)\,.\end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität des betrachteten Systems ist dies erlaubt.

**c)** Hier wählen wir den Weg über die *D*–Transformierten:

$$\underline{u} = (1\,,1\,,1) \quad \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \quad U(D) = 1 + D + D^2\,.$$

Mit der Übertragungsfunktion G(*D*) = (1 + $D^2$)/(1 + *D* + $D^2$) erhält man somit für die *D*–Transformierte der Ausgangssequenz:

$$X(D) = U(D) \cdot G(D) = 1 + D + D^2 \cdot \frac{1 + D^2}{1 + D + D^2} = 1 + D^2$$
$$\Rightarrow \quad \underline{x} = (1\,,0\,,1\,,0\,,0\,,0\,,\ldots)\,.$$

Richtig ist demnach nur der Lösungsvorschlag 1: Trotz unendlich langer Impulsantwort $\underline{g}$ ist bei dieser

Eingangssequenz $\underline{u}$ die Ausgangssequenz $\underline{x}$ auf drei Bit begrenzt. Zum gleichen Ergebnis kommt man wieder durch Addition verschobener Impulsantworten:

$$\begin{aligned}\underline{x} &= (1\,,1\,,1,0\,,1\,,1,0,1,\,...)\,+\\ &+ (0\,,1\,,1,1\,,0\,,1,1,0,\,...)\,+\\ &+ (0\,,0\,,1,1\,,1\,,0,1,1,\,...)\,=\\ &= (1\,,0\,,1,0\,,0\,,0,0,0,\,...)\,.\end{aligned}$$

**d)** Auf dem Angabenblatt ist die allgemeine Übertragungsfunktion eines rekursiven Filters 2. Ordnung wie folgt gegeben:

$$G(D) = \frac{a_0 + a_1 \cdot D + a_2 \cdot D^2}{1 + b_1 \cdot D + b_2 \cdot D^2}\,.$$

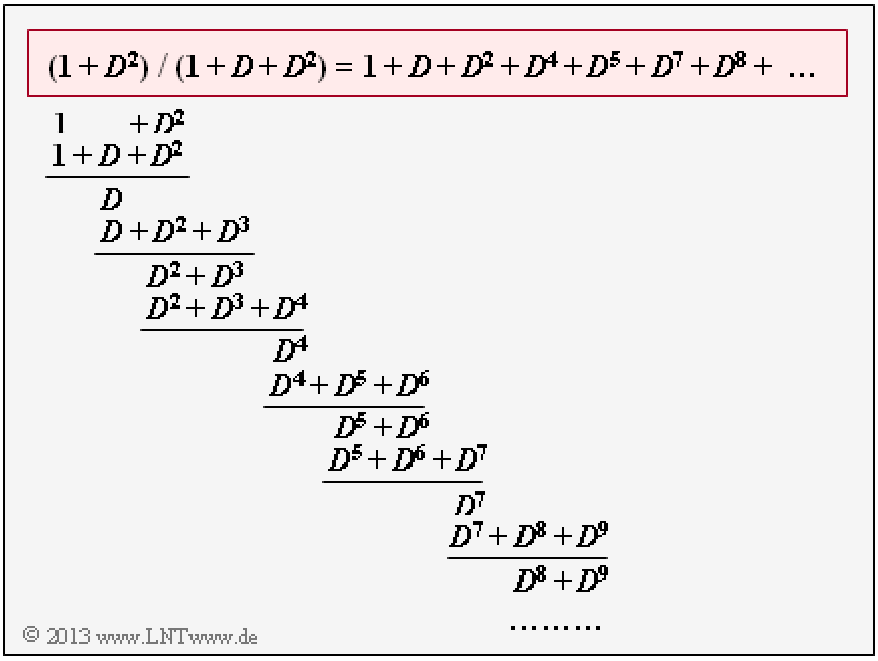
Das hier betrachtete Filter ist durch die Koeffizienten $a_0 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$ und $a_1 = 0$ bestimmt. Somit erhält man das Ergebnis entsprechend dem Lösungsvorschlag 1:

$$G(D) = \frac{1 + D^2}{1 + D + D^2}\,.$$

Gleichzeitig ist aber G($D$) auch die $D$–Transformierte der Impulsantwort:

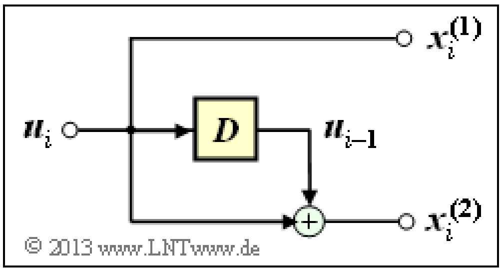
$$\underline{g} = (1\,,1\,,1\,,0\,,1\,,1\,,0,\,...) \quad \circ\!\!\xrightarrow{D}\!\!\bullet \quad G(D) = 1 + D + D^2 + D^4 + D^5 + \,...\,.$$

Das bedeutet: Richtig ist auch der Lösungsvorschlag 3.




Zum genau gleichen Ergebnis wäre man durch Division der beiden Polynome $1 + D^2$ und $1 + D + D^2$ gekommen, wie die Berechnung zeigt.

# Musterlösung zur Aufgabe A3.6




**a)** Wie aus dem nebenstehenden Ersatzschaltbild hervorgeht, beinhaltet der Codierer nur ein Speicherelement ⇒ Gedächtnis $m$ = 1. Damit gibt es $2^m$ = 2 Zustände, nämlich

- den Zustand Zustand $S_0$ ⇒ $u_{i-1} = 0$,
- den Zustand Zustand $S_1$ ⇒ $u_{i-1} = 1$.

**b)** Von jedem Zustand gehen $2^k$ = 2 Pfeile zu verschiedenen Zuständen ab. Da es nur zwei Zustände gibt, ist die Antwort JA richtig.

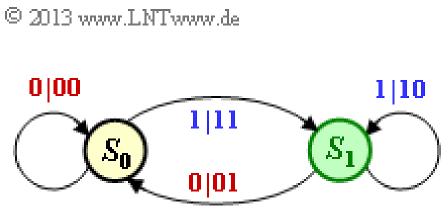
**c)** Das zum Zeitpunkt $i$ anliegende Informationsbit $u_i$ ist hinsichtlich des darauf folgenden Zeitpunkts ($j = i + 1$) das vorherige Bit ($u_{j-1}$). Damit gilt $s_{i+1} = u_i$. Nur mit $u_i = 0$ kommt man von $s_i = S_1$ nach $s_{i+1} = S_0$ ⇒ Lösungsvorschlag 1.

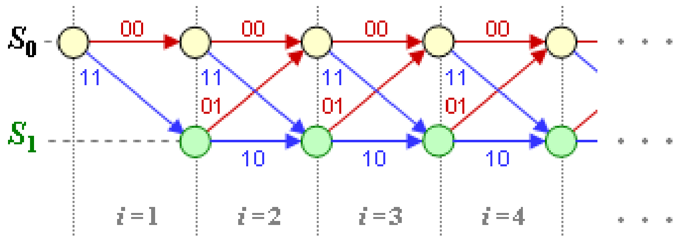
Aus $s_i = S_1$ ⇒ $u_{i-1} = 1$ folgt weiter:

$$x_i^{(1)} = u_i = 0\,,\quad x_i^{(2)} = u_i + u_{i-1} = 0 + 1 = 1 \quad\Rightarrow\quad \underline{x}_i = (0\,,1)\,.$$

Richtig ist also zusätzlich noch der Lösungsvorschlag 3. Den Lösungsvorschlag 4 hätte man von Anfang an ausschließen können. Die Grafik auf dem Angabenblatt zeigt eindeutig, dass der Coder systematisch ist: $x_i^{(1)} = u_i$. Die Kombination $u_i = 0$ und $\underline{x}_i = (1, 0)$ würde dem widersprechen.

**d)** Auf ähnlichem Lösungsweg wie in der Teilaufgabe (c) gelangt man zum Ergebnis, dass hier die Lösungsvorschläge 2 und 4 zutreffen. Damit ergeben sich das folgende Zustandsübergangsdiagramm (links) und das daraus ableitbare Trellisdiagramm:




Rote Pfeile kennzeichnen das Informationsbit $u_i = 0$, während bei blauen Pfeilen $u_i = 1$ anzusetzen ist.

**e)** Beide Lösungsvorschläge sind richtig. Für die Informationssequenzen gibt es (außer binär) keine weiteren Beschränkungen.

**f)** Richtig ist der Lösungsvorschlag 1. Ausgehend vom Zustand $S_0$ kommt man

- mit $u_1 = 1$ zum Zustand $S_1$, Ausgabe 11,
- mit $u_2 = 1$ zum Zustand $S_1$, Ausgabe 10,
- mit $u_3 = 0$ zum Zustand $S_0$, Ausgabe 01,
- mit $u_4 = 0$ zum Zustand $S_0$, Ausgabe 00,
- mit $u_5 = 1$ zum Zustand $S_1$, Ausgabe 11,

- mit $u_6 = 1$ zum Zustand $S_1$, Ausgabe 10.

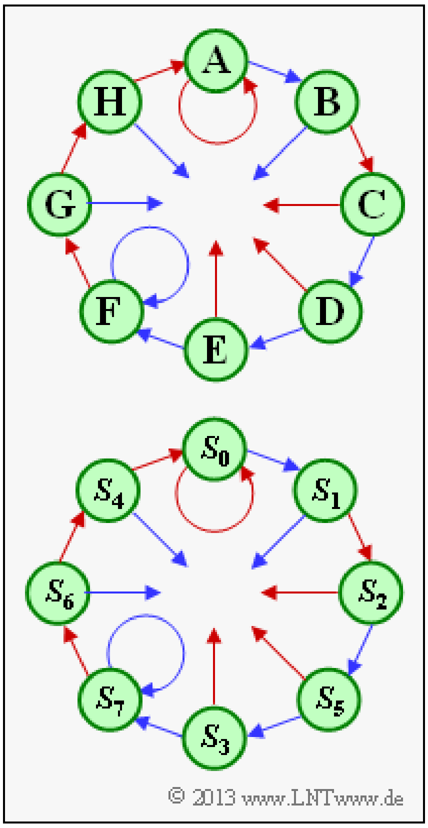
Dagegen ist die zweite Codesequenz nicht möglich:

- Die Ausgabe „11” bedeutet, dass man bei $S_0$ gestartet ist und mit $u_1 = 1$ zum Zustand $S_1$ kommt.
- Im Zustand $S_1$ sind dann aber nur die Ausgaben „01” und „10” möglich, nicht jedoch „00”.

# Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.6

**a)** Der Platzhalter **A** steht für den Zustand $S_0 \Rightarrow u_{i-1} = 0, u_{i-2} = 0, u_{i-3} = 0$. Dies ist der einzige Zustand $S_\mu$, bei dem man durch das Infobit $u_i = 0$ (roter Pfeil) im gleichen Zustand $S_\mu$ bleibt.

Vom Zustand $S_7 \Rightarrow u_{i-1} = 1, u_{i-2} = 1, u_{i-3} = 1$ kommt man mit $u_i = 1$ (blauer Pfeil) auch wieder zum Zustand $S_7$. Einzugeben waren also für **A** der Index $\underline{\mu = 0}$ und für **F** der Index $\underline{\mu = 7}$.



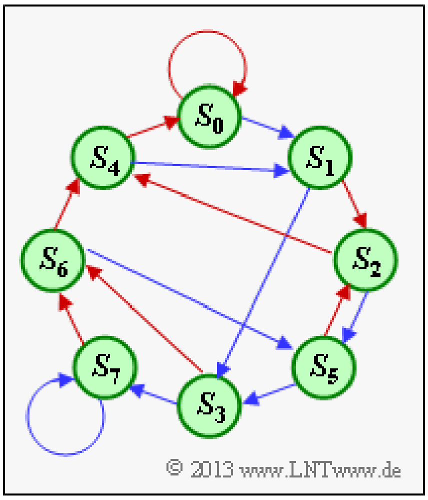

**b)** Ausgehend vom Zustand **A** $= S_0$ kommt man entsprechend der Ausgangsgrafik im Uhrzeigersinn mit den roten Pfeilen ($u_i = 0$) bzw. den blauen Pfeilen ($u_i = 1$) zu folgenden Zuständen:

- $u_{i-3} = 0, u_{i-2} = 0, u_{i-1} = 0, u_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} =$ **B** $= S_1$,
- $u_{i-3} = 0, u_{i-2} = 0, u_{i-1} = 1, u_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} =$ **C** $= S_2$,
- $u_{i-3} = 0, u_{i-2} = 1, u_{i-1} = 0, u_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} =$ **D** $= S_5$,
- $u_{i-3} = 1, u_{i-2} = 0, u_{i-1} = 1, u_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} =$ **E** $= S_3$,
- $u_{i-3} = 0, u_{i-2} = 1, u_{i-1} = 1, u_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} =$ **F** $= S_7$,
- $u_{i-3} = 1, u_{i-2} = 1, u_{i-1} = 1, u_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} =$ **G** $= S_6$,
- $u_{i-3} = 1, u_{i-2} = 1, u_{i-1} = 0, u_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} =$ **H** $= S_4$,
- $u_{i-3} = 1, u_{i-2} = 0, u_{i-1} = 0, u_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} =$ **A** $= S_0$.

Einzugeben waren also die Indizes $\mu$ in der <u>Reihenfolge 1, 2, 5, 3, 6, 4</u>. Die Grafik zeigt den Zusammenhang zwischen den Platzhaltern und den Zuständen $S_\mu$.

**c)** Vom Zustand $S_1 \Rightarrow u_{i-1} = 1, u_{i-2} = 0, u_{i-3} = 0$ kommt man mit $u_i = 0$ (roter Pfeil) zum Zustand $S_2$. Dagegen landet man mit $u_i = 1$ (blauer Pfeil) beim Zustand $S_3 \Rightarrow u_{i-1} = 1, u_{i-2} = 1, u_{i-3} = 0$.

Nebenstehende Grafik zeigt das Zustandsübergangsdiagramm mit allen Übergängen. Aus diesem kann abgelesen werden:




- Vom Zustand $S_3$ kommt man mit $u_i = 0$ zum Zustand $S_6$.
- Vom Zustand $S_5$ kommt man mit $u_i = 0$ zum Zustand $S_2$.
- Vom Zustand $S_7$ kommt man mit $u_i = 0$ zum Zustand $S_6$.

Einzugegeben waren also die Indizes in der <u>Reihenfolge 3, 6, 2, 6</u>.

# Musterlösung zur Aufgabe A3.7

**a)** Die Berechnung basiert auf den Gleichungen

- $x_i^{(1)} = u_i + u_{i-2}$,
- $x_i^{(2)} = u_i + u_{i-1} + u_{i-2}$.

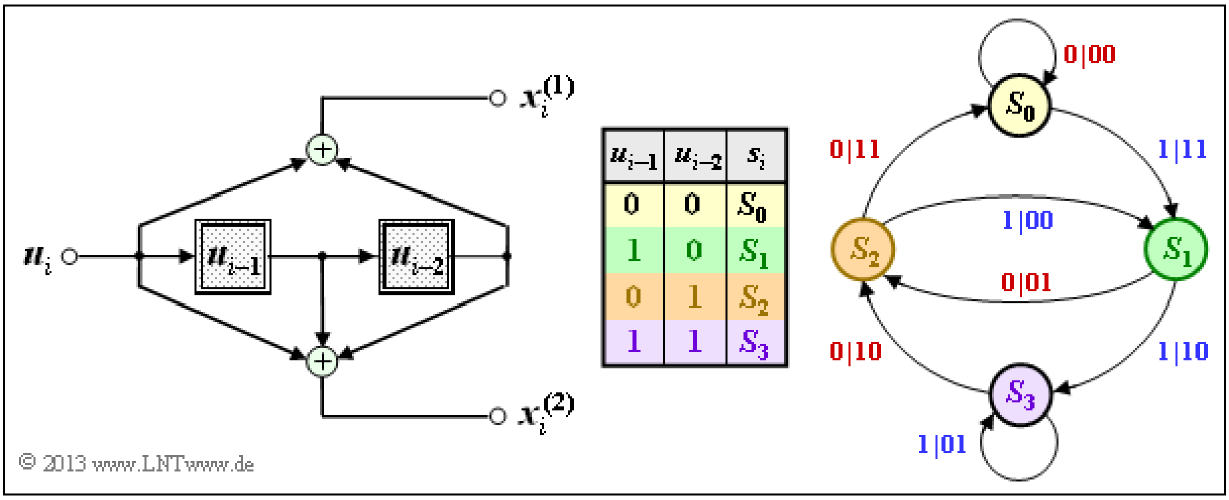
Zu Beginn sind die beiden Speicher ($u_{i-1}$ und $u_{i-2}$) mit Nullen vorbelegt $\Rightarrow$ $s_1 = S_0$. Mit $u_1 = 0$ ergibt sich $\underline{x}_1 = (00)$ und $s_2 = S_0$. Mit $u_2 = 1$ erhält man die Ausgabe $\underline{x}_2 = (11)$ und den neuen Zustand $s_3 = S_3$.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_i$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | ... |
| $u_{i-1}$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | ... |
| $u_{i-2}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | ... |
| $s_{i+1}$ | $S_0$ | $S_1$ | $S_3$ | $S_3$ | $S_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_0$ | ... |
| $\underline{x}_i$ | 00 | 11 | 10 | 01 | 10 | 00 | 01 | 11 | ... |

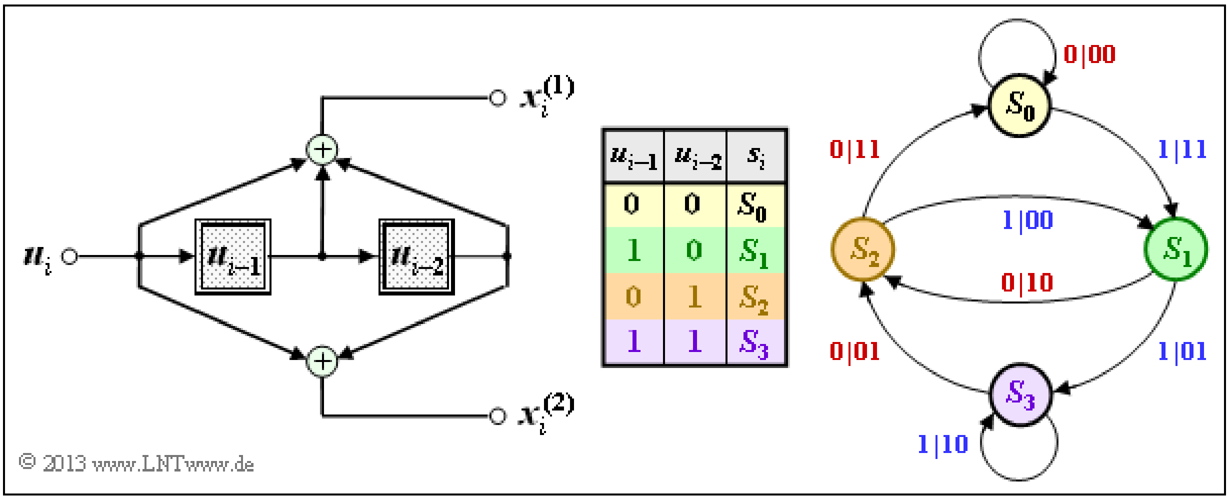


Aus nebenstehendem Berechnungsschema erkennt man die Richtigkeit der Lösungsvorschläge 1 und 4.

**b)** Durch Auswertung der Tabelle von Teilaufgabe (a) erkennt man, dass alle Aussagen richtig sind. Die Ergebnisse sind in der folgenden Grafik dargestellt.




**c)** Nachfolgend sehen Sie das Zustandsübergangsdiagramm von Coder B, das bereits im Theorieteil auf **Seite 2** hergeleitet und interpretiert wurde.




Richtig ist nur die Aussage 3. Vertauscht man die beiden Ausgabebits $x_i^{(1)}$ und $x_i^{(2)}$, so kommt man vom Faltungscodierer A zum Faltungscodierer B (und umgekehrt).

# Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.7

**a)** Die $D$–Transformierte der Codesequenz $\underline{x}$ ergibt sich mit $U(D) = 1/(1 + D)$ zu

$$X(D) = \frac{1+D+D^2+D^3}{1+D} = 1 + D^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots).$$

Zutreffend sind die <u>Antworten 2 und 4</u>. Berücksichtigt wurde $(1 + D) \cdot (1 + D^2) = 1 + D + D^2 + D^3$.

**b)** Wegen $(1 + D) \cdot (1 + D + D^2) = 1 + D^3$ sind hier die <u>Lösungsvorschläge 3 und 4</u> zutreffend:

$$X(D) = \frac{1+D^3}{1+D} = 1 + D + D^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots).$$

**c)** Die Polynomdivision $(1 + D + D^3)$ durch $(1 + D)$ ist im binären Galoisfeld nicht ohne Rest möglich. Man erhält $X(D) = 1 + D^3 + D^4 + D^5 + \ldots$ und damit die Ausgangssequenz $\underline{x} = (1, 0, 0, 1, 1, 1, \ldots)$, die sich bis ins Unendliche erstreckt. Richtig ist somit allein der <u>Lösungsvorschlag 1</u>.

**d)** Die Übertragungsfunktionsmatrix **von Coder A** lautet:

$$\mathbf{G}_{\rm A}(D) = \big(1 + D + D^3,\ 1 + D + D^2 + D^3\big)\,.$$

Das jeweils erste Codebit ist deshalb durch die Sequenz entsprechend Teilaufgabe (c) gegeben und das zweite Bit durch die Sequenz entsprechend Teilaufgabe (a):

$$\begin{aligned}\underline{x}^{(1)} &= (1, 0, 0, 1, 1, 1, \ldots),\\ \underline{x}^{(2)} &= (1, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x} = (11, 00, 01, 10, 10, 10, \ldots).$$

Dies entspricht dem <u>Lösungsvorschlag 1</u>.

**e)** Die Übertragungsfunktion von **Coder B** lautet $\mathbf{G}_{\rm B}(D) = (1 + D^3,\ 1 + D + D^2 + D^3)$. Die erste Codesequenz ergibt sich nun entsprechend Teilaufgabe (b), während $\underline{x}^{(2)}$ weiterhin der Teilaufgabe (a) entspricht. Somit erhält man hier $\underline{x} = (11, 10, 11, 00, 00, 00, \ldots)$ ⇒ <u>Lösungsvorschlag 2</u>.

Richtig ist aber auch der <u>Lösungsvorschlag 4</u>. Unter der hier getroffenen Annahme, dass die Einsfolge gesendet wurde ($\underline{u} = \underline{1}$), beinhaltet die Codesequenz $\underline{x}$ nur fünf Einsen. In der nächsten Teilaufgabe wird dieser Sachverhalt nochmals aufgegriffen.

**f)** Wie aus dem Diagramm 1 hervorgeht, führt hier die Informationssequenz $\underline{u} = \underline{1} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ zur Codesequenz $\underline{x} = (11, 00, 01, 10, 10, 10, \ldots)$. Dies bedeutet:

- Zum Coder A gehört das Zustandsübergangsdiagramm 1.
- Zum Coder B gehört das Zustandsübergangsdiagramm 2.

Für den **Coder B** gelten dabei folgende Aussagen:

- $\underline{u} = \underline{0} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots) \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = (00, 00, 00, 00, 00, 00, \ldots)$,
- $\underline{u} = \underline{1} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots) \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = (11, 10, 11, 00, 00, 00, \ldots)$.

Das bedeutet: Mit nur fünf Bitfehlern an den Positionen 1, 2, 3, 5, 6 wird die Nullfolge als Einsfolge decodiert und umgekehrt. Einen solchen Code nennt man **katastrophal** ⇒ <u>Lösungsvorschläge 2 und 3</u>.

# Musterlösung zur Aufgabe A3.8

**a)** Die Zeilenzahl der Punktierungsmatrizen gibt den Parameter $n$ des $(n,\ k = 1)$–RCPC–Muttercodes an. Daraus ergibt sich dessen Rate zu $R_0 = 1/3$. Die Spaltenzahl ist gleich der Punktierungsperiode $p$. Bei der betrachteten Codeklasse gilt $p = 8$. Dagegen liefern die Punktierungsmatrizen keine Aussagen über das Gedächtnis des Codes ⇒ Lösungsvorschlag 1 und 2.

**b)** Für die Rate des Codes $C_l = p/N_l$, wobei $N_l$ die Anzahl aller Einsen in der Punktierungsmatrix $\mathbf{P}_l$ und $p$ die Punktierungsperiode bezeichnet:

- $R_0 = 8/24 = 1/3 = \underline{0.333}$,
- $R_1 = 8/20 = 2/5 = \underline{0.400}$,
- $R_2 = 8/16 = 1/2 = \underline{0.500}$,
- $R_3 = 8/12 = 2/3 = \underline{0.667}$,
- $R_4 = 8/9 = \underline{0.889}$.

**c)** Alle Einsen in der Matrix $\mathbf{P}_4$ sind auch in den darüber liegenden Matrizen $\mathbf{P}_3, \ ... \ , \mathbf{P}_0$ enthalten. In der Matrix $\mathbf{P}_3$ kommen gegenüber $\mathbf{P}_4$ drei Einsen hinzu, in der Matrix $\mathbf{P}_2$ gegenüber $\mathbf{P}_3$ nochmals vier, usw.
⇒ Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 4.

# Musterlösung zur Aufgabe A3.9

**a)** Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 3. Es gibt hier $2^{k \cdot m} = 2$ Zustände. Daraus folgt $k = 1$ und $m = 1$. Pro Codierschritt werden $n = 2$ Codebits ausgegeben ⇒ $R = 1/2$. Die Informationssequenzlänge ist $L = 4$. Erst durch ein (da $m = 1$) zusätzliches Terminierungsbit kommt man zur Gesamtlänge $L' = 5$.

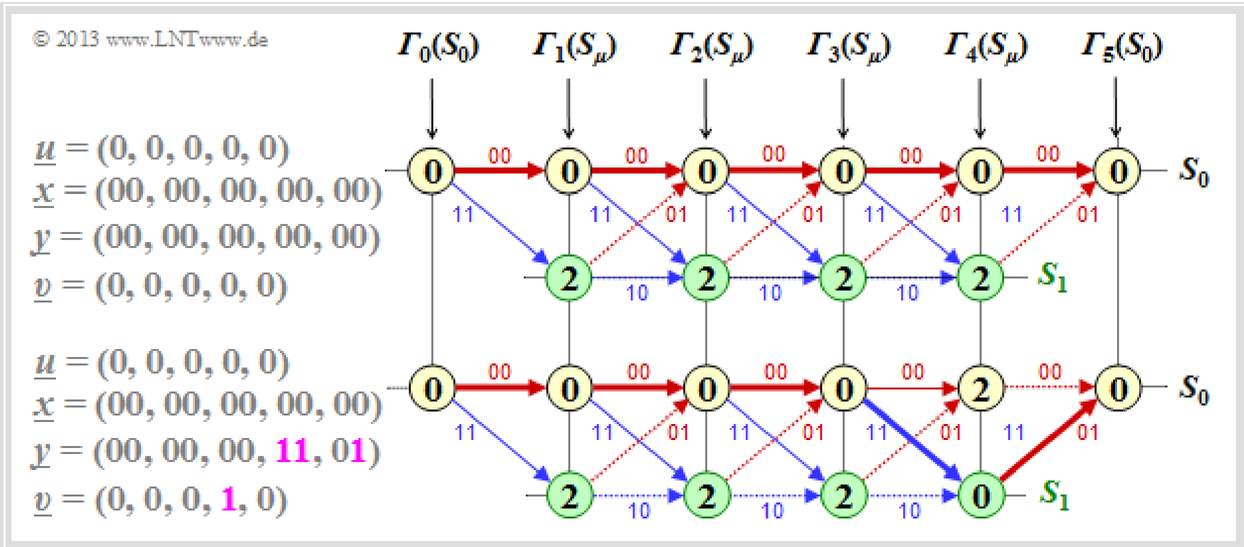
**b)** Die freie Distanz $d_{\rm F}$ ist definiert als die Anzahl der Codebits, in denen sich zwei Sequenzen $\underline{x}$ und $\underline{x}'$ unterscheiden. Als Bezugssequenz wählen wir die Nullsequenz:

$$\underline{x}' = \underline{0} = (00\,,00\,,00\,,00\,,\ldots),$$

ausgedrückt mit der Zustandsabfolge: $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow$ ... Eine der Folgen $\underline{x} \neq \underline{0}$, die sich von $\underline{0}$ nur in der minimalen Anzahl an Codebits unterscheidet, folgt dem Pfad $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow$ ... :

$$\underline{x} = (11\,,01\,,00\,,00\,,\ldots) \quad \Rightarrow \quad d_{\rm F}\; \underline{= 3}\,.$$

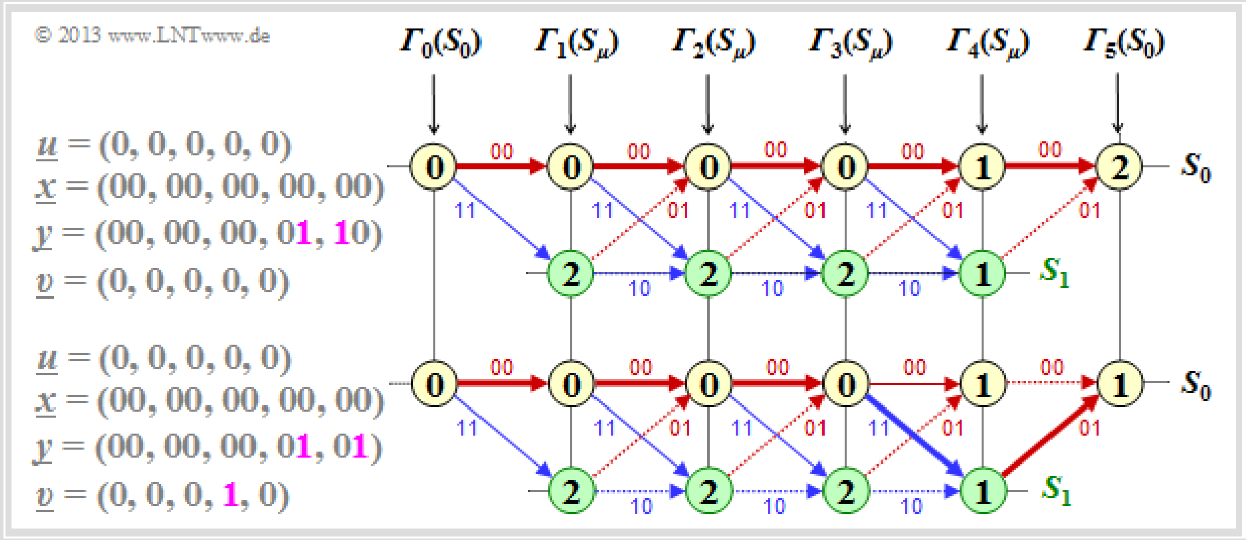
**c)** Wird die Nullsequenz gesendet und diese auch empfangen, so kann die Viterbi–Decodierung durch das nachfolgende Trellis veranschaulicht werden. Der Endwert der Fehlergröße ist $\Gamma_5(S_0) = 0$, und der Viterbi–Decoder entscheidet mit Sicherheit richtig: $\underline{z} = \underline{x}$ ⇒ $\underline{v} = \underline{u}$.




Für das untere Trellis gehen wir ebenfalls von $\underline{u}$ = (0, 0, 0, 0, 0) ⇒ $\underline{x}$ = (00, 00, 00, 00, 00) aus. Empfangen wird aber nun $\underline{y}$ = (00, 00, 00, 11, 01). Trotzdem gilt $\Gamma_5(S_0) = 0$. Das Beispiel belegt, dass die beiden ersten Aussagen falsch sind. Richtig ist hier nur der Lösungsvorschlag 3, da das Ereignis „Kein Übertragungsfehler" sehr viel wahrscheinlicher ist als drei Fehler an genau vorgegebenen Positionen.

**d)** Richtig sind alle Antworten. Wenn man sicher weiß, dass nur ein Übertragungsfehler aufgetreten ist, funktioniert bei einem Faltungscode mit der freien Distanz $d_{\rm F} = 3$ der Viterbi–Algorithmus perfekt, egal, an welcher Position der Fehler aufgetreten ist.

**e)** Keiner der Lösungsvorschläge ist richtig, wie aus den nachfolgenden Beispielen zu erkennen ist.



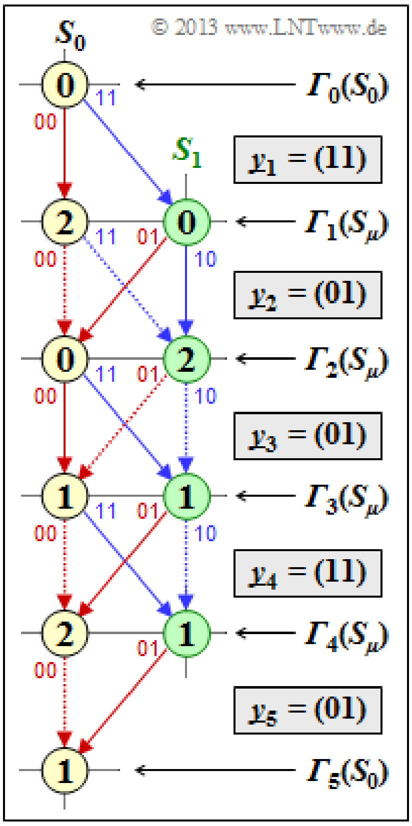
© 2013 www.LNTwww.de
$\underline{u} = (0, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{x} = (00, 00, 00, 00, 00)$
$\underline{y} = (00, 00, 00, 01, 10)$
$\underline{v} = (0, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{u} = (0, 0, 0, 0, 0)$
$\underline{x} = (00, 00, 00, 00, 00)$
$\underline{y} = (00, 00, 00, 01, 01)$
$\underline{v} = (0, 0, 0, 1, 0)$
$\Gamma_0(S_0)$
$\Gamma_1(S_\mu)$
$\Gamma_2(S_\mu)$
$\Gamma_3(S_\mu)$
$\Gamma_4(S_\mu)$
$\Gamma_5(S_0)$
$S_0$
$S_1$

# Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.9

**a)** Ausgehend von $\Gamma_2(S_0) = 0$, $\Gamma_2(S_1) = 2$ erhält man mit $\underline{y}_3 = (01)$:

$$\begin{aligned}\Gamma_3(S_0) &= \min\left[0 + d_{\rm H}\big((00),\,(01)\big),\ 2 + d_{\rm H}\big((01),\,(01)\big)\right]\\ &= \min\left[0+1,\ 2+0\right]\ \underline{=1}\,,\\ \Gamma_3(S_1) &= \min\left[0 + d_{\rm H}\big((11),\,(01)\big),\ 2 + d_{\rm H}\big((10),\,(01)\big)\right]\\ &= \min\left[0+1,\ 2+2\right]\ \underline{=1}\,.\end{aligned}$$

Eliminiert werden also die beiden Teilpfade, die zum Zeitpunkt $i = 2$ vom Zustand $S_1$ ausgehen $\Rightarrow$ Punktierung in der Grafik.




**b)** Analog zur Teilaufgabe (a) erhält man mit $y_4 = (11)$:

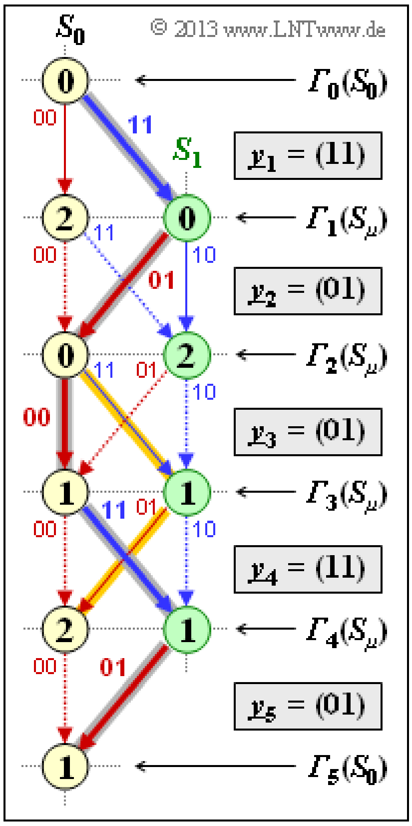
$$\begin{aligned}\Gamma_4(S_0) &= \min\left[1 + d_{\rm H}\big((00),\,(11)\big),\ 1 + d_{\rm H}\big((01),\,(11)\big)\right]\\ &= \min\left[1+2,\ 1+1\right]\ \underline{=2}\,,\\ \Gamma_4(S_1) &= \min\left[1 + d_{\rm H}\big((11),\,(11)\big),\ 1 + d_{\rm H}\big((10),\,(11)\big)\right]\\ &= \min\left[1+0,\ 1+1\right]\ \underline{=1}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Eliminierung der beiden Teilpfade $S_0 \rightarrow S_0$ und $S_1 \rightarrow S_1$ im Decodierschritt $i = 4$.

**c)** Für $i = 5$ $\Rightarrow$ Terminierung erhält man mit $\underline{y}_5 = (01)$:

$$\begin{aligned}\Gamma_5(S_0) &= \min\left[2 + d_{\rm H}\big((00),\,(01)\big),\ 1 + d_{\rm H}\big((01),\,(01)\big)\right]\\ &= \min\left[2+1,\ 1+0\right]\ \underline{=1}\,.\end{aligned}$$

Zu eliminieren ist hier der Teilpfad $S_0 \rightarrow S_0$.




**d)** Die Rückwärtssuche des durchgehenden Pfades von $\Gamma_5(S_0)$ nach $\Gamma_0(S_0)$ liefert $S_0 \leftarrow S_1 \leftarrow S_0 \leftarrow S_0 \leftarrow S_1 \leftarrow S_0$. In Vorwärtsrichtung ergibt dies den Pfad $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0$ und damit die

- die wahrscheinlichste Codesequenz $\underline{z} = (11, 01, 00, 11, 01)$,
- die wahrscheinlichste Informationssequenz $\underline{v} = (1, 0, 0, 1, 0)$.

Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1 und 3. Ein Vergleich mit dem vorgegebenen Empfangsvektor $\underline{y} = (11, 01, 01, 11, 01)$ zeigt, dass das sechste Bit bei der Übertragung verfälscht wurde.

**e)** Ohne Terminierung $\Rightarrow$ endgültige Entscheidung bei $i = 4$ hätte es zwei durchgehende Pfade gegeben:

- von $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0$ (gelb eingezeichnet),
- von $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1$ (den letztendlich richtigen),

Die Zwangsentscheidung zum Zeitpunkt $i = 4$ hätte hier wegen $\Gamma_4(S_1) < \Gamma_4(S_0)$ zum zweiten Pfad und damit zum Ergebnis $\underline{v} = (1, 0, 0, 1)$ geführt. Also zur gleichen Entscheidung wie in der Teilaufgabe (d) mit

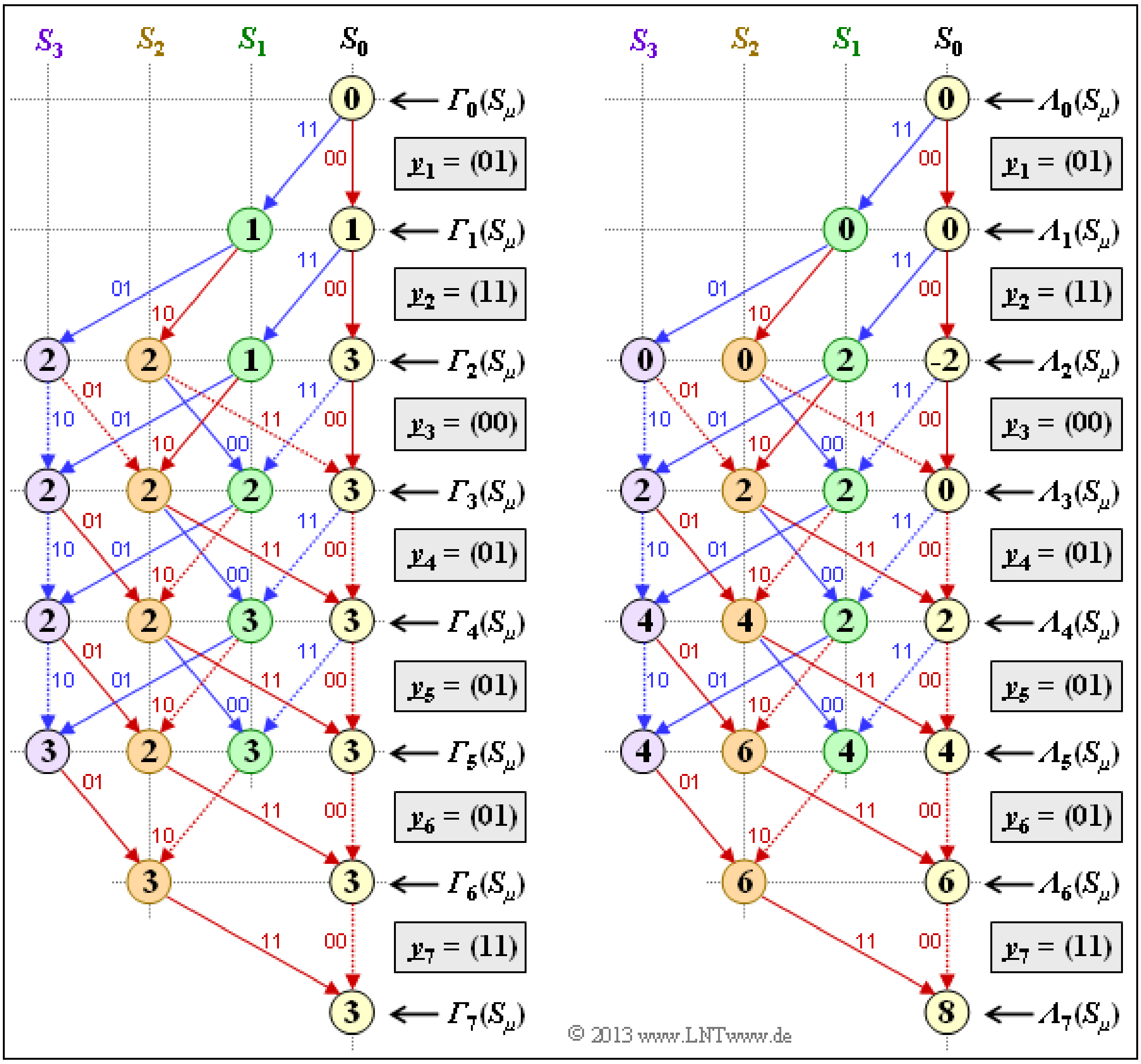
Terminierungsbit. Es gibt aber viele Konstellationen, bei denen erst das Terminierungsbit die richtige und sichere Entscheidung ermöglicht.

# Musterlösung zur Aufgabe A3.10

**a)** Bei allen Knoten $S_\mu$ muss eine Entscheidung zwischen den beiden ankommenden Zweigen getroffen werden. Ausgewählt wird dann jeweils der Zweig, der zur (minimalen) Fehlergröße $\Gamma_5(S_\mu)$ geführt hat. Mit $\underline{y}_5 = (01)$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\Gamma_5(S_0) &= \min\left[\Gamma_4(S_0) + d_{\rm H}\big((00)\,,(01)\big)\,,\ \Gamma_4(S_2) + d_{\rm H}\big((11)\,,(01)\big)\right] = \\
&= \min\,[3+1\,,\,2+1]\ \underline{=3}\,,\\
\Gamma_5(S_1) &= \min\left[\Gamma_4(S_0) + d_{\rm H}\big((11)\,,(01)\big)\,,\ \Gamma_4(S_2) + d_{\rm H}\big((00)\,,(01)\big)\right] = \\
&= \min\,[3+1\,,\,2+1]\ \underline{=3}\,,\\
\Gamma_5(S_2) &= \min\left[\Gamma_4(S_1) + d_{\rm H}\big((10)\,,(01)\big)\,,\ \Gamma_4(S_3) + d_{\rm H}\big((01)\,,(01)\big)\right] = \\
&= \min\,[3+2\,,\,2+0]\ \underline{=2}\,,\\
\Gamma_5(S_3) &= \min\left[\Gamma_4(S_1) + d_{\rm H}\big((01)\,,(01)\big)\,,\ \Gamma_4(S_3) + d_{\rm H}\big((10)\,,(01)\big)\right] = \\
&= \min\,[3+0\,,\,2+2]\ \underline{=3}\,.
\end{aligned}$$

Die linke Grafik zeigt das endgültig ausgewertete $\Gamma_i(S_\mu)$–Trellis.




**b)** Zum Zeitpunkt $i = 6$ ist bereits die Terminierung wirksam und es gibt nur noch zwei Fehlergrößen. Für diese erhält man mit $\underline{y}_6 = (01)$ :

$$\begin{aligned}\Gamma_6(S_0) &= \min\left[\Gamma_5(S_0) + d_\mathrm{H}\big((00)\,,(01)\big)\,,\ \Gamma_5(S_2) + d_\mathrm{H}\big((11)\,,(01)\big)\right] = \\ &= \min\left[3+1\,,\,2+1\right]\ \underline{=3}\,, \\ \Gamma_6(S_2) &= \min\left[\Gamma_5(S_1) + d_\mathrm{H}\big((10)\,,(01)\big)\,,\ \Gamma_5(S_3) + d_\mathrm{H}\big((01)\,,(01)\big)\right] = \\ &= \min\left[3+2\,,\,3+0\right]\ \underline{=3}\,.\end{aligned}$$

**c)** Der Endwert ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\Gamma_7(S_0) &= \min\left[\Gamma_6(S_0) + d_\mathrm{H}\big((00)\,,(11)\big)\,,\ \Gamma_6(S_2) + d_\mathrm{H}\big((11)\,,(11)\big)\right] = \\ &= \min\left[3+2\,,\,3+0\right]\ \underline{=3}\,.\end{aligned}$$

Beim BSC–Modell kann aus $\Gamma_7(S_\mu) = 3$ darauf geschlossen werden, dass drei Übertragungsfehler aufgetreten sind $\Rightarrow$ Lösungsvorschläge 1 und 3.

**d)** Richtig sind die Aussagen 1 und 2. Die Maximierung der Metriken $\Lambda_i(S_\mu)$ entsprechend der rechten Grafik liefert das gleiche Ergebnis wie die links dargestellte Minimierung der Fehlergrößen $\Gamma_i(S_\mu)$. Auch die überlebenden und gestrichenen Zweige sind in beiden Grafiken identisch.

Die angegebene Gleichung ist ebenfalls richtig, was hier nur am Beispiel $i = 7$ gezeigt wird:

$$\Lambda_7(S_0)) = 2 \cdot [i - \Gamma_7(S_0)] = 2 \cdot [7-3]\ \underline{=8}\,.$$

Die letzte Aussage ist falsch. Vielmehr gilt $\langle x_i', y_i\rangle \in \{-2, 0, +2\}$.

*Hinweis:* In der **Aufgabe A3.11** wird für das gleiche Beispiel die Pfadsuche demonstriert, wobei von den $\Lambda_i(S_\mu)$–Metriken entsprechend der rechten Grafik ausgegangen wird.

# Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.10

**a)** Die zwei Binärfolgen seien $\underline{x}$ und $\underline{y}$ mit $x_i \in \{-1, +1\}$, $y_i \in \{-1, +1\}$. Die Folgenlänge sei jeweils $L$.

Die Hamming–Distanz $d_{\rm H}(\underline{x}, \underline{y})$ gibt die Anzahl der Bit an, in denen sich $\underline{x}$ und $\underline{y}$ unterscheiden, für die also $x_i - y_i = \pm 2 \;\Rightarrow\; (x_i - y_i)^2 = 4$ gilt. Gleiche Symbole ($x_i = y_i$) tragen zur Hamming–Distanz nicht bei und ergeben $(x_i - y_i)^2 = 0$. Entsprechend dem Lösungsvorschlag 3 kann daher geschrieben werden:

$$d_{\rm H}(\underline{x}\hspace{0.05cm}, \hspace{0.1cm}\underline{y}) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{L} \hspace{0.2cm}(x_i - y_i)^2 = \frac{1}{4} \cdot d_{\rm E}^2(\underline{x}\hspace{0.05cm}, \hspace{0.1cm}\underline{y})\hspace{0.05cm}.$$

**b)** Beim BSC–Modell ist es allgemein üblich, zum gegebenen Empfangsvektor $\underline{y}$ das Codewort $\underline{x}$ mit der kleinsten Hamming–Distanz $d_{\rm H}(\underline{x}, \underline{y})$ auszuwählen:

$$\underline{z} = {\rm arg} \min_{\underline{x}\hspace{0.05cm} \in \hspace{0.05cm} \mathcal{C}} \hspace{0.1cm} d_{\rm H}(\underline{x}\hspace{0.05cm}, \hspace{0.1cm}\underline{y})\hspace{0.05cm}.$$

Entsprechend der Teilaufgabe (a) gilt aber auch:

$$\underline{z} = {\rm arg} \min_{\underline{x}\hspace{0.05cm} \in \hspace{0.05cm} \mathcal{C}} \hspace{0.1cm} d_{\rm E}^{\hspace{0.15cm}2}(\underline{x}\hspace{0.05cm}, \hspace{0.1cm}\underline{y})/4 \hspace{0.3cm} \Rightarrow \hspace{0.3cm} \underline{z} = {\rm arg} \min_{\underline{x}\hspace{0.05cm} \in \hspace{0.05cm} \mathcal{C}} \hspace{0.1cm} d_{\rm E}^{\hspace{0.15cm}2}(\underline{x}\hspace{0.05cm}, \hspace{0.1cm}\underline{y}) \hspace{0.3cm} \Rightarrow \hspace{0.3cm} \underline{z} = {\rm arg} \min_{\underline{x}\hspace{0.05cm} \in \hspace{0.05cm} \mathcal{C}} \hspace{0.1cm} d_{\rm E}(\underline{x}\hspace{0.05cm}, \hspace{0.1cm}\underline{y})\hspace{0.05cm}.$$

Der Faktor 1/4 spielt für die Minimierung keine Rolle. Da $d_{\rm E}(\underline{x}, \underline{y}) \ge 0$ ist, ist es auch egal, ob die Minimierung hinsichtlich $d_{\rm E}(\underline{x}, \underline{y})$ oder $d_{\rm E}^2(\underline{x}, \underline{y})$ vorgenommen wird. Alle Lösungsvorschläge sind richtig.

**c)** Das Quadrat der Euklidischen Distanz kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$d_{\rm E}^{\hspace{0.15cm}2}(\underline{x}\hspace{0.05cm}, \hspace{0.1cm}\underline{y}) = \sum_{i=1}^{L} \hspace{0.2cm}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{L} \hspace{0.1cm}x_i^{\hspace{0.15cm}2} \hspace{0.1cm}+ \hspace{0.1cm}\sum_{i=1}^{L} \hspace{0.1cm}y_i^{\hspace{0.15cm}2} \hspace{0.1cm}-2 \cdot \sum_{i=1}^{L} \hspace{0.1cm}x_i \cdot y_i \hspace{0.05cm}.$$

Die beiden ersten Summanden sind jeweils gleich $L$ und müssen für die Minimierung nicht berücksichtigt werden. Für den letzten Ausdruck in dieser Gleichung kann $-2 \cdot \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ geschrieben werden. Aufgrund des negativen Vorzeichens wird aus der Minimierung eine Maximierung $\Rightarrow$ Antwort 2.

**d)** Für den AWGN–Kanal kann im Gegensatz zum BSC keine Hamming–Distanz angegeben werden. Richtig sind die Lösungsvorschläge 2 und 3. Ausgehend von der Gleichung

$$d_{\rm E}^{\hspace{0.15cm}2}(\underline{x}\hspace{0.05cm}, \hspace{0.1cm}\underline{y}) = \sum_{i=1}^{L} \hspace{0.1cm}x_i^{\hspace{0.15cm}2} \hspace{0.1cm}+ \hspace{0.1cm}\sum_{i=1}^{L} \hspace{0.1cm}y_i^{\hspace{0.15cm}2} \hspace{0.1cm}-2 \cdot \sum_{i=1}^{L} \hspace{0.1cm}x_i \cdot y_i$$

gelten für den ersten und letzten Summanden die gleichen Aussagen wie für das BSC–Modell – siehe Teilaufgabe (c). Für den mittleren Summanden gilt mit $y_i = x_i + n_i$ und $x_i \in \{-1, +1\}$:

$$\sum_{i=1}^{L} \hspace{0.1cm}y_i^{\hspace{0.15cm}2} = \sum_{i=1}^{L} \hspace{0.1cm}x_i^{\hspace{0.15cm}2} \hspace{0.1cm}+ \hspace{0.1cm}\sum_{i=1}^{L} \hspace{0.1cm}n_i^{\hspace{0.15cm}2} \hspace{0.1cm}+2 \cdot \sum_{i=1}^{L} \hspace{0.1cm}x_i \cdot n_i\hspace{0.05cm}.$$

Der erste Summand ergibt wieder $L$, der zweite ist proportional zur Rauschleistung und der letzte Term verschwindet, da $\underline{x}$ und $\underline{n}$ unkorreliert sind. Für die Minimierung von $d_{\rm E}(\underline{x}, \underline{y})$ muss also die Summe über $y_i^2$ nicht berücksichtigt werden, da kein Bezug zu den Codesequenzen $\underline{x}$ besteht.

# Musterlösung zur Aufgabe A3.11

**a)** Eindeutig findet man den überlebenden Pfad durch Rückwärtssuche, also vom Knoten $\Lambda_7(S_0)$ zum Knoten $\Lambda_0(S_0)$. Anhand der an den Übergängen angegebenen Codesequenzen (00, 01, 10 oder 11) erhält man somit in Vorwärtsrichtung das Ergebnis gemäß Lösungsvorschlag 2 $\Rightarrow$ $\Phi_7(S_0)$ in Grafik:

$$\underline{z} = (00\,,11\,,10\,,00\,,01\,,01\,,11)\,.$$

Entlang der anderen Pfade gelangt man nicht bis zum Endknoten $\Lambda_7(S_0)$.

**b)** Durch Vergleich der in der Teilaufgabe (a) ausgewählten Codesequenz $\underline{z}$ mit der Empfangssequenz

$$\underline{y} = (01\,,11\,,00\,,01\,,01\,,01\,,11)$$

erkennt man drei Bitfehler an den Positionen 2, 5 und 8. Wurde eine Codesequenz $\underline{x} \neq \underline{z}$ gesendet, so können es natürlich mehr sein. Aufgrund des Endwertes $\Lambda_7(S_0) = 8$ bzw. $\Gamma_7(S_0) = 3$ – siehe **Aufgabe A3.10** – kann man aber davon ausgehen, dass eine richtige Entscheidung $\Rightarrow$ $\underline{z} = \underline{x}$ getroffen wurde.

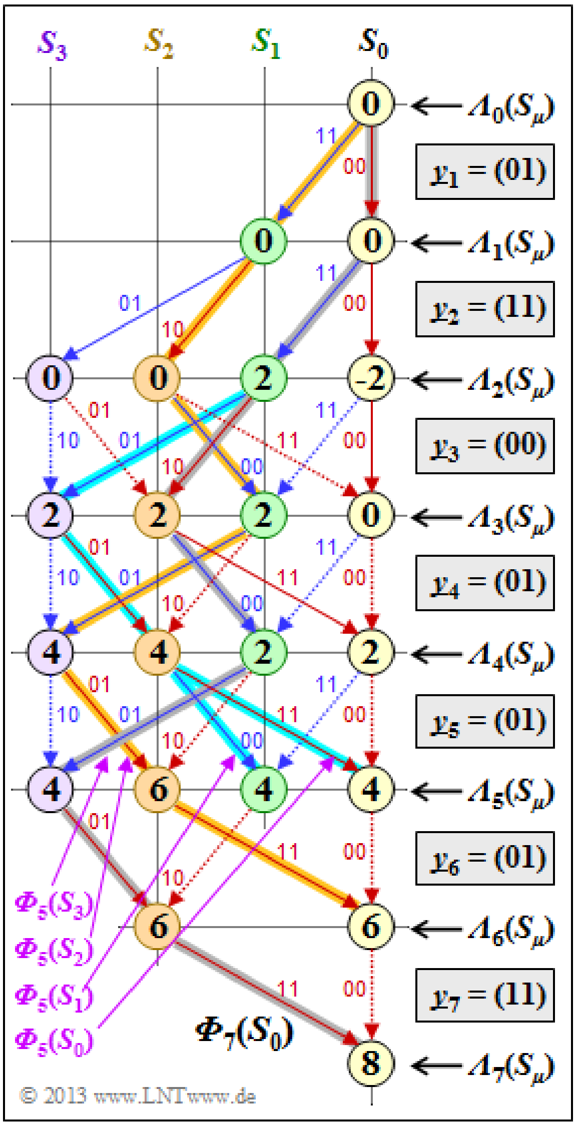
**c)** Anhand der Farben des überlebenden Pfades – rot steht für $u_i = 0$ und blau für $u_i = 1$ – erkennt man die Richtigkeit von Lösungsvorschlag 1: rot – blau – rot – blau – blau – rot – rot. Es ist anzumerken, dass die eigentliche Informationssequenz $\underline{u}$ nur die Länge $L = 5$ aufweist. Erst durch die Terminierung kommt man zur Gesamtlänge $L' = L + m = 7$.

**d)** Zur Zeit $i = 6$ gibt es noch zwei überlebende Pfade. Eine Entscheidung könnte man zwangsweise anhand der größeren Metrik treffen. Wegen $\Lambda_6(S_0) = \Lambda_6(S_2) = 6$ ist dies aber in unserem Beispiel nicht möglich $\Rightarrow$ Nein.

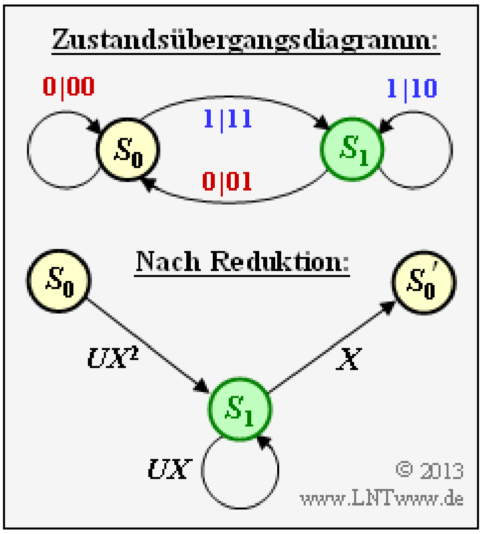
**e)** Die Grafik zeigt, dass alle Lösungsvorschläge richtig sind. Die Pfade sind mit $\Phi_5(S_0)$, ... , $\Phi_5(S_3)$ bezeichnet.

**f)** Die Zwangsentscheidung zum Zeitpunkt $i = 5$ würde den Pfad mit der größten Metrik $\Lambda_5(S_\mu)$ auswählen, also den Pfad $\Phi_5(S_2)$ entsprechend Lösungsvorschlag 3.

**g)** Aufgrund unserer Lösung zur Teilaufgabe (a) wäre der Pfad $\Phi_5(S_3)$ gemäß Lösungsvorschlag 4 die bessere Wahl gewesen. Dieser ist Teil des Pfades $\Phi_7(S_0)$. Zum Zeitpunkt $i = 5$ spricht aber noch nichts für diese Wahl. Der (letztlich richtige) Pfad wird erst durch die beiden Terminierungsbit herausgehoben.



# Musterlösung zur Aufgabe A3.12




**a)** Der Zustand $S_0$ muss entsprechend nebenstehender Grafik in einen Startzustand $S_0$ und einen Endzustand $S_0'$ aufgespalten werden. Der Grund hierfür ist, dass für die folgende Berechnung der Pfadgewichtsfunktion $T(X, U)$ alle Übergänge von $S_0$ nach $S_0$ ausgeschlossen werden müssen.

Jedes Codesymbol $x \in \{0, 1\}$ wird durch $X^x$ dargestellt, wobei $X$ eine Dummy–Variable hinsichtlich der Ausgangssequenz ist: $x = 0 \Rightarrow X^0 = 1$, $x = 1 \Rightarrow X^1 = X$. Daraus folgt weiter $(00) \Rightarrow 1$, $(01) \Rightarrow X$, $(10) \Rightarrow X$, $(11) \Rightarrow X^2$.

Bei einem blauen Übergang im ursprünglichen Diagramm – dies steht für $u_i = 1$ – ist im modifizierten Diagramm der Faktor $U$ hinzuzufügen. Aus der nebenstehenden Grafik erkennt man, dass die Lösungsvorschläge 1, 3, 4 und 5 richtig sind.

**b)** Das reduzierte Diagramm ist entsprechend der Auflistung im **Theorieteil** ein „Ring". Daraus folgt:

$$T_{\rm enh}(X,U) = \frac{A(X,U) \cdot B(X,U)}{1 - C(X,U)}\,.$$

Mit $A(X, U) = UX^2$, $B(X, U) = X$, $C(X, U) = UX$ erhält man mit der angegebenen Reihenentwicklung:

$$T_{\rm enh}(X,U) = \frac{U\,X^3}{1-U\,X} = U\,X^3 \cdot \left[1 + (U\,X) + (U\,X)^2 + \ldots\right]\,.$$

Richtig sind somit die Lösungsvorschläge 2 und 3.

**c)** Man kommt von der erweiterten Pfadgewichtsfunktion zu $T(X)$, indem der Formalparameter $U = 1$ gesetzt wird. Richtig sind also beide Lösungsvorschläge.

**d)** Die freie Distanz $d_{\rm F}$ lässt sich aus der Pfadgewichtsfunktion $T(X)$ ablesen, und zwar als der niedrigste Exponent der Dummy–Variablen $X \Rightarrow d_{\rm F} \underline{= 3}$.

# Musterlösung zur Zusatzaufgabe Z3.12

**a)** Richtig sind die Lösungsvorschläge 1 und 2. Allgemein ausgedrückt: Man geht zunächst von $S_1$ nach $S_2$, verbleibt $j$–mal im Zustand $S_2$ ($j$ = 0, 1, 2, ...) und geht abschließend von $S_2$ nach $S_3$ weiter.

**b)** Entsprechend den Ausführungen zur Teilaufgabe (a) erhält man für die Ersetzung des Ringes:

$$\begin{aligned} E &= A \cdot B + A \cdot C \cdot B + A \cdot C^2 \cdot B + A \cdot C^3 \cdot B + \ldots = \\ &= A \cdot B \cdot [1 + C + C^2 + C^3 + \ldots\,]\,. \end{aligned}$$

Der Klammerausdruck ergibt 1/(1 – $C$). Somit erhält man das Ergebnis gemäß Lösungsvorschlag 2:

$$E(X, U) = \frac{A(X, U) \cdot B(X, U)}{1 - C(X, U)}\,.$$

**c)** Man geht zunächst von $S_1$ nach $S_2$ und zum Abschluss immer von $S_3$ nach $S_4$.

- Zunächst von $S_1$ nach $S_2$ ⇒ $A(X, U)$,
- dann von $S_2$ nach $S_3$ ⇒ $C(X, U)$,
- anschließend $j$–mal zurück nach $S_2$ und wieder nach $S_3$ ($j$ = 0, 1, 2, ...) ⇒ $E(X, U)$,
- abschließend von $S_3$ nach $S_4$ ⇒ $B(X, U)$.

Richtig sind also die Lösungsvorschläge 1, 3 und 4.

**d)** Entsprechend der Musterlösung zur Teilaufgabe (c) gilt:

$$F(X, U) = A(X, U) \cdot C(X, U) \cdot E(X, U) \cdot B(X, U)$$

Hierbei beschreibt $E(X, U)$ den Weg „$j$–mal" zurück nach $S_2$ und wieder nach $S_3$ ($j$ = 0, 1, 2, ...):

$$E(X, U) = 1 + D \cdot C + (1 + D)^2 + (1 + D)^3 + \ldots\; = \frac{1}{1 - C\,D}$$

$$\Rightarrow \quad F(X, U) = \frac{A(X, U) \cdot B(X, U) \cdot C(X, U)}{1 - C(X, U) \cdot D(X, U)}\,.$$

Richtig ist also der Lösungsvorschlag 1.

# Musterlösung zur Aufgabe A3.13

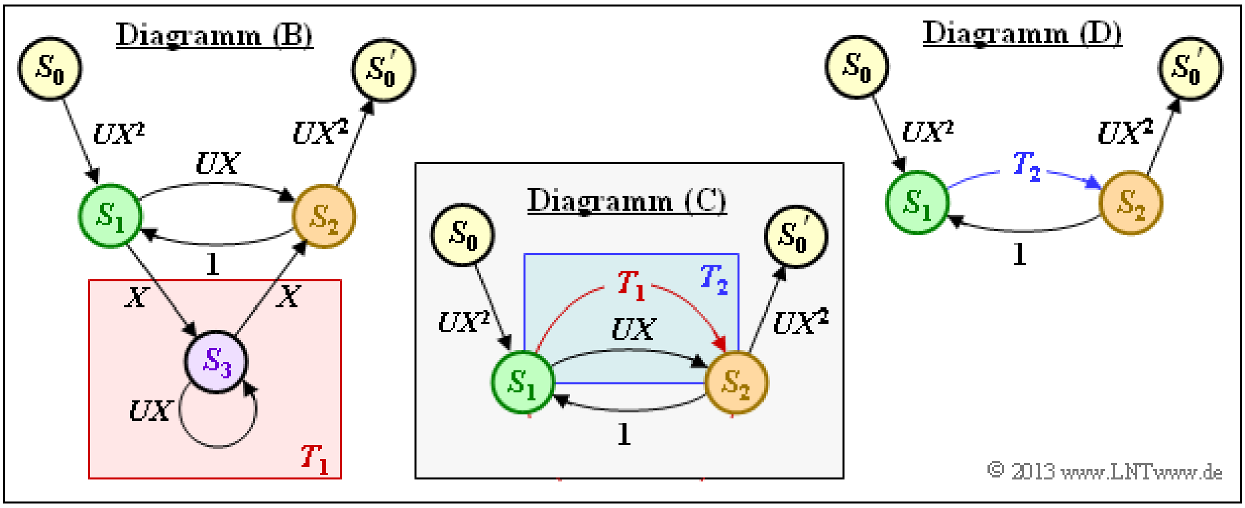
**a)** Der Übergang von $S_0$ nach $S_1$ ist durch „1 | 11" gekennzeichnet. Die Ausgangssequenz $\underline{x}_i$ = (11) wird durch $X^2$ ausgedrückt, das Eingangsbit $u_i$ = 1 durch $U$. Gleiches Ergebnis erhält man für $G(X, U)$:

$$A(X,U) = G(X,U) = UX^2 .$$

Die Ausgangssequenzen $\underline{x}_i$ = (01) sowie $\underline{x}_i$ = (10) werden beide mit $X$ markiert. Unter Berücksichtigung der Eingangsbits erhält man somit:

$$u_i = 1\colon\ B(X,U) = D(X,U) = UX\,, \quad u_i = 0\colon\ C(X,U) = E(X,U) = X\,.$$

Der Übergang „0 | 00" von $S_2$ nach $S_1$ wird durch $F(X, U)$ = 1 ausgedrückt. Im angepassten Diagramm (B) sind alle Übergänge eingezeichnet. Man erkennt, dass <u>alle Lösungsvorschläge</u> richtig sind.




**b)** Entsprechend der Vorgehensweise auf **Seite 4c** im Theorieteil wird zunächst der Übergang von $S_1$ nach $S_2$ via $S_3$ durch einen *Ring* zusammengefasst.

- Man erhält für die rote Hinterlegung im Diagramm (B):

$$T_1(X,U) = \frac{A(X,U)\cdot B(X,U)}{1-C(X,U)} = \frac{X\cdot X}{1-U\cdot X}.$$

- Die beiden *parallelen Übergänge* entsprechend der blauen Hinterlegung im Diagramm (C) können wie folgt zusammengefasst werden:

$$T_2(X,U) \;=\; T_1(X,U) + B(X,U) = \frac{X^2}{1-UX} + UX = \frac{X^2+U-U^2X^2}{1-UX}.$$

- Die erweiterte Pfadgewichtsfunktion ergibt sich entsprechend Diagramm (D) als *Rückkopplung*:

$$T_{\rm enh}(X,U) = \frac{A(X,U)\cdot G(X,U)\cdot T_2(X,U)}{1-F(X,U)\cdot T_2(X,U)} = \frac{UX^2\cdot UX^2\cdot \frac{X^2+UX-U^2X^2}{1-UX}}{1-1\cdot\frac{X^2+UX-U^2X^2}{1-UX}}.$$

Dem Autor ist es auch nach mehreren Versuchen nicht gelungen, diesen Ausdruck zielführend weiter zu vereinfachen. Er tendiert zum <u>Lösungsvorschlag 3</u> mit dem Zusatz „ohne Gewähr". Dieses Ergebnis würde jedoch bedeuten, dass sich die erweiterte Pfadgewichtsfunktion des äquivalenten systematischen Codes von der des nichtsystematischen Codes unterscheidet. Wir werden diese Frage noch mit einem

Fachmann klären.

**c)** Setzt man in der erweiterten Funktion $T_{\rm enh}(X, U)$ den Formalparameter $U = 1$, so erhält man

$$T(X) = \frac{X^4 \cdot \frac{X^2+X-X^2}{1-X}}{1-\frac{X^2+X-X^2}{1-X}} = \frac{X^5}{1-X-X} = \frac{X^5}{1-2X}\,.$$

Richtig ist somit der Lösungsvorschlag 1 und mit der Reihenentwicklung $1/(1–x) = 1 + x + x^2 + ...$ auch der Lösungsvorschlag 2. Das heißt: Die einfache Pfadgewichtsfunktion stimmt bei beiden Codes überein.

# Musterlösung zur Aufgabe A3.14

**a)** Der Bhattacharyya–Parameter ergibt sich für das BSC–Modell mit $\varepsilon = 0.01$ zu

$$\beta = 2 \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot (1-\varepsilon)} = 2 \cdot \sqrt{0.01 \cdot 0.99} \;\underline{\approx 0.199}\,.$$

Für noch kleinere Verfälschungswahrscheinlichkeiten $\varepsilon$ kann näherungsweise geschrieben werden:

$$\beta \approx 2 \cdot \sqrt{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 10^{-4}: \quad \beta \;\underline{\approx 0.02}\,.$$

**b)** Es gilt Pr(Burstfehler) ≤ Pr(Bhattacharyya) mit Pr(Bhattacharyya) = $T(X = \beta)$. Für den betrachteten Faltungscode der Rate 1/2, dem Gedächtnis $m = 2$ und $\mathbf{G}(D) = (1 + D + D^2, 1 + D^2)$ lautet die Pfadgewichtsfunktion:

$$T(X) = \frac{X^5}{1-2X} \quad \Rightarrow \quad {\rm Pr(Bhattacharyya)} = T(X = \beta) = \frac{\beta^5}{1-2\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = 10^{-2}: \; {\rm Pr(Bhattacharyya)} \; = \; \frac{0.199^5}{1-2\cdot 0.199} \;\underline{\approx 5.18 \cdot 10^{-4}}\,,$$

$$\varepsilon = 10^{-4}: \; {\rm Pr(Bhattacharyya)} \; = \; \frac{0.02^5}{1-2\cdot 0.02} \;\underline{\approx 3.33 \cdot 10^{-9}}\,.$$

**c)** Zur Berechnung der Viterbi–Schranke gehen wir von der erweiterten Pfadgewichtsfunktion aus:

$$T_{\rm enh}(X, U) = \frac{UX^5}{1-2UX}\,.$$

- Die Ableitung dieser Funktion nach dem Eingangsparameter $U$ lautet:

$$\frac{\rm d}{{\rm d}U}\, T_{\rm enh}(X, U) = \frac{(1-2UX)\cdot X^5 - UX^5 \cdot (-2X)}{(1-2UX)^2} = \frac{X^5}{(1-2UX)^2}\,.$$

- Diese Gleichung liefert für $U = 1$ und $X = \beta$ die Viterbi–Schranke:

$$\frac{\rm d}{{\rm d}U}\, T_{\rm enh}(X, U) = \frac{(1-2UX)\cdot X^5 - UX^5 \cdot (-2X)}{(1-2UX)^2} = \frac{UX^5}{(1-2UX)^2}\,.$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = 10^{-2}: \; {\rm Pr(Viterbi)} \; = \; \frac{0.199^5}{(1-2\cdot 0.199)^2} \; = \;\underline{\approx 8.61 \cdot 10^{-4}}\,,$$

$$\varepsilon = 10^{-4}: \; {\rm Pr(Viterbi)} \; = \; \frac{0.02^5}{(1-2\cdot 0.02)^2} \; = \;\underline{\approx 3.47 \cdot 10^{-9}}\,.$$

Wir überprüfen das Ergebnis anhand der folgenden Näherung:

$$T_{\rm enh}(X, U) = UX^5 + 2U^2X^6 + 4U^3X^7 + 8\,U^4X^8 + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\rm d}{{\rm d}U}\, T_{\rm enh}(X, U) = X^5 + 4UX^6 + 12U^2X^7 + 32\,U^3X^8 + \ldots$$

Setzt man $U = 1$ und $X = \beta$ so erhält man wieder die Viterbi–Schranke:

$$\begin{aligned}{\rm Pr(Viterbi)} \; &= \; \beta^5 + 4\beta^6 + 12\beta^7 + 32\beta^8 + \ldots = \\ &= \; \beta^5 \cdot (1 + 4\beta + 12\,\beta^2 + 32\,\beta^3 + \ldots)\,.\end{aligned}$$

Für $\varepsilon = 10^{-2} \;\Rightarrow\; \beta = 0.199$ erhält man, wenn man die unendliche Summe nach dem $\beta^3$–Term abbricht:

$$\Pr(\text{Viterbi}) \approx 3.12 \cdot 10^{-4} \cdot (1 + 0.796 + 0.475 + 0.252) = 7.87 \cdot 10^{-4}\,.$$

Der Abbruchfehler – bezogen auf $8.61 \cdot 10^{-4}$ – beträgt hier ca. 8.6%. Für $\varepsilon = 10^{-4} \Rightarrow \beta = 0.02$ macht man durch den Abbruch nahezu keinen Fehler:

$$\Pr(\text{Viterbi}) \approx 3.20 \cdot 10^{-9} \cdot (1 + 0.086 + 0.0048 + 0.0003) = 3.47 \cdot 10^{-9}\,.$$

**d)** Für $\beta = 0.5$ ergeben sich für beide Schranken der Wert „unendlich”. Für noch größere $\beta$–Werte wird die Bhattacharyya–Schranke negativ und auch das Ergebnis für die Viterbi–Schranke ist dann nicht anwendbar. Daraus folgt:

$$\beta_0 = 2 \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \cdot (1 - \varepsilon_0)} = 0.5$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_0 \cdot (1 - \varepsilon_0) = 0.25^2 = 0.0625$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_0^2 - \varepsilon_0 + 0.0625 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_0 = 0.5 \cdot (1 - \sqrt{0.75}) \underline{\approx 0.067}\,.$$

| Kanalparameter | | Schranke nach | |
|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | $\beta$ | Bhattacharyya | Viterbi |
| $3 \cdot 10^{-2}$ | 0.341 | $1.45 \cdot 10^{-2}$ | $4.56 \cdot 10^{-2}$ |
| $10^{-2}$ | 0.199 | $5.18 \cdot 10^{-4}$ | $8.61 \cdot 10^{-4}$ |
| $3 \cdot 10^{-3}$ | 0.109 | $1.97 \cdot 10^{-5}$ | $2.52 \cdot 10^{-5}$ |
| $10^{-3}$ | 0.063 | $1.14 \cdot 10^{-6}$ | $1.30 \cdot 10^{-6}$ |
| $3 \cdot 10^{-4}$ | 0.035 | $5.65 \cdot 10^{-8}$ | $6.07 \cdot 10^{-8}$ |
| $10^{-4}$ | 0.020 | $3.33 \cdot 10^{-9}$ | $3.47 \cdot 10^{-9}$ |